

Princípios fundamentais que regem o movimento do misterioso duplo cone

Fundamental principles governing the movement of the mysterious double cone

K. Luz-Burgoa^{*1}, José A.C. Nogales¹

¹Universidade Federal de Lavras, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Ambiental, Lavras, MG, Brasil.

Recebido em 10 de setembro de 2023. Revisado em 26 de fevereiro de 2024. Aceito em 28 de fevereiro de 2024.

O movimento de um duplo cone ao longo de trilhos dispostos em formato de V inclinados é famoso em ambientes educacionais formais e informais. Quando a inclinação dos trilhos é menor do que uma determinada relação geométrica entre o duplo cone e a abertura dos trilhos, o duplo cone aparentemente é capaz de superar a força da gravidade e rolar de maneira “espontânea” para cima dos trilhos inclinados, provocando debates intensos entre o conhecimento científico e o senso comum. No entanto, os livros de física básica não abordam esse fenômeno, e os artigos científicos encapsulam o mistério por trás do movimento. Este trabalho desenvolve a dinâmica do duplo cone aplicando as leis de Newton para corpos rígidos, seguindo a explicação e recursos dos livros de física básica. Os resultados revelam que a interpretação física da condição geométrica envolve o ângulo entre a força normal com a vertical quando os trilhos não estão inclinados. Esse ângulo implícito na geometria do duplo cone sobre os trilhos organiza de maneira surpreendente as equações. Como resultado, o estudo aprofunda na compreensão vetorial do fenômeno e confirma os teoremas do trabalho-energia cinética e dos eixos paralelos no contexto do movimento do duplo cone.

Palavras-chave: Dinâmica do duplo cone, ensino da física, metodologia científica, experimentos de baixo custo, educação científica.

The movement of a double cone along inclined tracks arranged in a V shape is famous in both formal and informal educational environments. When the inclination of the tracks is less than a certain geometric relationship between the double cone and the opening of the tracks, the double cone appears to defy gravity and roll “spontaneously” up the inclined tracks, sparking intense debates between scientific knowledge and common sense. However, basic physics textbooks do not address this phenomenon, and scientific articles encapsulate the mystery behind the motion. This work develops the dynamics of the double cone by applying Newton’s laws to rigid bodies, following the explanations and resources found in basic physics textbooks. The results reveal that the physical interpretation of the geometric condition involves the angle between the normal force and the vertical when the tracks are not inclined. This angle, implicit in the geometry of the double cone on the tracks, surprisingly organizes the equations. As a result, the study delves deeper into the vectorial understanding of the phenomenon and confirms the theorems of work-kinetic energy and parallel axes in the context of double cone motion.

Keywords: Dynamics of the double cone, Physics education, Scientific methodology, Low-cost experiments, Scientific education.

1. Introdução

O experimento do duplo cone é conhecido há séculos [1] e devido ao seu comportamento peculiar, atraiu a curiosidade de crianças e adultos. Chegou a ser comercializado como brinquedo [2] e atualmente faz parte do “cardápio científico” de alguns youtubers [3]. Algumas escolas [4] instalaram o duplo cone em dois trilhos em formato de V conectados e inclinados nos seus parquinhos de diversão, juntamente com planos inclinados que funcionam como escorregadores. Essa abordagem promove uma reflexão sobre o movimento dos corpos das crianças nos escorregadores, por exemplo, e o movimento de corpos

geométricos construídos cientificamente, possibilitando a análise do papel da física nas práticas educativas e na cultura infantil [5].

A descrição físico-conceitual do experimento do duplo cone, que relaciona o centro de massa do duplo cone e o potencial gravitacional, tem sido utilizada como ferramenta de ensino universitário em física e astronomia, como exemplificado por [6]. A apresentação do duplo cone nos trilhos em formato de V inclinados, como um experimento que contraria o senso comum e surpreende os espectadores [7], é divulgada pelo projeto de divulgação científica “A Magia da Física e do Universo” [8]. Esse projeto, coordenado pela autora e pelo autor deste trabalho, desenvolve-se em parceria com estudantes da graduação, pós-graduação, bem como com

*Endereço de correspondência: karenluz@ufla.br

alunos de escolas públicas e privadas em Lavras e na região. Com o apoio da Pró-Reitoria de Extensão, Museu de História Natural, Departamento de Física e Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Ambiental da UFLA [9, 10], o projeto promove reflexões sobre a importância de despertar a curiosidade e compreender a estrutura científica da física.

Na literatura sobre o duplo cone, é possível encontrar trabalhos físico-matemáticos que visam levar o duplo cone à sala de aula. Por exemplo, no trabalho [11], foi construída uma proposta sem cálculo diferencial e com o intuito de apresentá-la aos estudantes das escolas. A partir do comportamento da energia potencial, foi feita uma análise do problema de uma esfera em um trilho em V inclinado, que também tem o mesmo comportamento dinâmico do duplo cone. No trabalho [12], apresentam o duplo cone dentro de uma coleção de experimentos populares usados no ensino da física e oferecem uma explicação física fundamentada na conservação de energia. O trabalho [13] utiliza o princípio da conservação de energia mecânica para estudar o movimento de um duplo cone sobre uma pista em V para diferentes condições iniciais e configurações geométricas.

Outros estudos que se concentraram em propostas experimentais do duplo cone em sala de aula incluem, por exemplo, o trabalho [14], que apresenta formas alternativas e muito simples de confeccionar o duplo cone. Este trabalho demonstra que, mesmo mantendo o centro de massa, é possível fazê-lo descer a rampa e utilizá-lo como um ioiô e um estetoscópio. Já o trabalho [15] apresenta propostas experimentais com variações na forma do trilho em V inclinado e do duplo cone, com o intuito de discutir os diferentes comportamentos dinâmicos desse sistema.

Na perspectiva de uma explicação que destaca uma restrição geométrica, em vez de um paradoxo mecânico, do duplo cone no trilho em V , destacamos o trabalho [16]. Este estudo utiliza relações geométricas presentes no trilho em V e no duplo cone para explicar o comportamento peculiar do duplo cone. Em contraste, nos outros trabalhos mencionados anteriormente, essa condição é derivada da energia do sistema. No entanto, nos experimentos realizados em [16], a força de atrito é mencionada para explicar o equilíbrio e a condição de rolamento puro entre o duplo cone e o trilho, sem explorar profundamente as consequências que ela tem para a explicação do movimento inesperado do duplo cone. Neste trabalho, serão aprofundadas as consequências da força de atrito no equilíbrio.

Nas aplicações do duplo cone na Engenharia, destacamos o trabalho [17], que analisa as propriedades cinemáticas desse fenômeno em um trilho em V inclinado. Utilizando o processamento de dados obtidos por câmera lenta, os experimentos foram conduzidos com cones duplos de aço carbono que rolam sobre trilhos de alumínio, controlados pelos ângulos de abertura desses

trilhos. Este estudo demonstra experimentalmente como esse sistema físico, visto sob a perspectiva de um motor, é capaz de converter a energia potencial gravitacional em energia cinética, tanto translacional quanto rotacional, apresentando um período variável.

Como este trabalho trata dos princípios fundamentais que regem o movimento do duplo cone, citamos dois trabalhos que têm um aprofundamento sobre a explicação física [18] e [19]. O trabalho [18] apresenta um enriquecimento dos detalhes geométricos e físicos do duplo cone no trilho em V inclinado e está direcionado a instrutores que lecionam física básica. A explicação para o comportamento físico fundamenta-se na afirmação de que os vetores velocidade do centro de massa e a velocidade de rotação no ponto de contato são considerados iguais em magnitude, direção e sentidos opostos. Neste trabalho, entraremos em mais detalhes sobre essa afirmativa.

No trabalho publicado em 2011 [19], os autores abordam de forma ampla a dinâmica do movimento do duplo cone. Eles começam com a análise energética do sistema, seguida pela aplicação do formalismo lagrangiano e hamiltoniano, resultando nas equações de movimento. Essas equações, sendo diferenciais não lineares de primeira ordem, são resolvidas numericamente sob diferentes condições iniciais. Na análise dos resultados, os autores demonstram detalhadamente que as variáveis cinemáticas da posição, velocidade e aceleração, tanto rotacionais quanto translacionais, exibem comportamento não linear. Os autores apontam que a formulação lagrangiana oferece vantagens claras em relação a uma abordagem newtoniana e que os resultados obtidos podem lançar luz sobre a natureza das forças e torques variáveis ao longo do tempo. No entanto, a descrição dinâmica completa do movimento do duplo cone não avançou.

Durante todo o tempo que estudamos o movimento do duplo cone, compreendemos que a descrição vectorial das grandezas físicas envolvidas no sistema permitem um formalismo matemático mais rigoroso para a descrição física do sistema. A representação vectorial da perpendicularidade da força normal que atua no duplo cone, bem como no trilho, foi fundamental para interpretar e simplificar a matemática envolvida na descrição cinemática das variáveis. Por essa razão, o trabalho será apresentado inicialmente com a descrição física do sistema na seção 2. Na seção 3, aplicaremos a lei de conservação da energia ao movimento do duplo cone, e seus resultados serão apresentados em equações que serão interpretadas à luz dos resultados da seção 4, que aborda as leis de Newton para corpos rígidos. Na seção 5, por meio do formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano, derivaremos as equações de movimento e usaremos essas equações para verificar o módulo da aceleração do centro de massa, deduzido na seção 4. Por fim, realizaremos a análise e apresentaremos as conclusões do trabalho.

2. Descrição Física do Sistema

O sistema físico é composto por um duplo cone sobre trilhos em formato de V a um ângulo θ em relação a uma mesa horizontal, conforme mostrado na fotografia que esta na Figura 1. É possível observar que a abertura entre os trilhos é caracterizada pelo ângulo β , e cada cone possui uma largura L e um raio R , que determinam seu ângulo característico α . O ponto de cor laranja representa o centro de massa do duplo cone cm e os pontos de contato cp entre o duplo cone e os trilhos são representados pelos pontos azuis. A descrição do sistema é feita no sistema de coordenadas XYZ mostrado em vermelho sobre a mesa na Figura 1, com a origem das coordenadas no vértice formado pelos trilhos. No quadro negro, o vetor posição do centro de massa é denotado pelo vetor \vec{r}_{cm} , cor laranja, enquanto o vetor posição do ponto de contato \vec{r}_{cp} , é identificado pelo vetor \vec{q} e \vec{r} , seta azul e amarela, respectivamente. A cada momento do movimento, as coordenadas do centro de massa, os pontos de contacto e às características geométricas do duplo cone e dos trilhos estão relacionados pelas seguintes equações:

$$x = q \cos \theta - r \sin \theta, \tag{1}$$

$$y = q \sin \theta + r \cos \theta, \tag{2}$$

$$z = q \tan \beta, \tag{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{R}{L} = \frac{R - r}{z}, \tag{4}$$

onde r é a distancia radial entre o eixo do centro de massa e o eixo de rotação do duplo cone, como mostrado

na Figura 1. O parâmetro q é a distância do ponto de contato em relação à origem no plano XY . Os vectores posição e velocidade, do centro de massa e do ponto de contato, são:

$$\vec{r}_{cm} = \vec{q} - \vec{r}, \tag{5}$$

$$\vec{r}_{cp} = \vec{q} - z\hat{k}, \tag{6}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \dot{\vec{r}}_{cm} = \dot{\vec{q}} - \dot{\vec{r}}, \tag{7}$$

$$\vec{v}_{cp} = \frac{d\vec{r}_{cp}}{dt} = \dot{\vec{r}}_{cp} = \dot{\vec{q}} - \dot{z}\hat{k}. \tag{8}$$

Pela definição de corpo rígido temos que;

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{9}$$

$$\vec{v}_t = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ r \sin \theta & -r \cos \theta & 0 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

$$\vec{v}_t = -r \omega (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}), \tag{11}$$

onde ω é o modulo da velocidade angular do duplo cone. Como pode ser observado no papel verde da Figura 1 a condição para rotação pura no movimento do duplo cone é de maneira a soma das seguintes velocidades sejam anuladas no ponto de contato,

$$\vec{v}_t + \dot{\vec{q}} = \vec{0}. \tag{12}$$

Com todos os parâmetros apresentados e conectados é possível conseguir uma simplificação no numero de variáveis. A eq. (4) permite a conexão de z a r e a eq. (3)

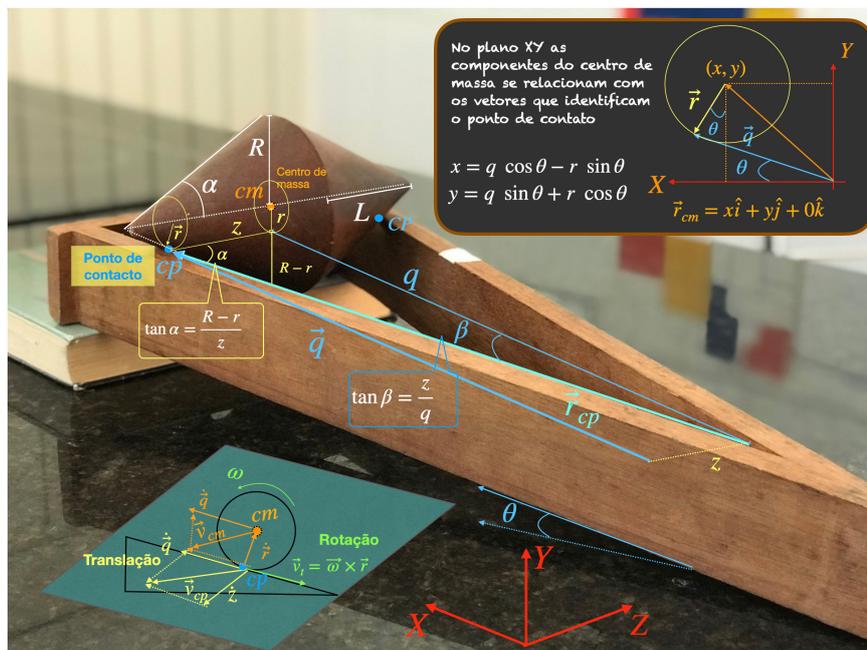


Figura 1: Fotografia de um duplo cone sobre trilhos em formato V inclinado e seus parâmetros. No quadro negro, estão representadas as relações entre o centro de massa do duplo cone cm e o ponto de contacto cp do duplo cone com o trilho. Sobre a mesa, no papel verde, encontra-se a descrição vetorial das velocidades e a condição de rotação pura.

conecta z a q o que leva a,

$$q = \frac{R - r}{\tan \alpha \tan \beta}. \tag{13}$$

Com esta relação entre q e r as equações (1) a (3) podem ser reescritas em função somente da variável r e estas equações são:

$$x = (R - r) \frac{\cos \theta}{\eta} - r \sin \theta, \tag{14}$$

$$y = (R - r) \frac{\sin \theta}{\eta} + r \cos \theta, \tag{15}$$

$$z = (R - r) \frac{\tan \beta}{\eta}, \tag{16}$$

onde

$$\eta = \tan \alpha \tan \beta, \tag{17}$$

é a famosa relação geométrica entre o duplo cone sobre os trilhos inclinados em formato de V que será identificada mais para frente. Sabendo que $\vec{q} = q (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$ e as eqs. (11) e (12) temos que,

$$\dot{q} = r \omega. \tag{18}$$

Com esta equação e derivando a eq. (13) podemos reescrever ω em função somente da variável r , novamente,

$$\omega = -\frac{\dot{r}}{r \eta}. \tag{19}$$

Assim também os vectores posição e velocidade ficam todos em função a uma única variável r ,

$$\vec{r}_{cm} = \left[\frac{(R - r) \cos \theta}{\eta} - r \sin \theta \right] \hat{i} + \left[\frac{(R - r) \sin \theta}{\eta} + r \cos \theta \right] \hat{j} \tag{20}$$

$$\vec{r}_{cp} = \frac{(R - r)}{\eta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - z \hat{k}, \tag{21}$$

$$\vec{v}_{cm} = -\dot{r} \left(\frac{\cos \theta}{\eta} + \sin \theta \right) \hat{i} - \dot{r} \left(\frac{\sin \theta}{\eta} - \cos \theta \right) \hat{j} \tag{22}$$

$$\vec{v}_{cp} = \frac{-\dot{r}}{\eta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - \dot{z} \hat{k}. \tag{23}$$

3. Lei de Conservação da Energia Mecânica

Na física, a energia potencial de quaisquer corpo rígido, como o duplo cone, presente num campo gravitacional de aceleração g pode ser escrito como:

$$V = Mg y, \tag{24}$$

onde M é a massa do duplo cone e y a posição vertical do centro de massa. Com a eq. (15) é possível expressar o potencial em função da variável r , que resulta em

$$V = V_0 \left[\frac{\tan \theta}{\eta} + \frac{r}{R} \left(1 - \frac{\tan \theta}{\eta} \right) \right], \tag{25}$$

Energia potencial gravitacional versus condição inicial r e geometria θ , α e β

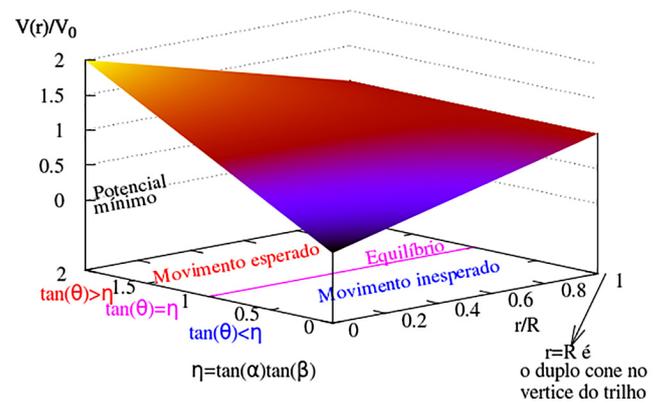


Figura 2: Gráfico do potencial V/V_0 em função de r/R e $\tan \theta/\eta$.

onde $V_0 = Mg R \cos \theta$. Como pode ser visto no gráfico do potencial, na Figura 2, o movimento inesperado do duplo cone aconteceu quando $\tan \theta/\eta < 1$ porque $\forall \frac{r}{R} \leq 1$ o potencial é mínimo em $r = 0$, isto é, para o lado oposto ao vértice dos trilhos, veja Figura 1. Quando $\tan \theta/\eta > 1$ este movimento inesperado se perde porque para quaisquer condição inicial r entre 0 e R o duplo cone irá para $r = R$, isto é, para o lado do vértice dos trilhos. A energia cinética do duplo cone pode ser escrita como a soma da energia cinética translacional do centro de massa mais a energia rotacional pura do centro de massa, em termos de equação é,

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2, \tag{26}$$

onde I_{cm} é o momento de inércia ao respeito do eixo vertical principal, na direção do comprimento L do duplo cone esquematizado na Figura 1. Utilizando a definição do momento de inércia e integrais simples é possível de demonstrar que $I_{cm} = \frac{3}{5} MR^2$. Da equação 22 encontra-se que,

$$v_{cm}^2 = \left(\frac{1 + \eta^2}{\eta^2} \right) \dot{r}^2. \tag{27}$$

Substituindo este resultado na equação da energia cinética, eq. (26), é possível expressar-la como:

$$K = \frac{1}{2} M \left(\frac{1 + \eta^2}{\eta^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2. \tag{28}$$

Usando a equação 19 no primeiro termo da eq.28 a energia cinética K , do duplo cone, em geral pode ser expressa em termos do momento de inércia $I(r)$, em relação ao eixo de rotação formado pelos pontos de contato, assim:

$$K = \frac{1}{2} I(r) \omega^2, \tag{29}$$

$$I(r) = I_{cm} + M (1 + \eta^2) r^2. \tag{30}$$

Assim a lei de conservação da energia para o duplo cone sobre os trilhos em formato V inclinado é,

$$\Delta K = -V_0 \frac{\Delta r}{R} \left(1 - \frac{\tan \theta}{\eta} \right). \quad (31)$$

Observe que o potencial se anula quando $\tan \theta = \eta$ e isto leva a,

$$I(r) \omega^2 = \text{constante}. \quad (32)$$

O que significa que o momento angular não se conserva e será visto mais para frente que este resultado condiz com a existência de uma força no caso de um potencial gravitacional nulo.

3.1. Solução analítica num caso especial

Do resultado obtido na eq. (32) pode-se obter a solução para $r(t)$, no caso de $\tan \theta = \eta$, que é dada pela integral,

$$\int_{r_i}^{r(t)} \sqrt{I(r)} \frac{dr}{r} = \eta \sqrt{I(r_i)} \omega_i (t - t_i), \quad (33)$$

onde r_i e ω_i são as condições iniciais para o movimento do duplo cone. A solução da integral (33) é:

$$r(t) = \frac{G(r_i) r_i}{G(r)} e^{\pm \omega_i \eta \sqrt{I(r_i)/I_{cm}} (t - t_i)}, \quad (34)$$

onde

$$G(r) = \frac{e^{\sqrt{I(r)/I_{cm}}}}{\sqrt{I(r)/I_{cm}} + 1} \quad (35)$$

4. Forças, Torques e Leis de Newton para o Duplo Cone

Para entender como age a força normal entre o duplo cone sobre os trilhos em formato V inclinado, primeiramente será feito um análises da normal \mathbf{N} a um ângulo $\theta = 0$, veja a sequencia de A a D na Fig. (3). A normal \mathbf{N} na perspectiva do plano ZX , vista do trilho, e do plano YZ , vista do cone, apresenta uma perpendicularidade no ponto de contato, veja esquemas na parte superior da Fig. (3). Veja que quando o trilho V não esta inclinado, $\theta = 0$, a normal esta desviada um ângulo θ_0 , ao respeito da vertical, no plano YX , veja esquema inferior esquerdo na Fig. (3).

Esta inclinação θ_0 da normal surge da geometria do duplo cone, representada pelo ângulo α , e da característica geométrica dos trilhos V, representado pelo ângulo β , por médio da relação,

$$\tan \theta_0 = \eta = \tan \alpha \tan \beta. \quad (36)$$

Portanto, a condição geométrica para o movimento inesperado do duplo cone, $\tan \theta < \tan \alpha \tan \beta$, tem um significado físico no sentido de que a inclinação dos trilhos possui um ângulo máximo, θ_0 , determinado pela relação implícita entre o duplo cone sobre os trilhos não inclinados. Dessa forma, quando os trilhos são inclinados em um ângulo θ , esse ângulo não pode exceder θ_0 para que o movimento do duplo cone possa aparentemente superar a força da gravidade e rolar de maneira “espontânea” para cima dos trilhos inclinados, ou seja $\theta < \theta_0$.

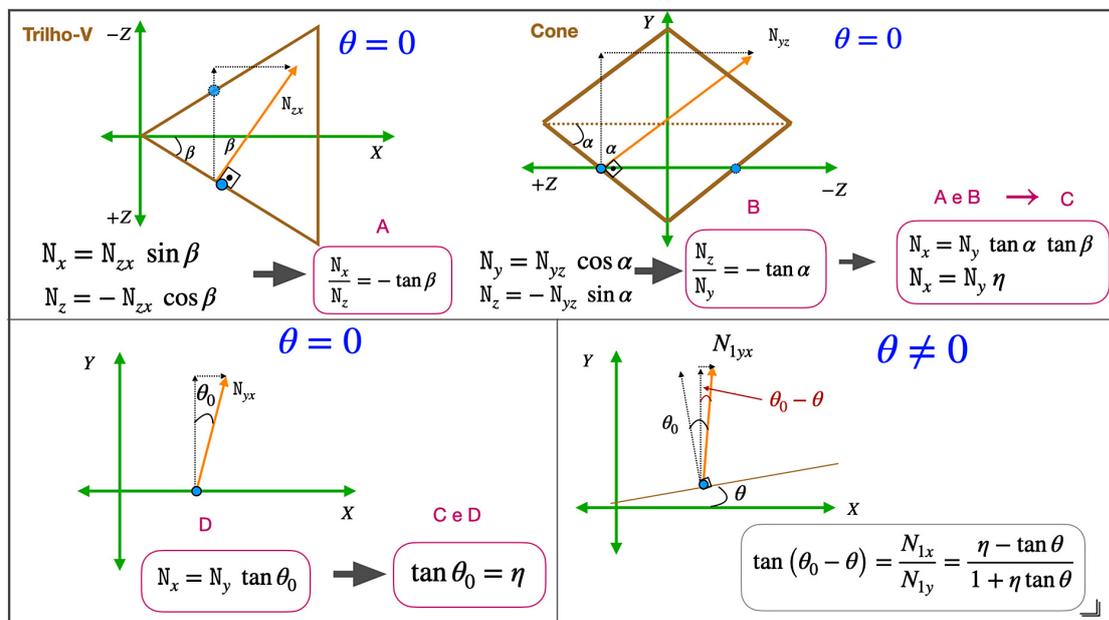


Figura 3: Esquema das componentes do vetor da força normal \mathbf{N} a $\theta = 0$. Quando o ângulo $\theta \neq 0$ as componentes da normal \vec{N}_1 , num dos pontos de contato, inclina um ângulo $\theta_0 - \theta$ ao respeito da vertical.

Quando o trilho V é inclinado um ângulo $\theta \neq 0$, veja esquema inferior direito da Fig. (3), pode-se ver que a componente em XY da normal num dos pontos de contato N_{1yx} esta inclinada um ângulo $\theta_0 - \theta$ da vertical. Ou seja, usando a subtração da tangente de dois ângulos e o fato de $\eta = \tan \theta_0$, podemos ver que,

$$\frac{N_{1x}}{N_{1y}} = \frac{\eta - \tan \theta}{1 + \eta \tan \theta}. \quad (37)$$

Por outro lado das equações (14) e (15) temos que,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tan \theta - \eta}{1 + \eta \tan \theta}, \quad (38)$$

assim,

$$\frac{N_{1x}}{N_{1y}} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (39)$$

$$N_{1x} \Delta x + N_{1y} \Delta y = 0 \quad (40)$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{\Delta r}_{cm} = 0 \quad (41)$$

Esta relação das componentes vertical e horizontal da normal causam que a normal seja perpendicular ao descolamento do centro de massa, anulando assim o trabalho da normal, que coincide com o teorema trabalho-energia cinética.

$$\Delta K = W = \vec{P} \cdot \vec{\Delta r}_{cm}, \quad (42)$$

$$\vec{P} = -Mg \hat{j}, \quad (43)$$

$$\Delta \vec{r}_{cm} = -\frac{\Delta r}{\eta} \cos \theta \left[(1 + \eta \tan \theta) \hat{i} - (\eta - \tan \theta) \hat{j} \right], \quad (44)$$

$$\Delta K = -Mg \frac{\Delta r}{\eta} \cos \theta (\eta - \tan \theta). \quad (45)$$

Igual ao resultado encontrado pela lei de conservação da energia mecânica, equação (31).

O resultado encontrado na equação (36) ajuda a reescrever e reinterpretar as grandezas escalares e vetoriais escritas anteriormente. Por exemplo, a eq. (30), do momento de inercia do duplo cone num eixo paralelo ao eixo principal, contem $(1 + \eta^2)$ que agora é $(1 + \tan^2 \theta_0) = 1/\cos^2 \theta_0$ e pode ser reescrito como,

$$I(r) = I_{cm} + M \left[\frac{r}{\cos \theta_0} \right]^2, \quad (46)$$

$$I(r) = I_{cm} + M d^2. \quad (47)$$

onde a distancia perpendicular entre os eixos é dada pelo modulo do vetor \vec{d} e não pelo modulo do vetor \vec{r} , veja os vetores amarelo e turquesa na Fig. (4) e tabela 1. Este resultado significa que o teorema dos eixos paralelos também é verificado no movimento do duplo cone.

Por outro lado, quando substitui-se $\eta = \tan \theta_0$ no vector velocidade do centro de massa, tem-se:

$$\vec{v}_{cm} = (\dot{x}, \dot{y}, 0), \quad (48)$$

$$= -\dot{r} \left[\left(\frac{\cos \theta}{\eta} + \sin \theta \right) \hat{i} + \left(\frac{\sin \theta}{\eta} - \cos \theta \right) \hat{j} \right], \quad (49)$$

$$= -\frac{\dot{r}}{\sin \theta_0} \hat{b}, \quad (50)$$

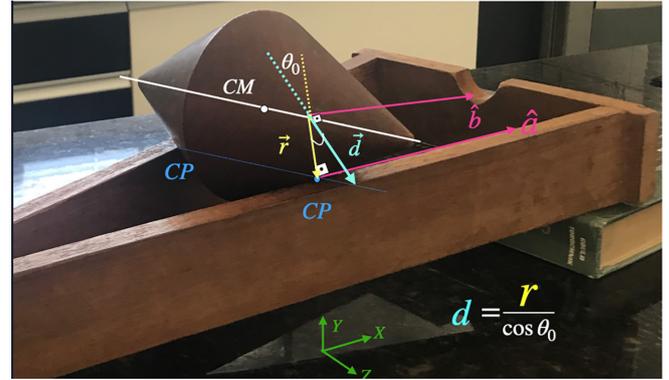


Figura 4: Fotografia do duplo cone com destaque dos eixos paralelos, a perpendicularidade dos vetores \vec{r} e \vec{d} junto aos versores \hat{a} e \hat{b} . Sendo d a distância que separa os eixos paralelos.

onde o vector unitário $\hat{b} = \cos(\theta - \theta_0) \hat{i} + \sin(\theta - \theta_0) \hat{j}$ esta na direção $(\theta - \theta_0)$, ao respeito da horizontal. Este resultado coloca o movimento do centro de massa do duplo cone na direção \hat{b} e quando interpretado graficamente no sistema de coordenadas, na Fig. (4), mostra que o vector \vec{d} é ortogonal a \hat{b} , reforçando assim a perpendicularidade entre os eixos de rotação paralelos e a consequente relação de $d = r/\cos \theta_0$. Observe que para $\theta < \theta_0$ a direção do centro de massa esta abaixo da horizontal indicando que nesse caso o centro de massa do duplo cone desce verticalmente igual ao resultado obtido pela lei de conservação da energia mecânica. Na tabela (1) apresentam-se nas primeiras linhas os vetores posição e suas principais relações, em função dos versores \hat{a} e \hat{b} , e nas próximas linhas estão as relações matemáticas entre as diferentes velocidades e acelerações no caso do movimento do duplo cone sobre os trilhos em formato V inclinados. É importante notar que os vetores das velocidades do centro de massa, \vec{v}_{cm} , e de rotação, \vec{v}_t , possuem direções distintas. Portanto, a afirmação feita em [18] não se aplica a este caso específico.

A seguir, será calculada a soma das forças e a soma dos torques para aplicar as leis de Newton ao duplo cone e, assim, obter a aceleração do mesmo. Devido a simetria física entre as componentes das forças normais, nos pontos de contacto, tem-se que $\vec{N}_1 = \frac{N_x}{2} \hat{i} + \frac{N_y}{2} \hat{j} - N_z \hat{k}$ e $\vec{N}_2 = \frac{N_x}{2} \hat{i} + \frac{N_y}{2} \hat{j} + N_z \hat{k}$ de maneira que $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = N_x \hat{i} + N_y \hat{j}$. Por tanto a força normal aplicada em cada ponto de contanto realiza um torque, $\vec{\tau}_{N_1} = (\vec{d} + z \hat{k}) \times \vec{N}_1$ e $\vec{\tau}_{N_2} = (\vec{d} - z \hat{k}) \times \vec{N}_2$, em relação ao eixo principal de rotação, e é dada por:

$$\vec{\tau}_{N_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d_x & d_y & z \\ \frac{N_x}{2} & \frac{N_y}{2} & -N_z \end{vmatrix}, \quad (51)$$

$$\vec{\tau}_N = \vec{\tau}_{N_1} + \vec{\tau}_{N_2}, \quad (52)$$

$$\vec{\tau}_N = (d_x N_y - d_y N_x) \hat{k} = 0. \quad (53)$$

Tabela 1: Grandezas vetoriais do duplo cone sobre os trilhos inclinados, reescritas, utilizando os vetores unitários $\hat{a} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ e $\hat{b} = \cos(\theta - \theta_0) \hat{i} + \sin(\theta - \theta_0) \hat{j}$.

$\vec{r} = r (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j})$	$\vec{q} = \frac{R-r}{\eta} \hat{a}$	$\vec{d} = \frac{r}{\cos \theta_0} [\sin(\theta - \theta_0) \hat{i} - \cos(\theta - \theta_0) \hat{j}]$
$\vec{r}_{cp} = \frac{(R-r)}{\eta \cos \beta} (\cos \beta \hat{a} + \sin \beta \hat{k})$	$\vec{r}_{cm} = \frac{R}{\eta} \hat{a} - \frac{r}{\sin \theta_0} \hat{b}$	$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos \theta_0$
$\vec{v}_{cp} = \frac{-\dot{r}}{\eta \cos \beta} (\cos \beta \hat{a} + \sin \beta \hat{k})$	$\vec{v}_{cm} = -\frac{\dot{r}}{\sin \theta_0} \hat{b}$	$\vec{v}_t = -\dot{\vec{q}} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{\dot{r}}{\eta} \hat{a}$
$\vec{\omega} = -\omega \hat{k} = \frac{\dot{r}}{r \eta} \hat{k}$	$v_{cm} = v_{cp} \frac{\cos \beta}{\cos \theta_0}$	$v_{cm} = \frac{v_t}{\cos \theta_0}$
$\vec{a}_{cp} = \frac{-\ddot{r}}{\eta \cos \beta} (\cos \beta \hat{a} + \sin \beta \hat{k})$	$\vec{a}_{cm} = -\frac{\ddot{r}}{\sin \theta_0} \hat{b}$	$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$
$\vec{\alpha} = -\alpha \hat{k}$	$\dot{\vec{\omega}} = \frac{(\ddot{r} - \dot{r}^2/r)}{r \eta} \hat{k}$	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$
$\vec{P} = -Mg \hat{j}$	$\vec{f}_s = f_{sb} \hat{b}$	$\vec{N} = N [-\sin(\theta - \theta_0) \hat{i} + \cos(\theta - \theta_0) \hat{j}]$

O resultado na eq. (53) foi obtido a partir da expressão dos vetores \vec{d} e \vec{N} que se encontram na ultima coluna da tabela (1). Da mesma maneira acontece com a força de atrito estática, $\vec{f}_{s1} = \frac{f_{sx}}{2} \hat{i} + \frac{f_{sy}}{2} \hat{j} - f_{sz} \hat{k}$ e $\vec{f}_{s2} = \frac{f_{sx}}{2} \hat{i} + \frac{f_{sy}}{2} \hat{j} + f_{sz} \hat{k}$ de maneira que $\vec{f}_s = \vec{f}_{s1} + \vec{f}_{s2} = f_{sx} \hat{i} + f_{sy} \hat{j}$. Assim a força de atrito estática aplicada em cada ponto de contato realiza um torque, $\vec{\tau}_{f_{s1}} = (\vec{d} + z \hat{k}) \times \vec{f}_{s1}$ e $\vec{\tau}_{f_{s2}} = (\vec{d} - z \hat{k}) \times \vec{f}_{s2}$, em relação ao eixo principal de rotação, é dada por:

$$\vec{\tau}_{fs} = \vec{\tau}_{f_{s1}} + \vec{\tau}_{f_{s2}}, \tag{54}$$

$$\vec{\tau}_{fs} = (d_x f_{sy} - d_y f_{sx}) \hat{k}, \tag{55}$$

$$\vec{\tau}_{fs} = \frac{f_{sb} r}{\cos \theta_0} \hat{k}. \tag{56}$$

As componentes na eq. (55) foram obtidas da tabela 1 para obter a eq. (56).

Agora com todas as equações estabelecidas podemos escrever as equações da segunda lei de Newton para corpos rígidos, no caso do movimento do duplo cone sobre os trilhos em formato V inclinados. Estas são:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_s = M \vec{a}_{cm}, \tag{57}$$

$$\vec{\tau}_P + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{f_s} = I_{cm} \dot{\vec{\omega}}. \tag{58}$$

Utilizando as direções dos vetores da tabela 1 na eq. (57), tem-se que:

$$\vec{P} \cdot \hat{b} + \vec{N} \cdot \hat{b} + \vec{f}_s \cdot \hat{b} = M \vec{a}_{cm} \cdot \hat{b}, \tag{59}$$

$$-Mg \sin(\theta - \theta_0) + f_{sb} = -M a_{cm}. \tag{60}$$

Fazendo o produto escalar com o vetor normal \vec{N} ao invés de \hat{b} , na eq. (57), o resultado para o modulo da normal é,

$$N = Mg \cos(\theta - \theta_0). \tag{61}$$

Por outro lado, o torque, em relação ao eixo principal de rotação do duplo cone, da força peso é nula, $\vec{\tau}_P = 0$, o torque da normal também, como demonstrado acima, e o torque da força de atrito, é dada pela eq. (56). Por

tanto a eq. (58) pode ser reescrita como:

$$\frac{f_{sb} r}{\cos \theta_0} = I_{cm} \left(\frac{\ddot{r}}{r \eta} - \frac{\dot{r}^2}{\eta r^2} \right), \tag{62}$$

$$\frac{f_{sb} r}{\cos \theta_0} = I_{cm} \left(\frac{a_{cm} \sin \theta_0}{\eta r} - \eta \omega^2 \right), \tag{63}$$

onde \ddot{r} e \dot{r} foi substituído pelos módulos de a_{cm} e ω na eq. (62), seguindo a tabela (1). Substituindo o modulo da força de atrito da eq. (63) na eq. (60) tem-se que,

$$-Mg \sin(\theta - \theta_0) + \frac{I_{cm} \cos \theta_0}{r} \left(\frac{a_{cm} \sin \theta_0}{\eta r} - \eta \omega^2 \right) = -M a_{cm}. \tag{64}$$

Assim o modulo da aceleração do centro de massa do duplo cone é

$$a_{cm} = \left[\frac{Mg \sin(\theta - \theta_0) + I_{cm} \frac{\omega^2}{r} \sin \theta_0}{I_{cm} + M \frac{r^2}{\cos^2 \theta_0}} \right] \frac{r^2}{\cos^2 \theta_0}. \tag{65}$$

Este resultado para a aceleração do centro de massa veio das equações (57) e (58) e significa que as forças que influenciam diretamente no modulo da aceleração do centro de massa é a força peso e a força de atrito estática, eq. (60). A força normal influencia na direção da aceleração do centro de massa, dado que $\vec{N} \cdot \vec{a}_{cm} = 0$ e o torque da normal $\vec{\tau}_N = 0$. O modulo da força de atrito estática influencia no modulo de a_{cm} pois esta vinculada, por médio do torque, com o modulo da variação da velocidade angular $\dot{\omega}$. Esta variação do modulo da velocidade angular provoca uma aceleração, de modulo proporcional \ddot{r} , e uma aceleração centrípeta, do modulo proporcional a ω^2 , porque r depende do tempo, observe a eq. (62) e $\dot{\vec{\omega}}$ na tabela 1. Com a equação (60) e a equação (63) é possível encontrar a componente na direção \hat{b} da força de atrito,

$$f_{sb} = -\frac{M \sin \theta_0 I_{cm} \omega^2 r}{\cos \theta_0^2 I(r)} + Mg \frac{I_{cm}}{I(r)} \sin(\theta - \theta_0). \tag{66}$$

Note que a componente, na direção do movimento do centro de massa, da força de atrito estática varia ao longo do tempo e que no caso da normal se cancelar com a força

peso, isto é, quando $\theta = \theta_0$, veja equação (61), esta força de atrito estática é a que impede um torque resultante nulo, ou a lei de conservação do momento angular, como visto na lei de conservação da energia, eq. (32).

5. Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano

Para verificar o módulo da aceleração do centro de massa, como encontrado na seção anterior, e obter as equações de movimento a fim de reconstruir o movimento do duplo cone, utilizaremos as abordagens de Lagrange e Hamilton. A função de Lagrange é definida como $\mathcal{L} = K - V$ e para o duplo cone sobre os trilhos inclinados pode ser escrita em função da coordenada generalizada r a partir das equações (28), (25) e (30), tendo como resultado:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(r) \dot{r}^2 - V(r), \tag{67}$$

onde

$$m(r) = \frac{I(r)}{r^2 \eta^2}. \tag{68}$$

A função de Hamilton é definida como $H = \dot{r} p - \mathcal{L}$ onde o momento conjugado p pode ser obtido pela Lagrangiana com a equação $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}$. Com estas afirmações e com a eq. (67) o Hamiltoniano do sistema físico é

$$H = \frac{p^2}{2 m(r)} + V(r). \tag{69}$$

Então as equações de movimento são:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m(r)}, \tag{70}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p^2}{\eta^2 r^3} \frac{I_{cm}}{m^2(r)} - Mg \cos \theta \left(\frac{\eta - \tan \theta}{\eta} \right), \tag{71}$$

Estas equações diferenciais ordinárias (70) e (71) podem ser resolvidas com os softwares livres [21].

O caso vermelho, Fig. (5), representa um duplo cone solto do repouso, $p_0 = 0$, no vértice dos trilhos, $r_0 = R$, inclinados um ângulo θ , menor a θ_0 , de maneira que $\tan \theta = \frac{\eta}{1,2}$. A solução numérica mostra que $r(t)$ ira diminuir a medida que o tempo passa até se anular, Fig. (5A). Isto significa que o duplo cone solto do repouso no vértice, Início vermelho na Fig. (5B), ira subir os trilhos inclinados ate alcançar seu ponto mais alto nos trilhos, Fim vermelho na Fig. (5B). O caso verde, Fig. (5), simula o duplo cone solto do repouso, $p_0 = 0$, no ponto mais alto do trilho V, $r_0 = 0$, inclinados um ângulo θ , maior a θ_0 , de maneira que $\tan \theta = \frac{\eta}{0,8}$. A solução numérica mostra que $r(t)$ ira aumentar seu valor a medida que o tempo passa. Isto significa que o duplo cone solto do repouso no ponto mais alto no

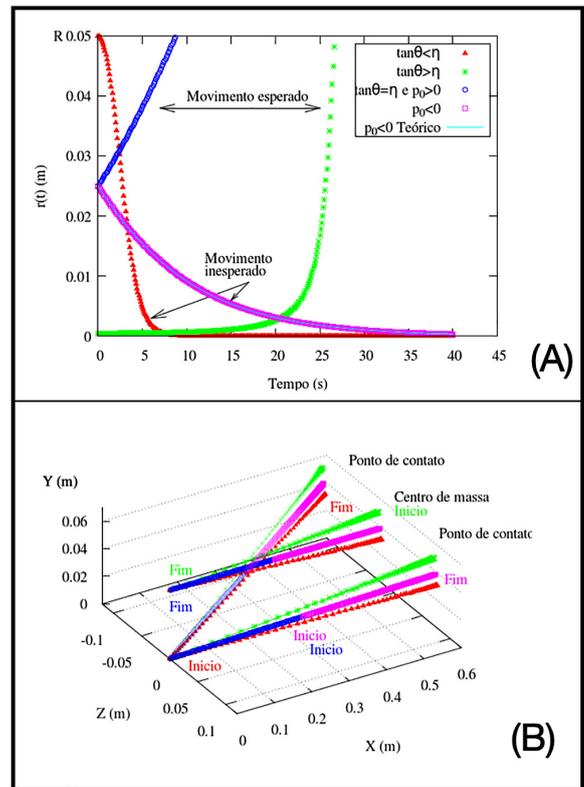


Figura 5: O gráfico (A) mostra a evolução temporal da coordenada generalizada $r(t)$ construída com os parâmetros $M = 1,0 \text{ kg}$, $R = 0,05 \text{ m}$, $L = 0,10 \text{ m}$, $\beta = 10^\circ$ e $g = 9,78 \text{ m/s}^2$. Os símbolos geométricos coloridos representam a solução numérica das eqs. (70) e (71), para $r(t)$ em diferentes ângulos de inclinação e diferentes condições iniciais. A linha turquesa corresponde a solução analítica para $r(t)$, eq. (34), no caso $\theta = \theta_0$. O grafico (B) mostra as trajetórias do ponto de contato e do centro de massa do duplo cone no sistemas de coordenadas cartesiano XYZ para os mesmos casos da figura ao lado.

trilho, Início verde na Fig. (5B), ira descer o trilho até o vértice, Fim verde na Fig. (5B). No caso dos trilhos V inclinados um ângulo igual a θ_0 o duplo cone foi simulado com dois momentos diferentes, com $p_0 = 1.0 \text{ kg m/s}$, caso rosa, e $p_0 = -1.0 \text{ kg m/s}$, caso azul, e um mesmo ponto inicial, $r = \frac{1}{2} R$, no centro dos trilhos, observe Início azul e rosa na Fig. (5B). Quando o duplo cone é impulsionado para cima, $p_0 < 0$, ele ira subir os trilhos inclinados e quando impulsionado para baixo, $p_0 > 0$, ele ira descer os trilhos, como mostram as trajetórias do centro de massa e dos pontos de contato rosa e azul na Fig. (5B), respectivamente.

Na descrição dinâmica do movimento do duplo cone sobre os trilhos inclinados feito com o formalismo lagrangiano e hamiltoniano é possível trabalhar a equação de Lagrange para conectar as outras duas descrições dinâmicas feitas com as leis de conservação da energia mecânica e com as leis de Newton para o movimento dos corpos rígidos. A equação de Lagrange, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$, que correspondente a este sistema

físico, eq. (67), é

$$\frac{1}{2} \dot{m}(r) \dot{r} + m(r) \ddot{r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}. \quad (72)$$

Onde foi utilizada a propriedade $\frac{\partial m(r)}{\partial r} \dot{r} = \dot{m}(r)$. A eq. (72) multiplicada por \dot{r} pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(r) \dot{r}^2 \right] = \frac{dK}{dt} = -\frac{dV}{dt}. \quad (73)$$

Comprovando assim que este sistema é conservativo, como foi assumido na eq. (31). Além disso a partir da eqs. (72), (68), (30), (25) e (19) pode-se determinar a equação diferencial do movimento do duplo cone, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{-I_{cm} 2 \dot{r}}{r^3 \eta^2} \right) \dot{r} + \frac{I(r, t)}{r^2 \eta^2} \ddot{r} \\ = -Mg \cos \theta \frac{1}{\eta} (\eta - \tan \theta), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} I(r, t) \ddot{r} \\ = \left[Mg \sin(\theta - \theta_0) + \frac{I_{cm} \sin \theta_0 \omega^2}{r} \right] \frac{r^2 \eta}{\cos \theta_0}. \end{aligned} \quad (75)$$

Considerando que a_{cm} é proporcional a \ddot{r} , veja tabela 1, esta última equação é igual a eq. (65) que foi deduzida pela soma das forças e da soma de torques. Estas consequências do formalismo lagrangiano que se encontram com as leis de conservação da energia mecânica e as leis de Newton para corpos rígidos surge por causa de que o princípio fundamental deriva do princípio de mínima ação.

6. Análises dos Resultados

A descrição energética do duplo cone na seção 3 permitiu escrever a energia cinética total do duplo cone simplificadamente. No entanto, a distância entre o eixo de rotação paralelo, formado pelos pontos de contato, e o eixo principal, na direção do comprimento L , ficou mascarada, ou seja, o Teorema dos Eixos Paralelos não ficou evidente, veja a eq. (30). A forma do potencial gravitacional proporcionou observar duas regiões, determinadas por $\tan \theta < \eta$ e $\tan \theta > \eta$, nas quais o comportamento do movimento do duplo cone seria inesperado ou não, veja a Figura 2. Além disso, no caso especial em que $\tan \theta = \eta$, foi possível perceber a existência de uma constante de movimento, que não é o momento angular, veja a eq. (32). A integral dessa constante forneceu uma solução analítica para $r(t)$ e permitiu verificar a qualidade da solução numérica das equações de movimento na seção 5, veja Figura 5.

A descrição vetorial das forças que atuam no duplo cone, seção 4, começou com a afirmação de que a perpendicularidade no ponto de contato tem que ser no cone e no trilho, veja Figura 3. Isso nos levou a compreender que, no plano XY , a normal está inclinada

em relação à vertical um ângulo θ_0 , mesmo com os trilhos não inclinados. Quando os trilhos se inclinam, $\theta \neq 0$, a componente X da normal apresentará sinal positivo, sempre e quando $\theta_0 - \theta > 0$, ou seja, o movimento do duplo cone será inesperado. Caso contrário, $\theta_0 - \theta < 0$, a componente X da normal será negativa e resultará no movimento típico de um corpo em um plano inclinado. O último quadro da Figura 3 mostra de maneira clara a razão física da condição geométrica entre η e $\tan \theta$, que tanto foi trabalhada nos artigos [11] a [17].

A relação matemática, $\eta = \tan \theta_0$, revelada pela normal faz com que todas as variáveis cinemáticas possam ser reinterpretadas e escritas de maneira sucinta na tabela 1. O fato da normal atuar em um ângulo $\theta_0 - \theta$ em relação à vertical tem consequências significativas para a compreensão da direção do movimento do centro de massa. Descobre-se primeiro que o eixo principal do duplo cone, ao longo do comprimento L , encontra-se a uma distância d do eixo paralelo formado pelos pontos de contato, conforme ilustrado na Figura 4. Além disso, esse fato resultou em trabalho e torque nulos da normal, o que coincide com os resultados encontrados na descrição energética do duplo cone. Um outro resultado interessante foi que a força de atrito estática total teve sua direção marcada pelo versor \hat{b} , que coincide com a direção do movimento do centro de massa, em vez de seguir a direção do trilho, que é marcada pelo versor \hat{a} no plano XY , conforme indicado na Tabela 1. O módulo da força de atrito estática total, eq. (66), prediz que no caso de equilíbrio, $\theta = \theta_0$, e solto do repouso, $\omega_i = 0$, eq. (32) e eq. (34), o duplo cone terá uma força de atrito total anulada. Ou seja o equilíbrio e repouso no duplo cone é devido a anulação da força peso com a força normal e a anulação do torque devido a força de atrito estática ser nula. Este resultado vai de encontro à afirmação feita no artigo [16].

O ponto mais relevante desta descrição dinâmica é a obtenção do módulo da aceleração do centro de massa, conforme mostrado na Eq. (65). O resultado indica que o duplo cone se comporta como um corpo rígido com aceleração variável. Essa variação é causada pela distância entre os eixos paralelos, o eixo principal e o eixo de rotação nos pontos de contato, bem como pela força centrípeta gerada pela rotação e pela variação de r . Vale a pena destacar que a componente horizontal da aceleração do centro de massa é maior do que a componente vertical. Em outras palavras, o movimento do duplo cone ocorre principalmente na horizontal, mesmo que, na vertical, as forças normal e peso se anulem devido a $\theta = \theta_0$. Isso significa que o duplo cone pode ter uma aceleração de módulo variável e direção somente horizontal.

O uso do formalismo lagrangiano e hamiltoniano na descrição dinâmica do duplo cone sobre os trilhos inclinados é elegante e didático. Em poucos passos, podemos obter as equações de movimento. Além disso, graças à solução numérica das equações diferenciais, conseguimos reconstruir as trajetórias do ponto de contato e do centro

de massa. Isso nos permitiu criar um gráfico claro do movimento do duplo cone no trilho, como ilustrado na Figura 5. Essa abordagem nos capacita a explorar várias simulações do movimento do duplo cone, incluindo diferentes condições iniciais, ângulos de inclinação, tipos de cones e ângulos β para o trilho. A escolha apropriada da coordenada generalizada permitiu uma conexão adequada entre os resultados da descrição dinâmica, baseada na energia do sistema, e a descrição das forças e torques que atuam no duplo cone.

7. Considerações Finais

Sobre o misterioso movimento do duplo cone no trilho em V inclinado que surpreende as pessoas, surge a indagação sobre quais as contribuições que a física pode fornecer para decifrar esse fenômeno enigmático? Inicialmente, pode-se afirmar que a física apresenta uma abordagem que não apenas propõe uma compreensão teórica, mas também oferece insights experimentais. Essa abordagem não só delinea as bases teóricas para compreender o fenômeno, mas também fornece direcionamentos experimentais, indicando de maneira precisa onde, quando e quais características específicas do duplo cone em um trilho em V inclinado contribuirão para a manifestação desse mistério. Assim, a física não apenas teoriza sobre o comportamento do duplo cone, mas também fornece uma estrutura tangível que orienta as investigações práticas, promovendo uma compreensão mais profunda desse fascinante fenômeno.

Ao longo desta pesquisa, evidencia-se a riqueza dos princípios fundamentais propostos pela física, que desempenham papéis distintos e complementares na explanação do movimento surpreendente do duplo cone em um trilho inclinado em forma de V. A lei de conservação da energia mecânica, as leis de Newton e a formulação lagrangiana emergem como potentes ferramentas, cada uma com suas singularidades na resolução desse intrigante problema. No entanto, é essencial destacar que todas essas abordagens convergem para uma solução coerente. Essa convergência não apenas assegura a representação precisa das grandezas vetoriais e escalares que descrevem a dinâmica e a cinemática do duplo cone no trilho inclinado, mas também sublinha a robustez e a universalidade dos princípios físicos subjacentes.

A seguir, destacam-se alguns conceitos físicos provenientes dos resultados deste trabalho sobre o movimento inesperado do duplo cone no trilho em V inclinado, os quais podem enriquecer o debate sobre a dinâmica de corpos rígidos:

- No ponto de contato, a direção e o módulo da velocidade do centro de massa são diferentes da velocidade tangencial do duplo cone.
- A aceleração tangencial não é igual ao produto vetorial da aceleração angular com o raio, do movimento circular no plano XY , devido a variação temporal do raio.

- A direção do movimento do centro de massa possui uma componente horizontal maior do que a componente vertical.
- A força de atrito estática é variável e não possui direção ao longo do trilho.
- O equilíbrio e o repouso ocorrem com a anulação vertical das forças normal e peso. Além disso, a força de atrito estática é nula, pois sua existência provocaria um torque no duplo cone.

Entender os fenômenos presentes no nosso cotidiano permite refletir sobre a possibilidade de entendimento de problemas difíceis com os quais a nossa sociedade se confronta. Também permite refletir como a ciência pode enriquecer nossa visão sobre os vários aspectos que bordeiam um problema aparentemente simples. Esperamos ter contribuído de maneira significativa com este trabalho para as pessoas que já tiveram a oportunidade de trabalhar com o duplo cone e também para aquelas que ainda não o conhecem.

Agradecimentos

Agradecemos à professora Suzana Moss de Oliveira e ao professor Paulo Murilo Castro de Oliveira, in memoriam. Nossos agradecimentos também se estendem ao Centro Latino-Americano de Física (CLAF), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à UFF, ao CBPF, à UFLA e ao Ministério das Mulheres.

Referências

- [1] W. Leybourn e R. Sault, *Pleasure With Profit: Consisting of Recreations of Divers Kinds, Viz* (R. Baldwin and J. Dunton, Londres, 1694), tomo 3.
- [2] A. Medeiros e C.F. Medeiros, *Rev. Bras. Fis.* **25**, 333 (2003).
- [3] Manual do Mundo, *Aprenda a fazer um cone antigravidade*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QVLT-x3qjKM>, acessado em 16/11/2019.
- [4] ANKIDYNE, *Double ended cone.mp4*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3IJjQKgtxuQ>, acessado em 16/11/2019.
- [5] M. Kuhlmann Jr. e F.S. Fernandes, *Rev. Diálogo Educ.* **14**, 693 (2014).
- [6] Physics and Astronomy UKY, *Double Cone Rolling up an Incline*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=hwA-5oCkC_Q, acessado em 5/08/2020.
- [7] Núcleo de divulgação científica da Universidade Federal de Lavras, *“Magia da Física” na semana da ciência e tecnologia*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=e0CY2CWjUPs&t=181s>, acessado em 16/11/2019.
- [8] Televisão Universitária TVU Lavras, *Reportagem-Magia da Física*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=DBGmnunfh2Q>, acessado em 16/11/2019.

- [9] Televisão Universitária TVU Lavras, *Feira de Ciência e Tecnologia em Itumirim promovida pela UFLA*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=R0uCF-j4BWk&t=6s>, acessado em 16/11/2019.
- [10] J.S.A. Melo, K. Luz-Burgoa e J.A.C. Nogales, em: *Encontro Nacional sobre praticas educativas em museus e centros de ciência e tecnologia* (Rio de Janeiro, 2018).
- [11] R. De Luca e S. Ganci, *Eur. J. Phys.* **32**, 101 (2011).
- [12] J. Bartoš e J. Musilová, *Eur. J. Phys.* **25**, 675 (2004).
- [13] F. Pascoal, S.J. Prado e E.A. Castro, *Revista Brasileira De Ensino De Física* **36**, 3304 (2014).
- [14] J. Canalle e R. Moura, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **15**, 323 (1998).
- [15] N. Balta, *Physics Teacher*, **40**, 156 (2002).
- [16] A.A. Gallitto e E. Fiordilino, *Physics Education* **46**, 682 (2011).
- [17] B. Suciú, *International Journal of Science and Engineering Investigations* **5**, 55316-01 (2016).
- [18] S.C. Gandhi e C.J. Efthimiou, *Eur. J. Phys.* **26**, 681 (2005).
- [19] E. Cortéz e D. Cortéz-Poza, *Eur. J. Phys.* **32**, 1559 (2011).
- [20] Arvind Gupta, *CLIMBING FUNNELS - ENGLISH - 13MB*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3grY7-F1FWQ>, acessado em 18/08/2020.
- [21] FREE SOFTWARE FOUNDATION, *GSL - GNU Scientific Library*, disponível em: <http://www.gnu.org/software/gsl/>, acessado em 16/11/2019.
- [22] M. Galassi, J. Davies, J. Theiler, B. Gough, G. Jungman, M. Booth e F. Rossi, *GNU Scientific Library Reference Manual* (Network Theory Ltd, Godalming, 2006), 2 ed.