

Oscilador anarmônico clássico com simetria $U(1)$: por que deve haver dinâmica em uma teoria de calibre?

Classical anharmonic oscillator with $U(1)$ symmetry: why must there be dynamics in a gauge theory?

M.M.F. Perovano¹, W. Spalenza^{*2}, H. Belich³, J.A. Helayël-Neto⁴

¹E.E.E.F.M. Dr. José Moyses, Cariacica, ES, Brasil.

²Instituto Federal do Espírito Santo, Cariacica, ES, Brasil.

³Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Física, Vitória, ES, Brasil.

⁴Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 16 de julho de 2023. Revisado em 21 de janeiro de 2024. Aceito em 23 de janeiro de 2024.

A simetria de “gauge” e, em consequência, as teorias de calibre, que de forma natural se estabeleceram no contexto da teoria eletromagnética, constituem uma abordagem muito apropriada e bem-sucedida para descrever as interações eletrofracas e fortes, e consolidaram as teorias quânticas de campo como uma formulação universal para tratar as diferentes interações fundamentais. O sucesso desta proposta é devido ao fato de que, incluindo um campo de calibre como mediador de uma dada interação, emerge um formalismo padrão para descrever os campos de força conhecidos. Nesta contribuição, adotamos o exemplo dos osciladores bidimensionais harmônicos/anarmônicos clássicos para apresentar, de forma introdutória, o procedimento geral de construção de uma teoria de calibre. Para relacionar esta discussão com um cenário de uma teoria de campos, partimos da eletrodinâmica escalar e utilizamos a técnica de redução dimensional para se chegar à lagrangiana de um sistema mecânico. E, com este exemplo, tentamos motivar e mostrar por que é necessário que os campos de calibre devem corresponder a graus de liberdade dinâmicos.

Palavras-chave: Oscilador anarmônico clássico, Simetria de calibre, Eletrodinâmica quântica, Teoria de calibre.

Gauge symmetry and, consequently, gauge theories, which emerge naturally in the context of the electromagnetic theory, in their non-Abelian version encompass electroweak and strong interactions; this has consolidated quantum field theories as a way of systematically describing the processes of fundamental particles. The success of this proposal is due to the fact that, by including a gauge field as the mediator of an interaction, a universal formulation may be adopted to describe the diverse fundamental interactions. In this contribution, we pick out the example of classical harmonic/anharmonic two-dimensional oscillators to endeavour a presentation of gauge theories in an introductory way, compatible with the level of knowledge of an undergraduate course. To relate this discussion to a field-theory scenario, we start off from the scalar electrodynamics and make use of a dimensional reduction technique to get a Lagrangian of a classical mechanical system. In this scenario, we motivate and justify why, besides ensuring local invariance, gauge fields must correspond to propagating degrees of freedom.

Keywords: Classical anharmonic oscillator, Gauge symmetry, Quantum electrodynamics, Gauge theory.

1. Introdução

As teorias baseadas na invariância de calibre mostraram-se de suma importância para descrever fenômenos físicos em diferentes escalas, das subatômicas/subnucleares às cosmológicas. Fundamentam a formulação do Modelo-Padrão das Interações Fundamentais, a Relatividade Geral e o Modelo-Padrão Cosmológico e teorias além desses citados modelos-padrão, como, por exemplo, a Supergravidade e as Supercordas.

A primeira teoria de campo com uma simetria de calibre foi a formulação de Maxwell (sem este nome ainda) para o eletromagnetismo, desenvolvida entre 1864

e 1867, ainda na sua forma original. Anos depois, ficou estabelecida a sua formulação covariante, a partir do advento da Relatividade Restrita, e sua formulação quadridimensional em espaço de Minkowski seguiu naturalmente. Porém, a importância dessa simetria permaneceu despercebida nas primeiras formulações. Hermann Weyl [1], inspirado pelo sucesso na Relatividade Geral de Einstein, conjecturou em 1929 que a invariância sob a mudança de escala, ou calibre, em inglês “gauge”, também pode ser uma simetria local de teorias físicas, como na gravitação, no eletromagnetismo e outras interações. Embora Weyl tenha escolhido esta simetria, mesmo incorreta, o nome “gauge” ficou ligado à abordagem da teoria. Após o desenvolvimento da mecânica quântica, Weyl, Fock e London [2–6] modificaram sua escolha de calibre, substituindo o fator de escala por uma

*Endereço de correspondência: wspalenza@gmail.com

mudança de fase da onda e aplicando-o com sucesso ao eletromagnetismo, com os calibres de Coulomb, Lorentz e Feynmann. Esta teoria ficou conhecida como teoria de calibre $U(1)$. A simetria de calibre foi generalizada matematicamente em 1954 por Chen Ning Yang e Robert Mills [7] na tentativa de descrever as interações nucleares fortes sob o grupo $SU(2)$ e $SU(3)$ e ordens superiores. A partir da teoria de Yang-Mills, usando a simetria do grupo $SU(2)$, foi possível unificar as interações fraca e o eletromagnetismo, produzindo a teoria eletrofraca de Salam-Weinberg-Glashow [8–12].

Neste trabalho, temos como objetivo mostrar o problema de um oscilador anarmônico clássico ao qual impomos transformações de simetria de calibre do tipo $U(1)$ que atuam sobre o que seriam os campos em uma teoria de campos; no caso de um modelo mecânico, as coordenadas generalizadas do sistema descrito correspondem ao que seriam os campos em uma teoria de campos. Inicialmente, trataremos da simetria de calibre local $U(1)$ da lagrangiana apenas nas coordenadas das partículas, onde aparece naturalmente um campo de calibre que mantém o termo cinético invariante, como ocorre na teoria da eletrodinâmica escalar [13–18]. Porém, em nosso modelo mecânico, não teremos a presença do termo cinético da lagrangiana para o campo de calibre. Em um segundo caso, introduzimos um termo cinético para o campo (ou coordenada) de calibre como se procede usualmente no caso do Eletromagnetismo. No terceiro caso, faremos uma redução dimensional do tipo Scherk [19] em uma teoria de dimensão $(1+1)$ (uma temporal e uma espacial de Minkowski) para 1 dimensão temporal, onde veremos uma similaridade entre os dois casos anteriores.

Pretendemos mostrar de forma pedagógica que a abordagem da teoria apresentada na forma clássica/mecânica, pode ser acessível a estudantes de Graduação em Física ainda pouco familiarizados com as teorias clássicas e quânticas de campos.

Para iniciarmos a discussão, um campo escalar ou uma função escalar, como a simples componente de um vetor em um espaço unidimensional, não pode sofrer rotação. Já um vetor bi-dimensional no plano cartesiano real $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$, pode sofrer uma rotação sob um ângulo α , constante ou não, ou no plano complexo, como na figura abaixo (1). No plano real, a rotação é definida por uma matriz de rotação, que se pode encontrar facilmente em livros [20], que obedece a uma estrutura de grupo matricial chamado de $SO(2)$, tal que $\vec{r}' = M_{SO(2)} \cdot \vec{r}$. Já no plano complexo, a estrutura de rotação é semelhante ao caso Cartesiano real, porém o grupo é representado por transformações complexas do tipo $U(1)$, onde $z' = M_{U(1)} \cdot z$. Assim, ambos os grupos possuem elementos de transformação e podem ser escritos através da exponenciação que resulta da aplicação sucessiva de transformações infinitesimais. Estas transformações infinitesimais têm a estrutura composta pelo produto dos parâmetros do grupo com os respectivos geradores,

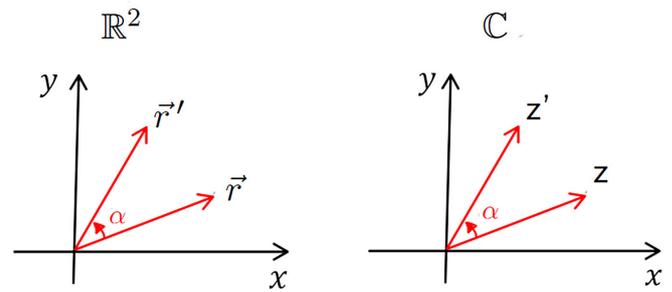


Figura 1: Equivalência entre a rotação de um vetor no plano real e no complexo.

tal que

$$M_{SO(2)} = \exp(\alpha J), \quad M_{U(1)} = \exp(i\alpha) \quad (1)$$

sendo $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ o gerador do grupo $SO(2)$, obtido em termos de coordenadas reais. Estes detalhes podem ser encontrados em [20, 21].¹

Na próxima Seção, iremos verificar o problema de um oscilador anarmônico clássico e analisar as transformações de rotações, na qual generalizaremos e chamaremos de transformações de calibre.

2. Osciladores Harmônico e Anarmônico Clássicos

O estudo de osciladores harmônicos é apresentado, geralmente no segundo ano do Ensino Médio, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na seção física, e na Graduação em Física e Engenharias nas disciplinas de Física Básica, e aprofundado em disciplinas de Mecânica [22–25], onde se apresenta o caráter conservativo da teoria, que também abrange o caso anarmônico, se estendendo até casos em que não há conservação de energia, com termos de fricção ou arrasto. Para estudantes no final da Graduação em Física, temos a abordagem clássica no estudo de ondas eletromagnéticas e em mecânica quântica. Nos primeiros anos da pós-graduação, estudantes que seguem sua especialização na teoria geral de campos e partículas, se deparam com teorias de campos escalares, como as teorias de Klein-Gordon [13–16], que são em geral, as mais simples para se iniciar os conceitos e os desenvolvimentos matemáticos. Estas teorias, que podem ser reais, complexas ou com simetrias não-Abelianas, conhecidas como campos de Yang-Mills, são descritas por equações diferenciais que possuem características de ondas massivas, para alguns casos, contendo um termo anarmônico quártico no campo escalar [7, 8, 13–15]. Podemos apresentar de uma forma mais simples a relação entre estes campos escalares, aqui como posições das partículas, com os seus mediadores, os campos de calibre.

¹ Pode-se escrever o gerador e a matriz do grupo $SO(2)$ em termos da matriz de Pauli σ_y , onde $J = i\sigma_y$, ou seja, $M_{SO(2)} = \exp(i\alpha\sigma_y)$.

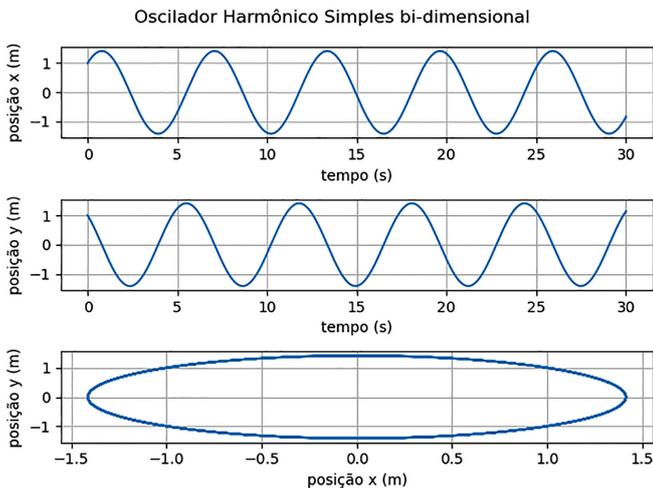


Figura 2: Gráficos de $x(t)$, $y(t)$, gerados pelo método Runge-Kutta 4. Parâmetros $m = 1$, $k = 1$. Condições iniciais $\vec{r}(t = 0) = (1, 1)$, $\vec{v}(t = 0) = (1, -1)$. Todos no (SI).

Nosso principal objetivo nesta Seção é apresentar o oscilador anarmônico clássico e escrever a simetria de calibre que pode ocorrer quando se está propondo uma simetria do tipo local. Começamos então com o lagrangiana mecânico de um oscilador anarmônico bi-dimensional,

$$L = T - U = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \frac{1}{2}k|\vec{r}|^2 - \frac{1}{4}\lambda|\vec{r}|^4 \quad (2)$$

onde $\vec{r} = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$ é a posição em duas dimensões, $\vec{p} = m\vec{v}$, é o momento linear do sistema, $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \dot{x}(t)\hat{e}_x + \dot{y}(t)\hat{e}_y$, temos também que k é o parâmetro constante de oscilação (semelhante à constante da “mola” no sistema massa-mola) e λ o parâmetro anarmônico do sistema, que quando ele é zero, caímos no caso harmônico. Podemos verificar o problema acima no gráfico da figura (2) para o caso harmônico e da figura (3) o caso anarmônico.

3. Oscilador Anarmônico Clássico com Simetria $U(1)$

Para introduzir a simetria de calibre $U(1)$ [13, 20], vamos reescrever a lagrangiana (2) na forma complexa, onde $z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x(t) + iy(t)]$ e $\bar{z}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x(t) - iy(t)]$,

$$L = m \dot{z}\dot{\bar{z}} - k \bar{z}z - \lambda(\bar{z}z)^2. \quad (3)$$

com $\bar{z}z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. A solução para tal teoria é largamente conhecida na literatura [26–31]. Assim, esta pode ser escrita de forma real $m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} + \lambda\vec{r}|\vec{r}|^2 = 0$.

Entrando na nossa proposta de discussão, vamos impor uma transformação de calibre do tipo $U(1)$ local

² Estamos usando a notação de derivada temporal $dx/dt = \dot{x}$. Também a fim de identificação, $T = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$ é o termo de energia cinética e $U = \frac{1}{2}k|\vec{r}|^2 + \frac{1}{4}\lambda|\vec{r}|^4$ a energia potencial do sistema.

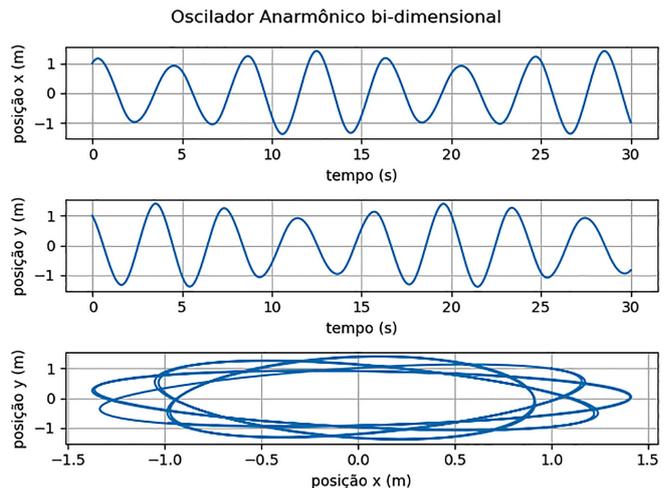


Figura 3: Gráficos de $x(t)$, $y(t)$ gerados pelo método Runge-Kutta 4. Parâmetros $m = 1$, $k = 1$, $\lambda = 1$. Condições iniciais $\vec{r}(t = 0) = (1, 1)$, $\vec{v}(t = 0) = (1, -1)$. Todos no (SI).

$z'(t) = z(t)e^{i\alpha(t)}$, que semelhantemente ao problema da eletrodinâmica escalar, introduzimos um campo $A(t)$ que torna necessária a modificação da derivada simples para um covariante, com um acoplamento mínimo,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{dz}{dt} \longrightarrow D_t z(t) = \partial_t z(t) + igA(t)z(t) \\ &= [\partial_t + igA(t)]z(t), \end{aligned} \quad (4)$$

onde a transformação de calibre assume a forma $A'(t) = A(t) - \frac{1}{g}\partial_t\alpha(t)$, e aqui usamos, $\frac{dz(t)}{dt} = \partial_t z(t) = \dot{z}(t)$. O parâmetro g é uma constante de acoplamento semelhante à constante de carga elétrica que aparece nas derivadas covariantes da eletrodinâmica escalar ou espinorial [13]³. Com isso a lagrangiana da teoria, invariante de calibre local, assume a forma,

$$L = m(D_t z)^\dagger(D_t z) - k \bar{z}z - \lambda(\bar{z}z)^2. \quad (5)$$

sendo \dagger o operador que corresponde à conjugação-transposição. As equações de “movimento” podem ser obtidas facilmente usando as equações de Euler-Lagrange para $A(t), x(t), y(t)$,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g\dot{A}y - 2gA\dot{y} + g^2A^2x - \frac{k}{m}x - \frac{\lambda}{m}x(x^2 + y^2), \\ \ddot{y} &= g\dot{A}x + 2gA\dot{x} + g^2A^2y - \frac{k}{m}y - \frac{\lambda}{m}y(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$A = \frac{1}{g} \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2 + y^2}.$$

³ Muitas vezes, em teorias de campos, é conveniente trabalhar com transformações de calibre infinitesimais, em que o parâmetro de calibre local $\alpha(t)$ é muito pequeno,

$$\delta A(t) = -\frac{1}{g}\partial_t\alpha(t), \quad \delta z(t) = i\alpha(t).$$

Uma outra coisa que podemos citar aqui é que uma transformação de calibre do tipo global, com α constante, não modifica a lagrangiana trazendo um campo de calibre, ou seja, esta não nos interessa.

Fazendo uma análise das soluções das equações acopladas (6), podemos perceber dois problemas: **(i)** O primeiro é que o campo de calibre é proporcional ao momento angular da teoria em 2-dimensões, $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(y\dot{x} - x\dot{y})(-\hat{e}_z)$, ou seja,

$$A = -\frac{\ell_z}{mg|\vec{r}|^2} \quad (7)$$

que nos mostra um momento angular não conservado, exceto se o produto de $A(t)$ e $|\vec{r}|^2$ for constantes no tempo. **(ii)** O segundo problema é que, tomando um exemplo de problema de valor inicial, chegamos à conclusão de que não há soluções finitas. Para soluções de problemas de valores de contorno, também chegamos ao mesmo tipo de resultado, ou seja, concluimos que o problema não tem solução finita e real.

Este é o momento justo para esclarecer que a passagem do status de simetria global para simetria local – quando então se estabelece uma teoria de calibre – é uma decisão que se justifica por critérios básicos das teorias de campos e sua potencialidade para descrever partículas e interações. A questão é saber se uma dada categoria de interação deve estar, ou não, associada a uma simetria local e ser mediada por campos de calibre, constituindo, assim, uma teoria de calibre, como ocorre com as interações do Modelo-Padrão da Física de Partículas: interação eletrofraca e a interação nuclear forte.

Um dos aspectos fundamentais das teorias de campos é o chamado critério da localidade. Este termo se refere ao fato de que as densidades de lagrangiana são formuladas em termos de campos e suas derivadas espaço-temporais, isto é, os campos e suas variações nas vizinhanças dos pontos do espaço-tempo onde a densidade de lagrangiana é considerada. A não-localidade, que se expressa pela presença de termos que incluem pontos do espaço-tempo a grandes distâncias dos pontos onde a densidade de lagrangiana é considerada, pode trazer conflitos com o princípio da causalidade. Por outro lado, uma simetria global contínua estabelece transformações de campos de uma forma instantânea sobre todo o espaço-tempo. A mesma transformação é realizada igualmente e instantaneamente sobre os campos em todos os pontos do espaço. Uma vez que os campos são entidades locais, abre-se a perspectiva de se considerar a possibilidade de que as transformações de simetria que atuam sobre os campos também sejam locais, e não apenas globais; ou seja, campos em diferentes pontos são transformados de forma diferente.

Vamos mencionar aqui que uma transformação de simetria consiste em organizar os graus de liberdade descritos pelos campos. Quando a transformação se torna local, é preciso comparar as convenções (distintas) sobre os graus de liberdade descritos pelos campos em pontos distintos. Isto, então, impõe que sejam introduzidos os agentes que estabelecerão a conexão entre as diferentes convenções resultantes das transformações locais de

simetria. Estes agentes são os chamados campos de calibre (ou campos de gauge) e, fisicamente, descrevem os mediadores, ou transmissores, da interação entre as partículas descritas pelos campos.

É importante destacar que temos, em física fundamental, mais simetrias globais do que locais. Tornar local uma simetria significa dizer que esta simetria define uma nova classe de interação, com campos mediadores que transmitem essa interação. É o caso das interações eletromagnéticas, nucleares fracas, nucleares fortes e gravitacionais, cujas partículas mediadoras são respectivamente o fóton; os bósons vetoriais W^+ , W^- e Z^0 das interações fracas; os glúons, no caso da interação forte e o gráviton, no caso da gravidade. Estes campos/partículas mediadores devem ter a sua dinâmica própria e para se descrever a sua propagação é preciso introduzir um termo próprio de energia cinética para os mesmos. Isto é o que estaremos fazendo agora, pois, de acordo com as equações (7), vê-se que o campo $A(t)$ é completamente fixado pelos graus de liberdade associados a $x(t)$ e $y(t)$, fazendo de $A(t)$ um mero campo auxiliar, sem a sua própria equação dinâmica. Este problema é resolvido se introduzirmos no lagrangiana um termo cinético que descreva a variação temporal direta de $A(t)$, e não como ele evolui no tempo através das coordenadas x e y .

Para entender melhor o que está acontecendo, é importante destacarmos que, até o presente momento, o campo de calibre, $A(t)$, não descreve um grau de liberdade independente, visto que a sua solução é fixada pelas coordenadas x e y nas equações (7). O problema é contornado se damos ao campo A o caráter de um genuíno campo dinâmico. Para isso, vamos propor uma teoria em que o campo de calibre $A(t)$ possua um termo cinético do tipo \dot{A}^2 , como o da energia cinética das posições, de modo que agora este campo também tenha um papel dinâmico. Assim, a lagrangiana assume a forma

$$L = \beta \dot{A}^2 + m(D_t z)^\dagger(D_t z) - k \bar{z}z - \lambda(\bar{z}z)^2. \quad (8)$$

sendo β uma constante positiva. Claramente, esta lagrangiana não é invariante frente a uma transformação de calibre local, pois o novo termo cinético não o é. Porém, se considerarmos o problema apenas mecânico, em que a invariância de calibre não seja algo relevante para descrever um sistema oscilatório anarmônico, podemos trabalhar e investigar as equações de “movimento” de uma partícula de massa m . Calculando as equações de movimento de (8) em termos de x , y e A , obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g\dot{A}y - 2gA\dot{y} + g^2 A^2 x - \frac{k}{m}x - \frac{\lambda}{m}x(x^2 + y^2), \\ \ddot{y} &= g\dot{A}x + 2gA\dot{x} + g^2 A^2 y - \frac{k}{m}y - \frac{\lambda}{m}y(x^2 + y^2), \quad (9) \\ \ddot{A} &= \frac{mg^2}{2\beta}(x^2 + y^2)A - \frac{mg}{2\beta}(y\dot{x} - x\dot{y}). \end{aligned}$$

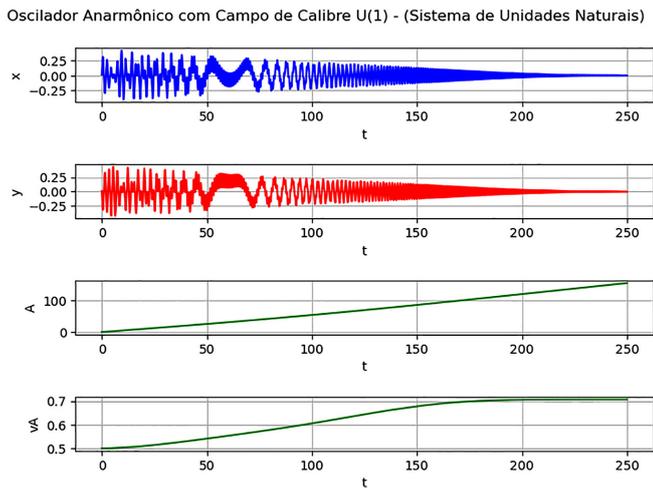


Figura 4: Gráficos dos campos $x(t)$, $y(t)$, $A(t)$ e $\dot{A}(t) = v_A(t)$, gerados via método Runge-Kutta 4 com parâmetros aleatórios $m = 0.01$, $g = 0.01$, $k = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\lambda = 1.0$ e condições iniciais $(x_0, y_0, A_0) = (0.1, 0.1, 0.0)$, $(v_{x0}, v_{y0}, v_{A0}) = (1.0, -1.0, 0.5)$. Adotamos um tempo de cálculo de 300 s para poder contemplar todos os momentos importantes da evolução temporal do sistema acoplado.

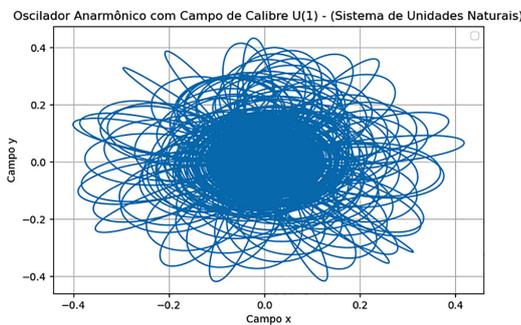


Figura 5: Gráfico da trajetória dos campos/partículas $x(t)$, $y(t)$, gerado via método Runge-Kutta 4 com parâmetros aleatórios $m = 0.01$, $g = 0.01$, $k = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\lambda = 1.0$ e condições iniciais $(x_0, y_0, A_0) = (0.1, 0.1, 0.0)$, $(v_{x0}, v_{y0}, v_{A0}) = (1.0, -1.0, 0.5)$. Aqui também foi adotado 300 s de evolução temporal e, percebe-se que a região central do gráfico fica mais densa, o que comprova o colapso da partícula na origem. Se fizermos em um tempo menor do que 250 s esse fato não é necessariamente visualizado (ver Figura 4).

Testando as soluções das equações acopladas (9) para um problema de valor inicial temos os gráficos das figuras (4) e (5)⁴.

Obtemos gráficos suaves, tendo o campo de calibre como um “mediador” dinâmico necessário para que haja

⁴ O gráfico do campo de calibre $A(t)$ parece uma reta, porém localmente possui algumas pequenas não linearidades e, para mostrar isso, fizemos o gráfico da derivada primeira no tempo $\dot{A}(t)$ ou $v_A(t)$, que não é nulo e nem uma reta constante. Pode-se fazer também o gráfico da derivada segunda para comprovar que a terceira equação de (9) não é uma constante no lado direito, ou simplesmente olhando para o perfil da curva de $v_A(t)$.

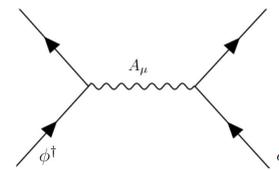


Figura 6: Gráfico de Feynmann que descreve a interação entre dois campos escalares complexos e o campo de calibre eletromagnético, representado pela partícula fóton.

soluções finitas. Percebe-se também que os dois gráficos de posição são oscilatórios, mas não observamos o mesmo comportamento para A , que será uma reta se $g \rightarrow 0$.

A proposta de inserir dinâmica ao campo de calibre $A(t)$, como fizemos em um problema mecânico e clássico do oscilador anarmônico, também é bem conhecida na eletrodinâmica escalar [13], descrita por campos escalares complexos ϕ e ϕ^\dagger , interagindo com o campo eletromagnético⁵, descrito a partir do quadri-potencial eletromagnético A_μ , que possuem como ilustração o gráfico de Feynmann em nível de árvore (“tree-level”) na figura (6).

Para fazermos uma comparação direta, e em trabalhos futuros, quantizarmos o problema do oscilador anarmônico com um campo de calibre, precisamos discutir melhor a questão da invariância da lagrangiana, o que nos faz remeter a uma técnica muito usada em teorias de dimensões extras, as chamadas reduções dimensionais, que abordaremos na próxima seção.

4. Redução Dimensional Tipo Scherk da Teoria de Calibre e sua Relação com a Mecânica

Nosso principal objetivo nesta seção é, partir de uma teoria de calibre da eletrodinâmica escalar em $(1 + 1)$ -dimensões⁶, realizar uma redução dimensional para uma dimensão temporal e mostrar a necessidade de se introduzir um termo cinético para o campo de calibre, como fizemos na teoria descrita pela lagrangiana (8) nas unidades naturais⁷. Seja então a lagrangiana invariante de calibre,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \tag{10}$$

onde derivada covariante é dada por,

$$D^\mu\phi = (\partial^\mu + igA^\mu)\phi \quad \text{e} \quad (D^\mu\phi)^\dagger = (\partial^\mu - igA^\mu)\phi^\dagger. \tag{11}$$

⁵ Na próxima Seção, falaremos mais sobre tal teoria.

⁶ Refere-se ao espaço de Minkowski $M^{1,1}$ com uma dimensão temporal e uma espacial com métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ de assinatura $(+, -)$, que seria um subespaço do espaço de $(1+3)$ com métrica de assinatura $(+, -, -, -)$. Aqui, temos que $\mathbf{X} = x^\mu\hat{e}_\mu$, com $\mu = 0, 1$ e a componente $x^\mu = (x^0, x^1) = (ct, x)$.

⁷ A fim de evitarmos confusões entre a mecânica, a mecânica quântica e a teoria de campos, estamos considerando o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$.

e a transformação $U(1)$ local de calibre tem como elemento do grupo $U = e^{i\alpha(x)}$, e suas transformações infinitesimais sobre os campos são $\delta A_\mu = -\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha$, $\delta\phi = i\alpha\phi$ e $\delta\phi^\dagger = -i\alpha\phi$. Esta teoria esconde a dimensionalidade, podendo ser aplicada a qualquer cenário na variedade de Minkowski $(p+q)$ -dimensional.

A redução dimensional de Scherck propõe um método em que uma teoria D -dimensional possa gerar uma teoria d -dimensional, com $D > d$, de tal modo que os campos escalares permanecem inalterados, porém os campos vetoriais em D -dimensões decompõe-se gerando campos vetoriais em d -dimensões e um conjunto de $D-d$ escalares advindos das componentes extras do campo em $D-d$ dimensões. Além deste procedimento o método impõe que todas as derivadas de todos os campos com respeito as $D-d$ coordenadas são nulas.

Então, tomando a teoria uma redução dimensional do tipo Scherk em $(1+1) \rightarrow (1+0)$ [19, 32], ou seja, $A_\mu(t, x) \rightarrow A_\mu(t)$, $\phi(t, x) \rightarrow \phi(t)$, $\phi^\dagger(t, x) \rightarrow \phi^\dagger(t)$, faz com que as derivadas espaciais sejam todas nulas.

Antes de escrevermos a densidade lagrangiana reduzida, definiremos $A^\mu = (A^0, A^1) = (V, A)$, sendo $V(t)$ o potencial elétrico e $A(t)$ o potencial magnético. O tensor eletromagnético antissimétrico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, carrega apenas um campo elétrico, dependente do potencial magnético, $F_{00} = 0$ e $F_{01} = E_x = -(\partial_x V + \partial_t A)$ que dá $E_x = -\dot{A}(t)$. Desta forma, os termos da lagrangiana (10) ficam:

(1º Termo):

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = +\frac{1}{2}\dot{A}^2. \quad (12)$$

onde $\partial_x V = \partial_x A = 0$.

(2º Termo):

$$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = [(\partial_t\phi^\dagger - igV\phi^\dagger)(\partial_t\phi + igV\phi) + (igA\phi^\dagger)(igA\phi)], \quad (13)$$

onde $\partial_x\phi = \partial_x\phi^\dagger = 0$. Portanto a densidade lagrangiana assume a forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{A}^2 + (\partial_t\phi^\dagger - igV\phi^\dagger)(\partial_t\phi + igV\phi) - g^2A^2\phi^\dagger\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (14)$$

Diante da expressão acima, vemos que os campos $\phi(t)$, $\phi^\dagger(t)$ e o potencial de calibre magnético $A(t)$ possuem dinâmica, e o potencial de calibre elétrico $V(t)$ não.

A densidade lagrangiana da teoria de calibre da eletrodinâmica escalar reduzida torna-se (14), e é semelhante matematicamente a lagrangiana mecânica (8), em que colocamos o termo cinético de $A(t)$ à “mão”, de modo que vemos que esta justificativa é plausível.

Quando obtemos as equações de movimento para os campos $\phi(t)$, $\phi^\dagger(t)$, $A(t)$ e $V(t)$, o campo $V(t)$ apresenta um caráter não dinâmico. Sendo um campo auxiliar, pode

ser eliminado através das equações de campo, o que o fixa em termos dos demais campos, porém isto nos conduz ao mesmo problema encontrado na terceira equação de (6) e (7). Este problema pode ser contornado com uma escolha de calibre que o potencial eletromagnético carrega, $\delta A_\mu = -\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha$, onde após a redução dimensional, $\delta A(t) = -\frac{1}{g}\partial_x\alpha(t) = 0$ e $\delta V(t) = -\frac{1}{g}\partial_t\alpha(t)$, onde escolheremos $V'(t) = V(t) - \frac{1}{g}\partial_t\alpha(t) = 0$, de modo que este potencial seja nulo em todos os pontos. Em teoria de campos a escolha de um potencial nulo corresponde a fixação do calibre de Coulomb. Isto permite escrevermos o termo $(\partial_t\phi^\dagger + \text{zero})(\partial_t\phi + \text{zero}) = \dot{\phi}^\dagger\dot{\phi}$, e a densidade lagrangiana (14) assume a forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{A}^2 + \dot{\phi}^\dagger\dot{\phi} - g^2A^2\phi^\dagger\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (15)$$

que nos permite justificar a existência do termo cinético de $A(t)$ na equação (8), a fim de conseguirmos descrever a interação entre os campos escalares, vindo de uma teoria invariante de calibre, igualmente obtida no problema mecânico. Portanto, as equações para o problema anarmônico para uma partícula de massa m , constante elástica k , parâmetro anarmônico λ e constante β , tomando como base a lagrangiana vinda da redução dimensional (15) e com a fixação de calibre $V'(t) = 0$, tal que $\phi(t) \rightarrow z(t)$,

$$L = \beta\dot{A}^2 + m\dot{z}^\dagger\dot{z} - g^2mA^2z^\dagger z - kz^\dagger z - \lambda(z^\dagger z)^2. \quad (16)$$

sendo que $z^\dagger = \bar{z}$. Facilmente podemos obter as equações de movimento, que são diferentes em alguns termos de (9)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g^2A^2x - \frac{k}{m}x - \frac{\lambda}{m}x(x^2 + y^2), \\ \ddot{y} &= -g^2A^2y - \frac{k}{m}y - \frac{\lambda}{m}y(x^2 + y^2), \\ \ddot{A} &= \frac{-mg^2}{2\beta}(x^2 + y^2)A. \end{aligned} \quad (17)$$

A redução dimensional mostra que o grau de liberdade descrito pelo campo A , tem um acoplamento com os campos de matéria com caráter harmônico alterando, de forma efetiva, a constante k , sendo esta agora dependente do tempo, $k_{ef}(t) = k + mg^2A(t)^2$.

O gráfico do sistema acoplado é o descrito na figura (7) e o que descreve as “posições” na figura (8).

5. Considerações Finais

Neste trabalho, o esforço maior foi apresentar, de uma forma simples, a importância de simetria de calibre, apresentada em disciplinas de final de Graduação e início de Pós-Graduação em Física, como Eletromagnetismo, Mecânica Quântica Não-Relativística, Mecânica Quântica Relativística, Teoria Quântica de Campos e Física de Partículas, quando se adotam os formalismos lagrangiana e hamiltoniana para o estudo das equações

Oscilador Anarmônico com Campo de Calibre U(1) - (Sistema de Unidades Naturais)

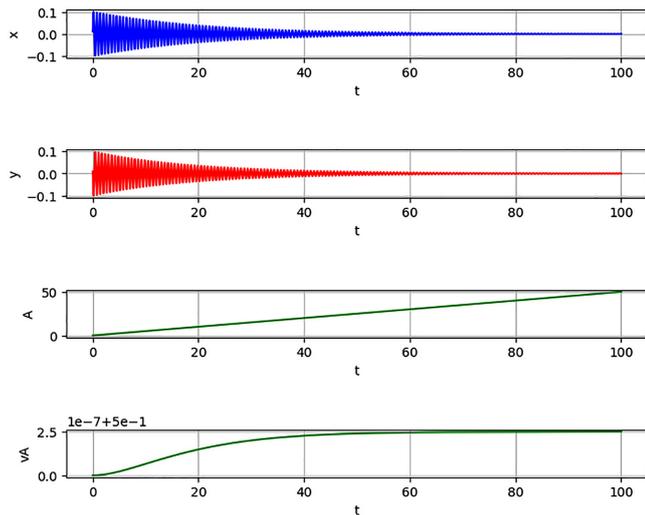


Figura 7: Gráfico dos campos $x(t)$, $y(t)$, $A(t)$ e $\dot{A}(t) = v_A(t)$, gerados via método Runge-Kutta 4 com parâmetros aleatórios $m = 0.01$, $g = 0.01$, $k = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\lambda = 1.0$ e condições iniciais $(x_0, y_0, A_0) = (0.1, 0.1, 0.0)$, $(v_{x0}, v_{y0}, v_{A0}) = (1.0, -1.0, 0.5)$. Adotamos um tempo de cálculo de 100 s para poder contemplar todos os momentos importantes da evolução temporal do sistema acoplado.

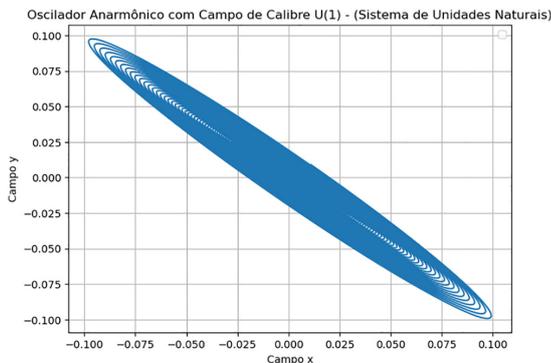


Figura 8: Gráfico da trajetória dos campos/partículas $x(t)$, $y(t)$, gerado via método Runge-Kutta 4 com parâmetros aleatórios $m = 0.01$, $g = 0.01$, $k = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\lambda = 1.0$ e condições iniciais $(x_0, y_0, A_0) = (0.1, 0.1, 0.0)$, $(v_{x0}, v_{y0}, v_{A0}) = (1.0, -1.0, 0.5)$. Adotamos um tempo de cálculo de 100 s e percebemos aqui também o colapso da partícula na origem (ver Figura 7).

de movimento, leis de conservação e cálculo de processos físicos. Os sistemas microscópicos considerados, em vários casos, apresentam simetrias de calibre escondidas, assunto de central importância no estudo dos campos clássicos e quânticos e das partículas elementares. As simetrias de calibre coordenam a construção da Teoria Eletrofraca, da Cromodinâmica Quântica e, consequentemente, do Modelo-Padrão da Física de Partículas. São também centrais na construção dos modelos grand-unificados. É oportuno mencionar que se pode abordar

a Relatividade Geral como uma teoria de calibre, como apresentados nos trabalhos independentes de Utiyama e Kibble [33, 34]. Estudantes em final de Graduação em projeto de Iniciação Científica nas áreas mencionadas acima, têm o ferramental matemático e computacional para seguir na leitura deste trabalho. Os cálculos são relativamente simples e envolvem conceitos de disciplinas como Geometria Analítica e Álgebra Linear, Cálculo Vetorial, cálculo com variáveis complexas e Mecânica Clássica em suas formulações lagrangiana e cálculo com variáveis complexas. Nestas disciplinas, exploramos, sem o devido aprofundamento, a Teoria de Grupos, o Eletromagnetismo e Relatividade Restrita, e por fim, os métodos numéricos, mais precisamente o método de Runge-Kutta 4, onde foi necessária uma simulação computacional para descrever o problema não-linear das equações diferenciais de segunda ordem. Porém, o cerne do problema, como já abordamos ao longo do texto, é o fato de uma teoria de calibre para a interação eletromagnética, necessitar de um termo dinâmico na lagrangiana para o campo eletromagnético e para o campo escalar real. Isto foi evidenciado no momento em que precisamos resolver as equações diferenciais para os casos abordados, pois a solução não foi possível sem a introdução do termo dinâmico do campo de calibre $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, assim, fica evidente que, de acordo com os gráficos de Feynman descrito em interações entre partículas elementares e não elementares, ver figura (6), os campos, ou melhor, as partículas mediadoras que levam a informação entre a matéria vigente são os campos de calibre, como o campo (quadri-potencial) eletromagnético A^μ , representado como analogia na mecânica clássica de forma simples pelo $A(t)$ na equação (8), que descreve a simetria $U(1)$. Concluímos que este é um excelente exercício de ensino, em que abordamos diferentes áreas da física, matemática e programação, enriquecendo os conceitos e preparando os estudantes para a compreensão das teorias de calibre, para que sirva de base para pesquisas em múltiplos campos da Física contemporânea.

Adotamos aqui a premissa de que é sempre instrutivo, mas nem sempre imediato, transpor para o nível dos cursos oferecidos nos anos da Graduação assuntos avançados em várias áreas da Física, que são inclusive objeto de pesquisa recente. É um esforço não-trivial, mas muito instrutivo e renovador para os professores, ao mesmo tempo que se mostra extremamente formativo e motivador para os nossos jovens estudantes.

Referências

- [1] H. Weyl, Annalen Der Physik, **364**, 101 (1919).
- [2] H. Weyl, Zeitschrift für Physik, **56**, 330 (1929).
- [3] V. Fock, Zeit. Physik **39**, 226 (1927).
- [4] F. London, Zeit. Physik **42**, 375 (1927).
- [5] L. O’Raifeartaigh, *Group structure of gauge theories* (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

- [6] G. Scharf, *Quantum gauge theories: A true ghost story* (Wiley-VCH, Weinheim, 2001).
- [7] C.N. Yang e R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [8] A. Salam, Phys. Rev. **127**, 331 (1962).
- [9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [10] J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg. Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [11] J.C. Ward e A. Salam, Nuovo Cimento **11**, 568 (1959).
- [12] S.L. Glashow e S. Weinberg. Phys. Rev. D **15**, 1958 (1977).
- [13] L.H. Ryder, *Quantum field theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [14] A. Das, *Lectures on quantum field theory* (World Scientific, London, 2020).
- [15] J.M.F. Bassalo, *Eletrodinâmica clássica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007).
- [16] J.M.F. Bassalo, *Eletrodinâmica Quântica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006).
- [17] J. Barcelos Neto, *Teoria de Campos e a Natureza: parte quântica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2017).
- [18] J. Barcelos Neto, *Teoria eletromagnética: parte clássica* (Livraria da Física, São Paulo, 2015).
- [19] J. Scherk e J.H. Schwarz, Phys. Lett. B, **57**, 463 (1975).
- [20] J.B. Neto, *Matemática para físicos com aplicações* (Livraria da Física, São Paulo, 2010), v. 1.
- [21] J.M.F. Bassalo e M.S.D. Cattani, *Teoria de grupos* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2008).
- [22] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, *Base Nacional Comum Curricular*, disponível em: <http://basenacional.comum.mec.gov.br/>.
- [23] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de física* (LTC, Rio de Janeiro, 2009), v. 2, 8 ed.
- [24] H.M. Nussenzveig, *Curso de física básica* (E. Blücher, São Paulo, 2002), v. 2.
- [25] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros* (LTC, Rio de Janeiro, 2006), v. 1, 5 ed.
- [26] J.B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems* (Academic Press, New York, 2013).
- [27] J. Barcelos Neto, *Mecânica Newtoniana, Lgrangiana e Hamiltoniana* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [28] G.M. Mahmoud e T. Bountis, International Journal of Bifurcation and Chaos **14**, 3821 (2004).
- [29] J.H. He, Results in Physics **15**, 102546 (2019).
- [30] J.H. He, Physics Letters A **374**, 2312 (2010).
- [31] K. Anagnostopoulos, *Computational Physics*, disponível em <http://www.physics.ntua.gr/~konstant/ComputationalPhysics/index.html>.
- [32] H. Belich Junior, M.M. Ferreira Junior, J.A. Helayël-Neto e M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **67**, 125011 (2003).
- [33] R. Utiyama, Physical Review **101**, 1597 (1956).
- [34] T.W.B. Kibble, Journal of mathematical physics **2**, 212 (1961).