

Investigação paramétrica do efeito da transferência de momentos na resistência à punção de ligações laje-pilar

Parametric investigation of the effect of moment transfer on the punching shear strength of slab-column connections

Rodrigo Fernandes Moraes 
Maurício de Pina Ferreira 

Resumo

Nas ligações laje-pilar são concentradas elevadas tensões de cisalhamento, favorecendo a ocorrência da ruptura por punção. Em projetos de edifícios, é comum a ocorrência da transferência de momentos desbalanceados na ligação laje-pilar, reduzindo significativamente a resistência à punção. Porém, algumas normas apresentam maior imprecisão para casos com momento desbalanceado. Nesse sentido, para investigar o efeito da transferência de momentos na resistência à punção de ligações laje-pilar de concreto armado sem armadura de cisalhamento, inicialmente, foram realizadas modelagens numéricas não lineares dos espécimes ensaiados experimentalmente por Kruger (1999), utilizando o *software* de elementos finitos ATENA. Validaram-se os modelos computacionais por meio da comparação dos resultados de carga versus deslocamento, perfil de deslocamento vertical, evolução do dano e superfície de ruptura. A partir dessa validação, foi realizado um estudo paramétrico com base nesses modelos computacionais, variando a excentricidade de carregamento. Comparando-se os resultados obtidos da análise paramétrica com as previsões das normas americana e brasileira, foram obtidos resultados que indicam os efeitos provocados pela excentricidade na resistência à punção.

Palavras-chave: Concreto armado. Ligação Laje-pilar. Modelagem computacional. Resistência à punção. Momento desbalanceado.

Abstract

In slab-column connections, high shear stresses are concentrated, favoring the occurrence of punching failure. In building design, the transfer of unbalanced moments in the slab-column connection is common, significantly reducing the punching resistance. However, some standards present greater imprecision for cases with unbalanced moment. In this context, to investigate the effect of moment transfer on the punching resistance of reinforced concrete slab-column connections without shear reinforcement, nonlinear numerical modeling of the specimens experimentally tested by Kruger (1999) was initially performed using the finite element software ATENA. The computational models were validated through the comparison of load versus displacement results, vertical displacement profiles, damage evolution, and failure surfaces. Based on this validation, a parametric study was carried out using these computational models, varying the loading eccentricity. By comparing the results obtained in the parametric analysis with the predictions of the American and Brazilian codes, results were obtained that indicate the effects caused by eccentricity on punching resistance.

Keywords: Reinforced Concrete. Slab-Column Connection. Computational Modeling. Punching resistance. Unbalanced moment.

¹Rodrigo Fernandes Moraes

¹Universidade Federal do Pará
Belém - PA - Brasil

²Maurício de Pina Ferreira

²Universidade Federal do Pará
Belém - PA - Brasil

Recebido em 26/06/25
Aceito em 13/09/25

Introdução

O tipo de sistema estrutural escolhido na fase de concepção dos projetos tem impacto significativo em todos os aspectos da obra, já que a construção desse geralmente leva cerca de 50% da duração total do empreendimento (Goodchild, 2001). Nesse contexto, no início do século 20, foi desenvolvido nos EUA e na Europa um sistema estrutural com lajes de concreto apoiadas diretamente sobre pilares, denominadas lajes lisas. Porém, esses projetos ainda incluíam grandes capitéis, dificultando sua execução. A partir da década de 1950, as lajes lisas sem capitéis começaram a predominar devido à sua simplicidade, tornando-se atualmente um sistema usual para estruturas de concreto nas regiões da América do Norte, parte da Europa e da Ásia, sendo utilizado para projetos de edifícios residenciais, escritórios e estacionamentos (Muttoni, 2008).

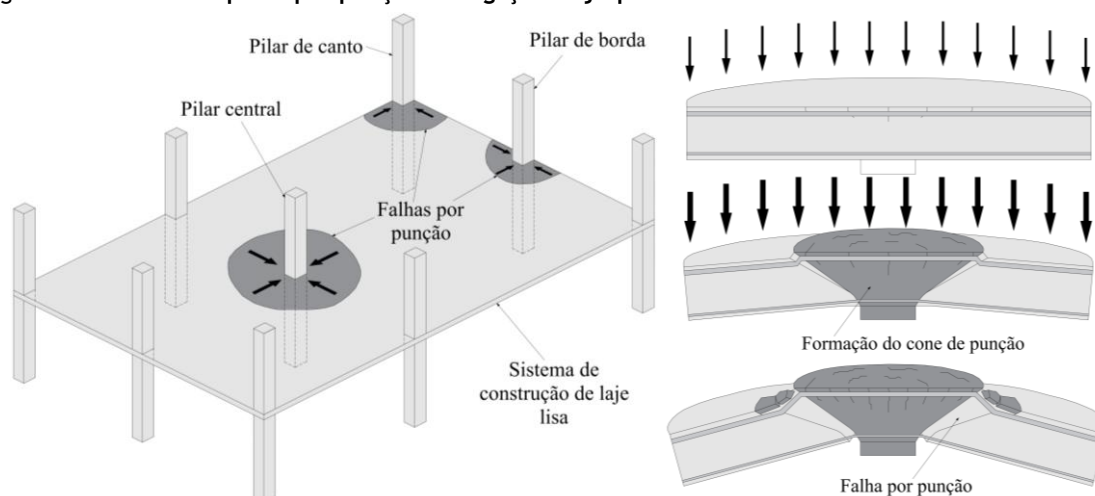
Este crescente uso do sistema estrutural de lajes lisas ocorre devido a diversas vantagens construtivas em relação ao sistema convencional com vigas, como a simplificação das fôrmas, facilitando os processos de montagem e desmontagem, aumentando a produtividade e diminuindo o desperdício. Além disso, apresenta facilidade na disposição de instalações elétricas, hidráulicas e de ar-condicionado, permitindo a flexibilização do layout do imóvel e facilitando a execução de um número maior de pavimentos para uma mesma altura total do edifício, já que oferece a possibilidade de diminuir o pé-direito.

Apesar das vantagens apresentadas, esse sistema construtivo com lajes lisas de concreto apresenta desvantagens em relação à redução da rigidez da edificação em relação aos esforços horizontais. Com isso, há uma dificuldade na sua utilização em edifícios altos, devido a necessidade de um controle rigoroso dos deslocamentos e em alguns casos é necessária a utilização de armaduras de cisalhamento. Além disso, apresentam elevado peso próprio, devido à grande espessura das lajes, e estão suscetíveis ao modo de ruptura por punção nas ligações laje-pilar, devido ao complexo comportamento, tornando essas estruturas vulneráveis ao colapso progressivo.

Nesse sentido, a capacidade resistente à punção é um dos fatores mais importantes no dimensionamento desses elementos, já que esse é frequentemente o modo de ruptura dominante. A ocorrência desse fenômeno é provocada por elevadas tensões cisalhantes na zona de ligação laje-pilar, podendo ocorrer em diferentes posições ao longo da estrutura, dependendo do carregamento e das condições de contorno, formando uma superfície de ruptura cônica, conforme apresentado na Figura 1 (Einpaul *et al.*, 2016). Esse tipo de ruptura ainda é associado, geralmente, a pequenas deformações e aberturas de fissuras antes de falhar, podendo ocorrer sem sinais de alerta perceptíveis.

De acordo com Kruger (1999), quando são adicionadas a esse problema mais variáveis, como o momento desbalanceado nas ligações laje-pilar, são provocadas reduções significativas na resistência à punção, já que essa transferência de momento da laje para o pilar afeta diretamente a distribuição do cisalhamento nessa ligação. Segundo Santos *et al.* (2024), essa solicitação é comum na prática de projetos com sistemas estruturais de lajes lisas de concreto armado, devido às variações entre vãos e nos carregamentos, em razão de *layouts* irregulares, além de sofrerem a ação de forças horizontais, provocadas pelo vento, por sismos ou por diferencial de fluência e retração em lajes contínuas.

Figura 1 - Modos de ruptura por punção em ligações laje-pilar



Fonte: adaptado de Liberati *et al.* (2019).

Apesar do exposto, ocorre uma escassez de trabalhos relacionados ao comportamento à punção de ligações laje-pilar com armadura de cisalhamento submetidos a momentos desbalanceados, sendo a grande maioria de trabalhos experimentais, os quais possuem dificuldades em relação ao tempo excessivo e ao alto custo envolvido, tanto de materiais como de equipamentos, impossibilitando a investigação de alguns parâmetros importantes (Zheng *et al.*, 2023). Dessa forma, são necessários mais estudos sobre esse fenômeno.

Nesse contexto, a análise de elementos finitos (FEA) é uma alternativa para ampliar o conhecimento sobre o assunto, podendo ser realizada a calibração dos modelos computacionais não-lineares com base nos resultados dos experimentos, prevendo com precisão a capacidade resistente, o modo de ruptura e o comportamento geral da estrutura, para posterior acesso a informações não verificadas experimentalmente (Mansour *et al.*, 2024).

Assim, esse trabalho tem como objetivo investigar, por meio de modelagem computacional não-linear, utilizando o *software* de elementos finitos ATENA, o efeito da transferência de momentos na resistência à punção de ligações laje-pilar internas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, considerando diferentes excentricidades de carregamento e comparando os resultados com estimativas normativas do ACI 318 (ACI, 2019) e da NBR 6118 (ABNT, 2023).

Prescrições normativas

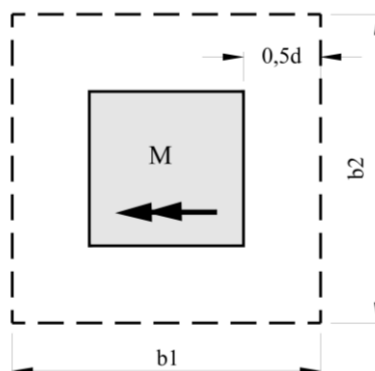
ACI 318 (ACI, 2019)

O ACI 318 (ACI, 2019) estabelece que a resistência ao cisalhamento bidirecional seja determinada no perímetro crítico, afastado a $d/2$ do pilar, sendo realizadas mudanças na espessura da laje lisa quando necessário, para situações sem armadura de cisalhamento. Na Figura 2 é apresentado o perímetro crítico utilizado em casos de lajes apoiadas em pilares quadrados.

A resistência ao cisalhamento bidirecional (v_c) para uma laje lisa sem armadura de cisalhamento é calculada por meio da Equação 1.

$$v_c = \min \left\{ \begin{matrix} 0,33 \\ 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \\ 0,083 \left(2 + \frac{a_s d}{b_0} \right) \end{matrix} \right\} \lambda_s \lambda \sqrt{f'_c} \quad \text{Eq. 1}$$

Figura 2 - Perímetro crítico localizado a $d/2$ em relação a face do pilar interno



Fonte: ACI 318 (ACI, 2019).

Sendo o “size effect” (λ_s) dado pela Equação 2.

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1+0,004 \cdot d}} \leq 1,0 \quad \text{Eq. 2}$$

E sendo também:

β a razão entre o maior e o menor lado do pilar;

a_s o fator para a seção crítica, levando em consideração a disposição do pilar, sendo igual a 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto;

d a profundidade efetiva da laje, sendo igual a distância entre a fibra mais comprimida ao centroide da armadura de flexão;

b_0 o perímetro da seção crítica para cisalhamento bidirecional em lajes;

λ 1 para concreto de densidade normal e varia entre 0,75 e 1,0 para concretos de baixa densidade; e

f'_c a resistência à compressão do concreto.

Nesse sentido, o concreto submetido a esforços de cisalhamento, como o que ocorre em ligações laje-pilar, deve satisfazer à seguinte condição de dimensionamento apresentada na Equação 3.

$$v_n \geq v_u \quad \text{Eq. 3}$$

Sendo:

v_n a tensão equivalente do concreto correspondente à resistência nominal ao cisalhamento bidirecional da laje; e

v_u a tensão de cisalhamento bidirecional máxima calculada em torno do perímetro crítico.

Além disso, tem-se que a tensão solicitante na ligação laje-pilar depende da carga transferida da laje para o pilar, podendo essa carga ser concêntrica ou excêntrica. Em caso com excentricidade, o momento fletor ocasiona um aumento na tensão solicitante em alguns trechos do perímetro crítico, enquanto outros apresentam uma diminuição de sollicitação. Dessa forma, é necessário analisar a tensão solicitante ao longo de todo o perímetro crítico, considerando duas componentes de momentos fletores e verificando qual seria o maior valor absoluto de sollicitação para o dimensionamento à punção. Na Figura 3 são exibidas as tensões de cisalhamento nos quatro trechos do perímetro crítico de ligações laje-pilar internos.

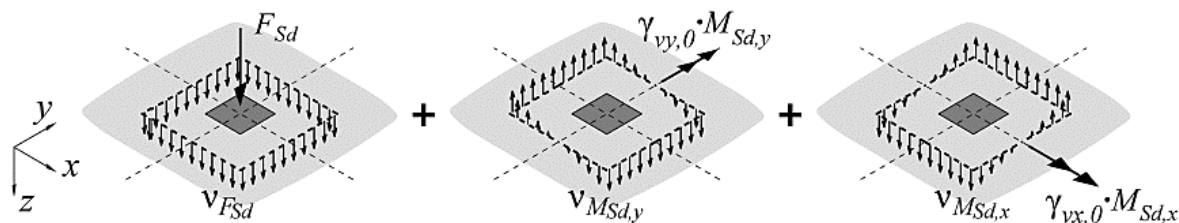
Com isso, quando existe transferência de momento fletor na ligação laje-pilar, o valor máximo da tensão de cisalhamento solicitante é calculado utilizando a Equação 4.

$$v_u = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v \cdot M_u \cdot c}{J_c} \quad \text{Eq. 4}$$

Em que o fator utilizado para determinar a fração de cisalhamento transferida pelo momento fletor solicitante (γ_v) é obtido pela Equação 5.

$$\gamma_v = (1 - \gamma_f) \quad \text{Eq. 5}$$

Figura 3 - Tensões solicitantes no perímetro crítico de ligações laje-pilar internas



Fonte: Santos (2018).

Sendo o fator utilizado para determinar a fração de flexão transferida pelo momento fletor solicitante (γ_f) dado pela Equação 6.

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} \quad \text{Eq. 6}$$

E sendo também:

V_u a força cortante solicitante na ligação laje-pilar;

M_u o momento fletor solicitante na ligação laje-pilar;

e a excentricidade do perímetro crítico; e

b_1 e b_2 as dimensões da seção crítica na direção da aplicação do momento fletor e na direção perpendicular a essa, respectivamente.

De acordo com o ACI 318 (ACI, 2019), o valor de γ_f depende diretamente da localização da ligação e da direção do vão, podendo ser aumentado, caso a tensão de cisalhamento nominal fatorada (v_{uv}), não exceda a porcentagem da resistência ao cisalhamento v_c , a deformação de tração líquida dentro da largura efetiva da laje (ε_t), deve ser maior ou igual a deformação de escoamento da armadura (ε_{ty}), mais uma determinada constante, conforme apresentado na Tabela 1. Para pilar quadrado, o γ_f máximo é igual a 1,0 para ligações com pilar de borda analisadas perpendicularmente à borda livre e ligações internas em qualquer vão. O γ_f não modificado para um pilar quadrado é igual a 0,6.

Para pilares internos a área de concreto do perímetro crítico (A_c) e a propriedade geométrica da seção crítica (J_c), análoga ao momento polar de inércia da seção crítica em relação aos eixos de ação do momento fletor (M_u), podem ser calculados através das Equações 7 e 8, respectivamente.

$$A_c = 2d \cdot (c_1 + c_2 + 2d) \quad \text{Eq. 7}$$

$$J_c = \frac{d(c_1+d)^3}{6} + \frac{(c_1+d)d^2}{6} + \frac{d(c_2+d)(c_1+d)^2}{2} \quad \text{Eq. 8}$$

Sendo c_1 e c_2 o comprimento da face do pilar na direção de análise e o comprimento da face do pilar no plano perpendicular a análise, respectivamente.

NBR 6118 (ABNT, 2023)

A NBR 6118 (ABNT, 2023) utiliza um modelo de cálculo que leva em consideração a verificação do cisalhamento em dois ou mais perímetros críticos, dependendo da presença ou não de armaduras de cisalhamento, os quais são definidos na região ao redor das forças concentradas. O perímetro crítico (C) definido no contorno do pilar ou da área carregada, já o perímetro crítico (C') é definido com um afastamento de $2d$ das faces do pilar ou da área carregada, conforme representado na Figura 4.

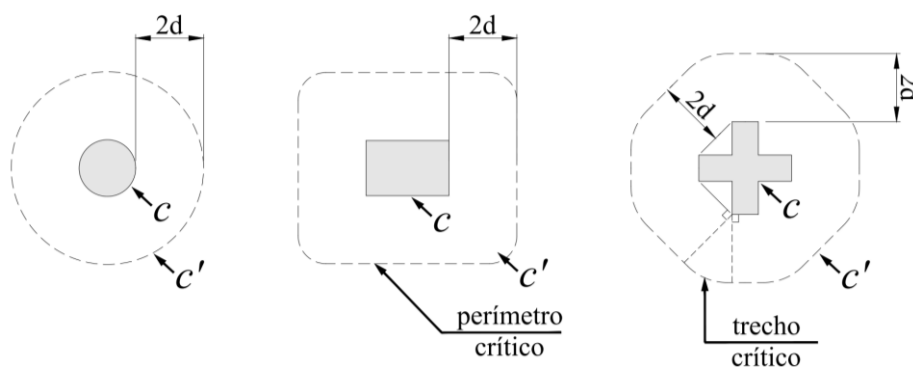
A tensão solicitante na ligação laje-pilar é influenciada pela carga transferida da laje para o pilar, podendo essa carga ser concentrada ou apresentar excentricidade. De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2023), o efeito de assimetria deve ser considerado, quando ocorre transferência de momento fletor da laje para o pilar, já que essa solicitação provoca variações na distribuição de tensões em diferentes trechos do perímetro crítico, aumentando a solicitação no lado com excentricidade e diminuindo do lado oposto, podendo até provocar a inversão de esforços.

Tabela 1 - Valores modificados de γ_f para lajes bidirecionais

Localização do pilar	Direção do vão	v_{uv}	ε_t	Máxima Modificação γ_f
Pilar de canto	Qualquer direção	$\leq 0,5\Phi v_c$	$\geq \varepsilon_{ty} + 0,003$	1,0
	Perpendicular a borda	$\leq 0,75\Phi v_c$	$\geq \varepsilon_{ty} + 0,003$	1,0
Pilar de borda	Paralelo a borda	$\leq 0,4\Phi v_c$	$\geq \varepsilon_{ty} + 0,008$	$\frac{1,25}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} \leq 1,0$
Pilar interno	Qualquer direção	$\leq 0,4\Phi v_c$	$\geq \varepsilon_{ty} + 0,008$	$\frac{1,25}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} \leq 1,0$

Fonte: ACI 318 (ACI, 2019).

Figura 4 - Perímetro crítico em pilares internos



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2023).

Segundo Santos (2018), é preciso verificar a tensão solicitante em quatro trechos do perímetro crítico, considerando duas componentes de momentos flettores, em que o maior valor absoluto entre essas seja analisado para a determinação da resistência à punção. Na Figura 5, são apresentadas as tensões cisalhantes nos quatro trechos do perímetro crítico para ligações laje-pilar internas.

Para considerar o efeito da assimetria na punção excêntrica, a norma estabelece a Equação 9, apresenta abaixo:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K \cdot M_{Sd}}{W_p \cdot d} \quad \text{Eq. 9}$$

Sendo d dado pela Equação 10.

$$d = \frac{d_x + d_y}{2} \quad \text{Eq. 10}$$

E sendo também:

τ_{Sd} a tensão de cisalhamento de cálculo;

F_{Sd} a força ou reação solicitante de cálculo;

u o perímetro da superfície crítica;

d a altura útil da laje ao logo do contorno crítico C', externo ao contorno, C da área de aplicação da força e deste distante 2d no plano da laje;

d_x e d_y as alturas úteis nas direções ortogonais;

K o coeficiente que fornece a parcela de momento transmitida ao pilar por cisalhamento;

M_{Sd} o momento solicitante de cálculo; e

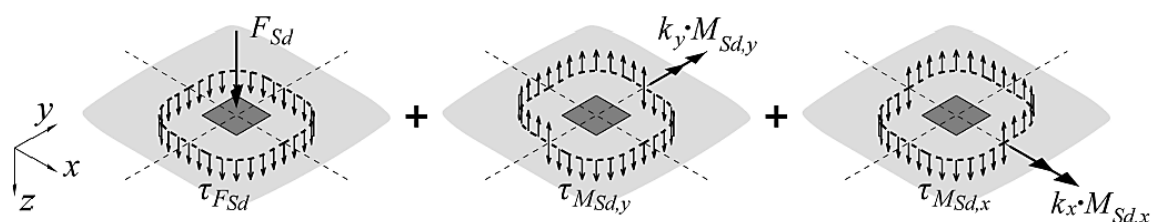
W_p o módulo de resistência plástico do perímetro crítico.

O coeficiente K depende diretamente da relação entre C_1/C_2 , em que C_1 corresponde à dimensão do pilar paralela à excentricidade da força e C_2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força. A Tabela 2 apresenta os valores de K para diferentes proporções entre os lados do pilar. Vale ressaltar que para pilares circulares é adotado $K=0,6$.

Para calcular o módulo de resistência plástico do perímetro crítico (W_p) é utilizada a Equação 11 para pilares retangulares.

$$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1 \cdot C_2 + 4 \cdot C_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot C_1 \quad \text{Eq. 11}$$

Figura 5 - Dedução da tensão solicitante máxima em ligações laje-pilar internas



Fonte: Santos (2018).

Tabela 2 - Valores de K

C_1/C_2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2023).

A verificação da tensão resistente de compressão diagonal do concreto na superfície crítica C, correspondente ao contorno do pilar, em lajes submetidas à punção com ou sem armadura, é realizada por meio da Equação 12.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \quad \text{Eq. 12}$$

Sendo o coeficiente α_v dado pela Equação 13.

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad \text{Eq. 13}$$

E sendo também:

τ_{Rd2} a tensão resistente à compressão diagonal de cálculo do concreto;

f_{ck} a resistência à compressão característica do concreto; e

f_{cd} a resistência à compressão de cálculo do concreto.

Além da verificação no perímetro do pilar, deve ser realizado o cálculo da tensão resistente na superfície crítica C', para lajes sem armadura de punção, utilizando a Equação 14.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \cdot K_e \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \quad \text{Eq. 14}$$

Sendo K_e dado pela Equação 15 e ρ pela Equação 16.

$$K_e = (1 + \sqrt{20/d}) \leq 2 \quad \text{Eq. 15}$$

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02 \quad \text{Eq. 16}$$

E sendo também:

τ_{Rd1} a tensão de cisalhamento resistente de cálculo-limite, para que uma laje possa prescindir de armadura transversal para resistir à força cortante;

K_e o parâmetro que considera o efeito de escala;

d a altura útil da laje ao longo do contorno crítico da área de aplicação da força, em centímetros;

ρ a taxa geométrica de armadura de flexão aderente; e

ρ_x e ρ_y as taxas de armadura nas duas direções ortogonais, calculadas iguais a dimensão do pilar acrescida de $3d$ para cada um dos lados.

Metodologia

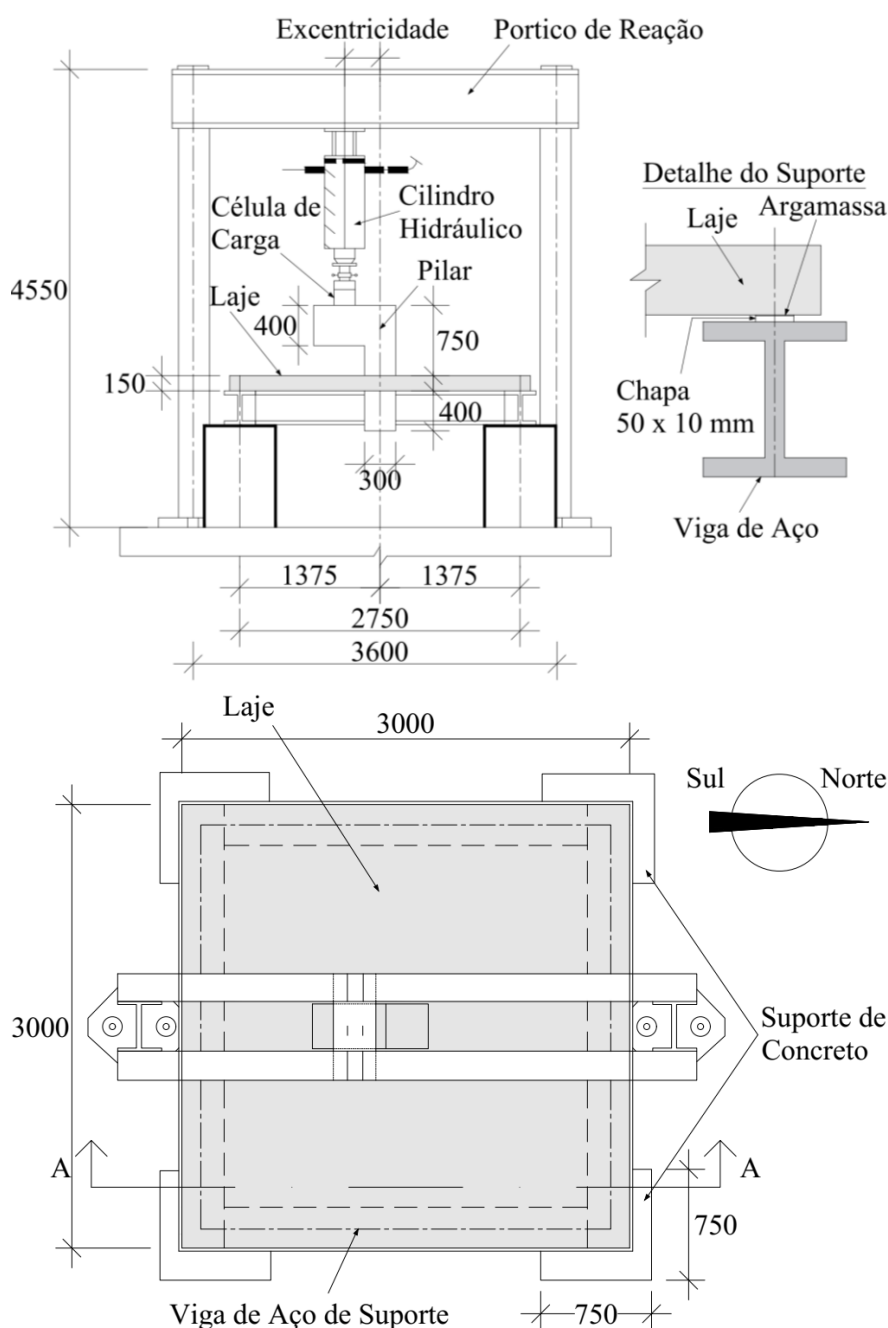
Descrição da investigação experimental de Kruger (1999)

Em seu estudo, Kruger (1999), buscou analisar o efeito do momento desbalanceado na resistência à punção de ligações laje-pilar internas com e sem armadura de cisalhamento, projetadas em escala real. Para isso, foi utilizado um programa experimental com sete lajes, as quais possuíam diferentes taxas de armadura de flexão,

variando entre 1,0% e 1,3%; utilizando diferentes armaduras de cisalhamento, sendo usados o tipo estribo de duas pernas e o tipo conector de aço, além de aplicar variadas excentricidades de carregamento, 0, 160 e 320 mm.

As sete lajes ensaiadas pelo autor possuíam dimensões de 3000 x 3000 x 150 mm com um pilar quadrado de 300 x 300 mm. Foi introduzido um carregamento vertical para baixo localizado excentricamente ao pilar, aplicando simultaneamente a força vertical e o momento no pilar. Além disso, as lajes ficaram simplesmente apoiadas em suas bordas, por meio de vigas de aço, permitindo que os cantos ficassem livres para levantar, Figura 6. Durante cada teste, o carregamento foi aplicado em passos de 40 kN, sendo mantida as deformações constantes cerca de 10 a 15 minutos por passo de carga. Ainda foi aumentada a deformação para registrar o pós-pico das lajes, tendo os ensaios sido encerrados quando o pilar penetrava na laje ou quando a rotação da coluna excedesse 5%.

Figura 6 - Sistema de ensaio



Fonte: adaptado de Kruger (1999).

Nessa pesquisa, foi realizada a modelagem dos espécimes sem armadura de cisalhamento, referentes às lajes P0A, P16A e P30A ensaiadas experimentalmente por Kruger (1999), cujos parâmetros são exibidos na Tabela 3 e cujo detalhamento é apresentado na Figura 7.

Modelagem computacional

Geometria e condições de contorno

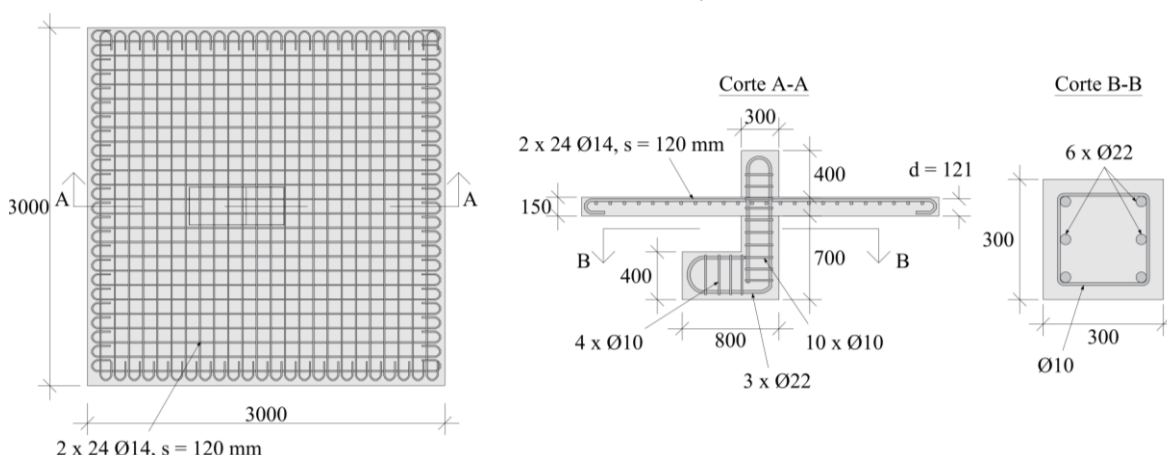
Foram realizados modelos computacionais levando em consideração o plano de simetria na direção norte-sul, aplicando restrições de deslocamento horizontais na direção Y das faces alinhadas com o plano de simetria norte-sul. A modelagem da viga metálica foi realizada como um sólido, sendo utilizado o material interface, aplicado a uma superfície de contato entre a viga e a laje, sendo restringido o deslocamento vertical da viga (direção Z) em suas extremidades. O carregamento foi aplicado em uma placa de aço no topo do pilar, e a força de reação foi mensurada por meio de monitores aplicados na mesma área em que foi restringido o deslocamento vertical das vigas, realizando-se o somatório dessas, Figura 8.

Tabela 3 - Principais parâmetros de cada espécime de ligação laje-pilar

Espécime	Excentricidade e (mm)	Armadura de Flexão	Armadura de Cisalhamento	Propriedades do Concreto		
				f_{cm} (MPa)	f_{ctm} (MPa)	E_{cm} (GPa)
P0A	0	1,0%	Não possui	34,6	2,6	33,9
P16A	160	Ø14		38,6	2,6	35,6
P30A	320	s = 120mm		30,4	2,6	32,1

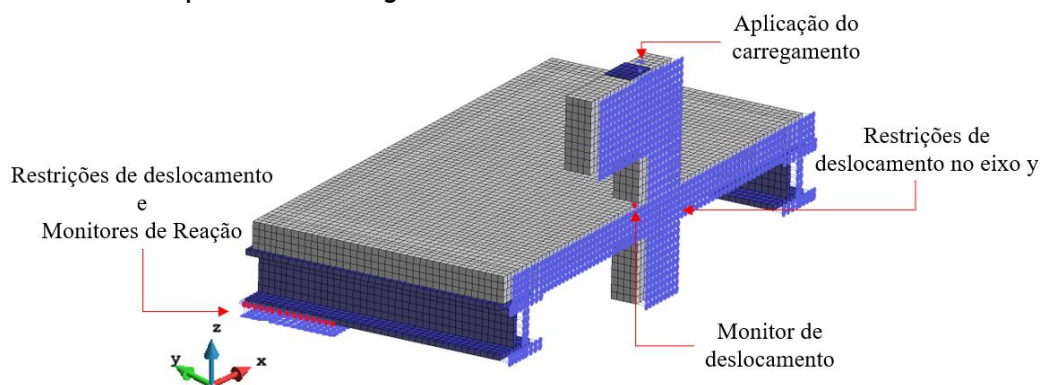
Fonte: Kruger (1999).

Figura 7 - Detalhamento das armaduras dos espécimes de ligação laje-pilar



Fonte: adaptado de Kruger (1999).

Figura 8 - Modelo computacional com viga metálica e interface de contato



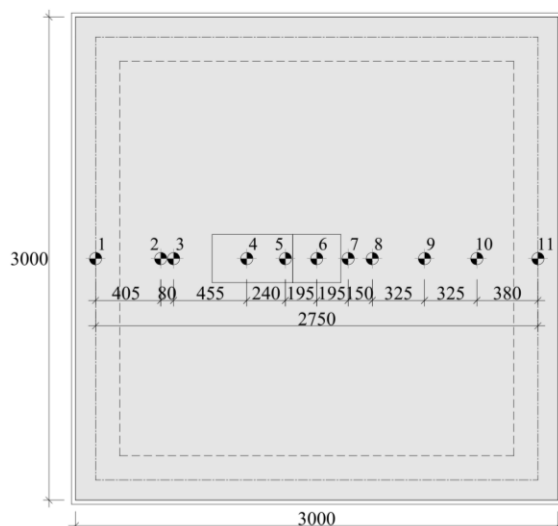
Para todos os modelos foi considerada a aderência perfeita entre o concreto e o aço das armaduras, e foram fixadas na área de contato entre a placa de carregamento com o concreto do pilar. Em relação os deslocamentos verticais do ensaio, esses foram medidos em onze pontos de referência distribuídos ao longo do eixo de simetria na direção norte-sul, conforme apresentado na Figura 9, sendo os maiores valores de deslocamento vertical verificados no ponto 5, o qual foi utilizado para estabelecer a curva força x deslocamento.

Malha de elementos finitos

No ATENA, são disponibilizados vários tipos de elementos finitos para elementos 1D a 3D, para a malha utilizada nos elementos sólidos de concreto e aço foram utilizados elementos hexaédricos do tipo “CSIsoBrick”, sendo adotado o modelo com oito nós, um em cada vértice. Em relação às armaduras, essas que são idealizadas em um elemento de treliça 1D, utilizando elementos finitos do tipo “CCIsoTruss”, sendo utilizado o modelo com dois nós. Esses modelos são usuais para esse tipo de modelagem, já utilizado por autores como Mendes *et al.* (2024).

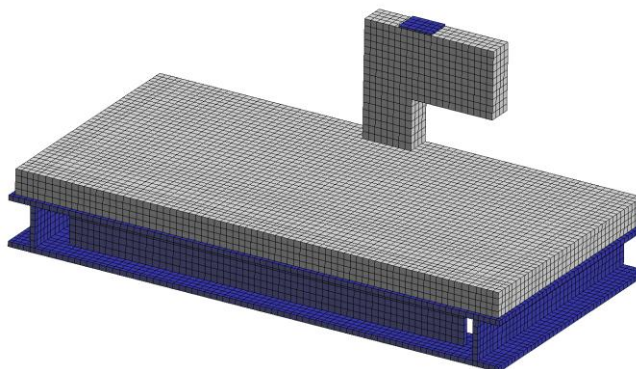
No que se refere às dimensões dos elementos finitos utilizados, foram utilizadas malhas uniformes na região da laje, mantendo-se sempre as dimensões para os elementos sólidos e os lineares, com elementos de dimensão máxima de 40 mm, Figura 10.

Figura 9 - Pontos de aferição de deslocamentos verticais das lajes



Fonte: adaptado de Kruger (1999).

Figura 10 - Malha de elementos finitos



Modelo constitutivo do concreto

No *software* ATENA, são disponibilizados diversos modelos constitutivos para o concreto, cada um com sua respectiva especificidade. Nesse trabalho, para representar a não linearidade do material, foi utilizado o modelo “CC3DNonLinCementitious2”, o qual combina modelos para o comportamento à tração (fissuração) e à compressão (plasticidade). Esse modelo constitutivo é usual nesse tipo de modelagem, sendo utilizado por autores como Maués *et al.* (2025). O modelo de fissuração é baseado na abordagem “*Smeared Crack*”, proposto por Bazant e Oh (1983), combinado ainda com o modelo de fissuras fixas ou rotativas com o critério de ruptura por tração de Rankine e com o amolecimento exponencial. Enquanto o modelo de plasticidade do concreto à compressão é baseado no “*Failure Surface*” proposto por Menetrey e William (1995).

Nesse contexto, o comportamento tensão-deformação do concreto por esse modelo é representado por quatro regiões, conforme apresentado na Figura 11. A primeira representa o comportamento linear sob tração antes do início da fissuração, a segunda caracteriza o trecho exponencial descendente de amolecimento do material, e posteriormente, a terceira e a quarta região descrevem o comportamento do concreto na compressão antes e depois de alcançar a resistência à compressão efetiva do concreto.

No primeiro trecho, o comportamento à tração do concreto apresenta uma relação tensão-deformação linear, comportando-se de forma linear elástica até a tensão de tração máxima do material (f_t^{ef}), antes da fissuração, obtido por meio da Equação 17.

$$\sigma_c^{ef} = E_c \cdot \varepsilon^{eq}, 0 \leq \sigma_c \leq f_t' \quad \text{Eq. 17}$$

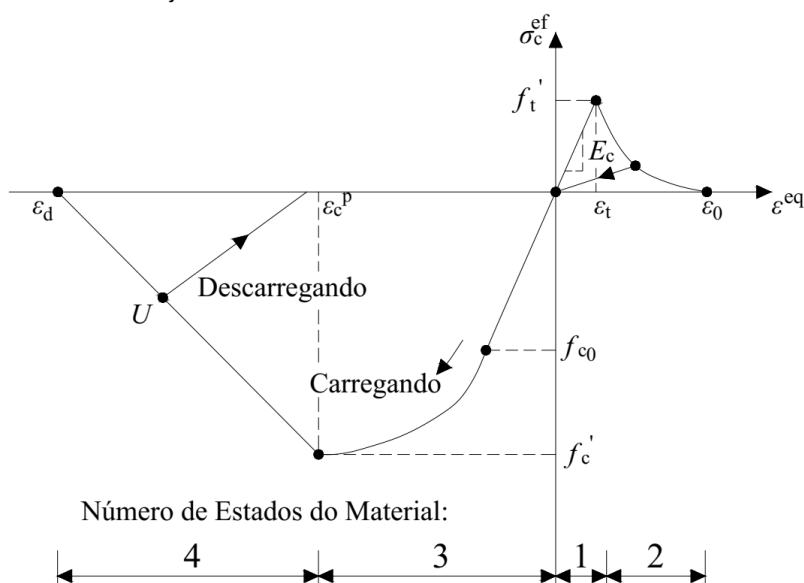
Onde:

E_c o módulo de elasticidade inicial do concreto;

f_t' a resistência à tração efetiva derivada da falha biaxial; e

ε^{eq} a deformação uniaxial equivalente.

Figura 11 - Lei tensão-deformação do concreto



Fonte: adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

No trecho exponencial descendente de amolecimento do material, é feito uso da Equação 18, advinda dos resultados experimentais de Hordijk (1991). Correlacionando a tensão de tração, com a abertura crítica da fissura (w_{tc}), Equação 19, e a energia de fratura (G_f), Equação 20, esse que representa a quantidade de energia absorvida por unidade de área da abertura de fissura zero até a abertura crítica da fissura, calculada seguindo as recomendações do *fip* Model Code 1990 (FIB, 1992). A fim de evitar que a energia de fratura total consumida seja dependente do tamanho da malha de elementos finitos, é introduzido o comprimento característico do elemento finito (L_t), obtido por meio da projeção do tamanho da malha na direção da fissura, utilizado para o cálculo do deslocamento de abertura de fissura (w_t), Equação 21.

$$\frac{\sigma}{f_t} = \left\{ 1 + \left(c_1 \cdot \frac{w_t}{w_{tc}} \right)^3 \right\} \cdot \exp \left(-c_2 \cdot \frac{w_t}{w_{tc}} \right) - \frac{w_t}{w_{tc}} \cdot (1 + c_1^3) \cdot \exp(-c_2) \quad \text{Eq. 18}$$

$$w_{tc} = 5,14 \cdot \frac{G_f}{f_t} \quad \text{Eq. 19}$$

$$G_f = G_{f0} \cdot (f_{cm}/f_{cm0})^{0,7} \quad \text{Eq. 20}$$

$$w_t = \varepsilon^f \cdot L_t \quad \text{Eq. 21}$$

Sendo:

c_1 é 3 (constante);

c_2 é 6,93 (constante);

G_{f0} o valor base da energia de fratura que depende do diâmetro máximo do agregado;

f_{cm} a resistência média a compressão do concreto;

f_{cm0} é 10 MPa; e

ε^f a deformações de fissuração inelástica;

Em relação ao comportamento tensão-deformação do concreto à compressão, o modelo de plasticidade é controlado pela “*Failure Surface*” de Menetrey-William (Menetrey; William, 1995), calculada em termos de três invariantes de tensão independentes, tensão hidrostática (ξ_s), tensão desviatória (ρ_s), e ângulo polar desviatório (θ_s), Equação 22. Em que são combinados os critérios de ruptura, o critério de Rankine de resistência máxima à tração, com a hipótese de Mohr-Coulomb de resistência ao cisalhamento, sendo considerado para o cálculo a adesão friccional (m_f), o raio polar (r), e a resistência coesiva (c_h), Equações 23, 24 e 25, respectivamente.

$$F(\xi_s, \rho_s, \theta_s) = \left[\sqrt{1,5} \cdot \frac{\rho_s}{f_c} \right]^2 + m_f \cdot \left[\frac{\rho_s}{\sqrt{6} \cdot f_c} \cdot r(\theta_s, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3} \cdot f_c} \right] - c_h = 0 \quad \text{Eq. 22}$$

$$m_f = 3 \cdot \left[\left(\frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c \cdot f_t} \right) \cdot \left(\frac{e}{e+1} \right) \right] \quad \text{Eq. 23}$$

$$r = \frac{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2(\theta_s) + (2 \cdot e - 1)^2}{2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\theta_s) + (2 \cdot e - 1) \cdot [4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2(\theta_s) + 5 \cdot e^2 - 4 \cdot e]^{1/2}} \quad \text{Eq. 24}$$

$$c_h = \left(\frac{f_c \cdot (\varepsilon_{eq}^p)}{f_c} \right)^2 \quad \text{Eq. 25}$$

Sendo:

e a excentricidade;

ε_{eq}^p a deformação do concreto sob compressão;

f_c a resistência à compressão do concreto; e

f_t a resistência à tração do concreto.

Os trechos ascendente e descendente, são representados por uma curva elíptica e linear, respectivamente. O trecho ascendente de endurecimento é calculado através da Equação 26, baseada em deformações, tendo o início do comportamento não-linear como um parâmetro de entrada, assim como, o valor da deformação plástica na resistência à compressão. Enquanto o trecho descendente de amolecimento é baseado em deslocamentos, em que a deformação plástica equivalente é transformada em deslocamentos através do parâmetro de escala de comprimento da malha L_c , fundamentado no trabalho experimental de Van Mier (1986).

$$\sigma = f_{c0} + (f_c - f_{c0}) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_c^p - \varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_c^p} \right)^2} \quad \text{Eq. 26}$$

Onde:

f_{c0} a resistência à compressão de início do comportamento não linear; e

ε_c^p a deformação plástica na resistência máxima à compressão do concreto.

Modelo constitutivo do aço

Para modelar as barras no *software* ATENA, foi utilizada a abordagem discreta, em que cada barra é modelada de forma individual e idealizada em um elemento de treliça 1D. Nesse sentido, foi utilizado o modelo constitutivo “CCReinforcement” para as barras de aço, devido a possibilidade de representar o material por meio de leis bilinear ou multilinear, permitindo considerar as fases elástica, de escoamento, de endurecimento e de ruptura do aço. Nesse trabalho, foram consideradas apenas as duas primeiras fases, inserindo-se no programa o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento (f_y) e a tensão de ruptura (f_u) com suas respectivas deformações (ε_{lim}), adotando os seguintes parâmetros apresentados na Tabela 4.

Modelo constitutivo da interface

Nas condições de contorno da laje, foi utilizado o material interface na ligação da laje com as vigas metálicas de suporte usadas no sistema de ensaio experimental de Kruger (1999). Essa escolha se deve ao fato de o material permitir simular o contato entre dois sólidos, baseado no critério de Mohr-Coulomb, em que quando configurado sem resistência à tração (f_t), a interface resiste somente a tensões de compressão, impedindo o deslocamento vertical para baixo, conforme a rigidez da viga, e permitindo que os cantos da laje fiquem livres para levantar, como um apoio de primeiro gênero. Assim, para modelar o contato entre a laje e a viga, foram utilizados os valores padrões disponíveis no *software* ATENA, alterando somente a resistência à tração, a qual foi igualada essa a zero, conforme exibido na Tabela 5.

Resultados computacionais

Deslocamentos verticais

A Figura 12 apresenta os gráficos do comportamento de carga versus deslocamento, comparando a análise computacional com a experimental, sendo possível observar uma boa correlação para a carga de ruptura e para o deslocamento dos espécimes. Além de apresentar previsões de carga e deslocamento últimos que se mostraram satisfatórios para os modelos.

Na Tabela 6, são apresentados os fatores de eficiência de deslocamento, $\delta_{u,(comp/exp)}$ e de carga, $V_{u,(comp/exp)}$, mensurados a partir da razão entre os resultados computacionais, $\delta_{u,comp}$ e $V_{u,comp}$, com os obtidos experimentalmente por Kruger (1999), $\delta_{u,exp}$ e $V_{u,exp}$. Desse modo, com base nesses fatores, foram obtidas suas respectivas, médias, desvios-padrão e coeficientes de variação.

Tabela 4 - Parâmetros adotados para o modelo constitutivo do aço

Espécime	Módulo de Elasticidade (MPa)	Aço – Ø14			Aço – Ø22		
		f_y (MPa)	f_u (MPa)	ε_{lim}	f_y (MPa)	f_u (MPa)	ε_{lim}
P0A	200000	460	500	0,025	460	500	0,025
P16A	200000	460	500	0,025	460	500	0,025
P30A	200000	460	500	0,025	460	500	0,025

Tabela 5 - Parâmetros adotados para o modelo constitutivo da interface

Rigidez Normal Elástica Inicial (K_{nn})	Rigidez de Cisalhamento (K_{tt})	Coesão (c)	Resistência à tração (f_t)	Coeficiente de Atrito (- ϕ)
MN/m ³	MN/m ³	MPa	MPa	
$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	1,0	0,0	0,1

Figura 12 - Comparação do comportamento carga versus deslocamento dos espécimes

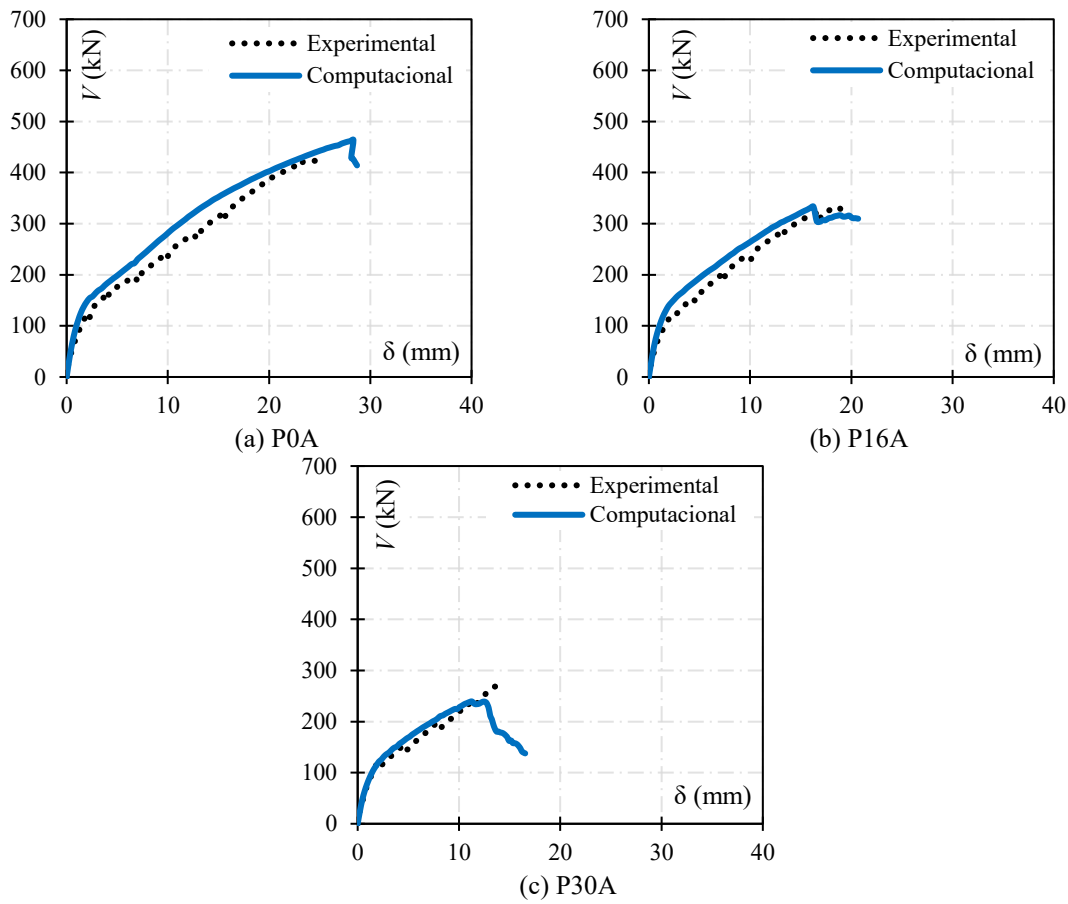


Tabela 6 - Fatores de eficiência de deslocamento e de carga última

Espécime	Experimental		Computacional		Eficiência	
	$\delta_{u,exp}$ (mm)	$V_{u,exp}$ (kN)	$\delta_{u,comp}$ (mm)	$V_{u,comp}$ (kN)	$\delta_{u,(comp/exp)}$	$V_{u,(comp/exp)}$
P0A	24,53	423,00	28,33	463,70	1,155	1,096
P16A	18,80	332,00	16,26	333,15	0,865	1,003
P30A	14,00	270,00	12,47	239,11	0,891	0,885
Média aritmética					0,970	0,995
Desvio-padrão					0,131	0,086
Coeficiente de variação					13,501	8,680

Analisando os resultados computacionais obtidos através da análise não linear, verifica-se que estes apresentam grande aproximação da previsão de carga última, com diferença média de apenas 0,5%, e do deslocamento máximo, com erro médio de somente 3,0%. Os parâmetros de eficiência mostram que os valores médios se aproximam de 1, enquanto os desvios-padrão e os coeficientes de variação ficam próximos de 8% para o carregamento e 13% para o deslocamento, evidenciando que os modelos computacionais tiveram uma boa precisão e uma baixa dispersão. Dessa forma, é exibido que as modelagens propostas obtiveram uma boa correlação do comportamento carga versus deslocamento, sendo perceptíveis as alterações de excentricidades.

Na Figura 13 é exibida a comparação entre os resultados experimentais de Kruger (1999) e os modelos computacionais realizados neste trabalho quanto ao padrão dos deslocamentos verticais, conforme o aumento do carregamento, sendo o deslocamento vertical monitorado em 11 pontos ao longo do eixo na direção Norte-Sul.

Outro comportamento adequado identificado pelos modelos computacionais, está relacionado à diminuição da ductilidade dos espécimes conforme o aumento da excentricidade, levando à ruptura com deslocamentos menores. Além disso, ao comparar as ligações laje-pilar P16A e P30A, verifica-se que o aumento da excentricidade provoca uma acentuação da assimetria para os mesmos níveis de carregamentos.

Evolução do dano

A evolução do dano foi verificada computacionalmente para todos os espécimes testados, conforme apresentado nas Figuras de 14 a 16. Analisando a fissuração dos espécimes, foi observado que todos tiveram sua primeira fissura provocada pelo momento fletor, caracterizada como uma fissura tangencial (ϵ_t), que se desenvolve ao redor do pilar. Porém, para os casos de punção excêntrica, essa fissura não contorna totalmente o pilar, apresentando distribuição assimétrica, verificações estas em conformidade com os resultados de Kruger (1999).

Figura 13 - Comparação dos deslocamentos verticais dos espécimes

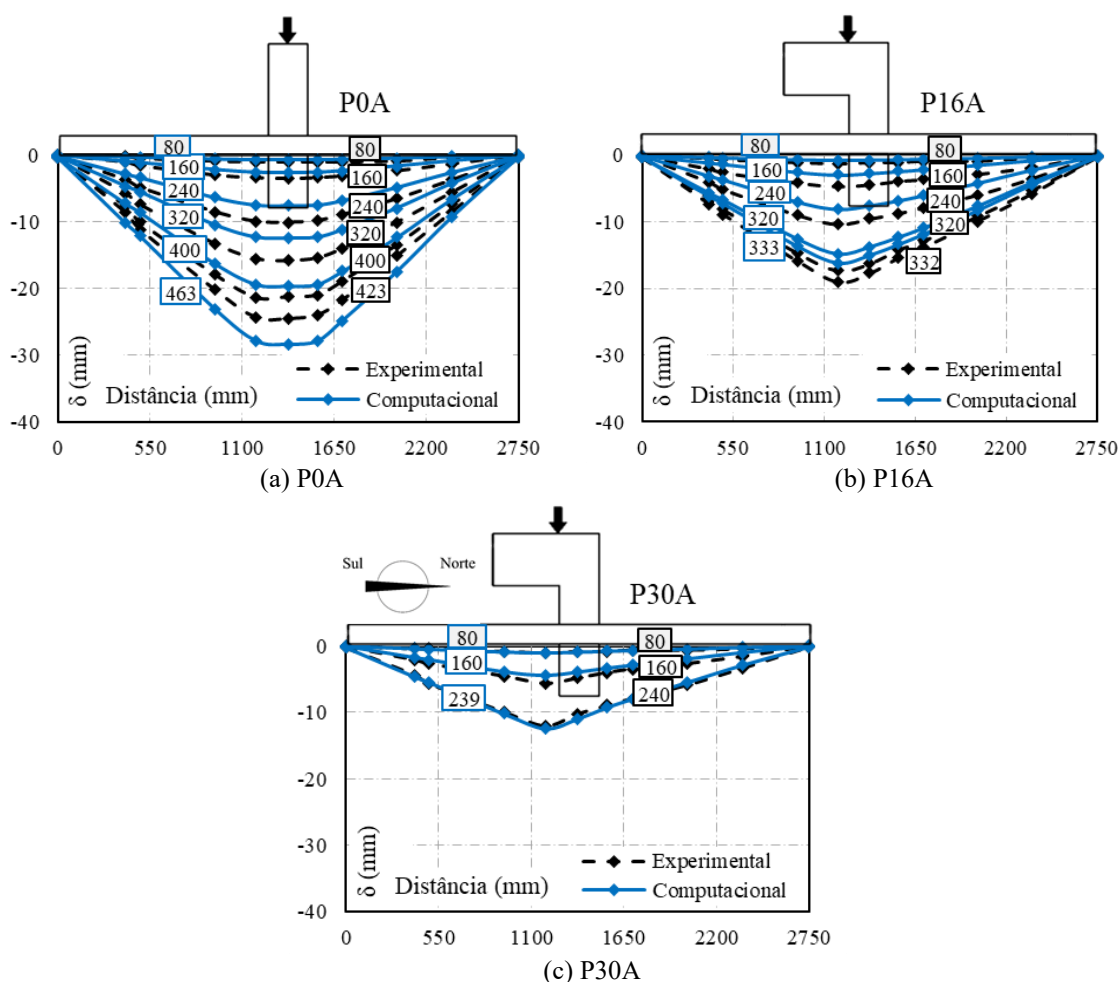


Figura 14 - Evolução do dano conforme o aumento do carregamento no espécime P0A

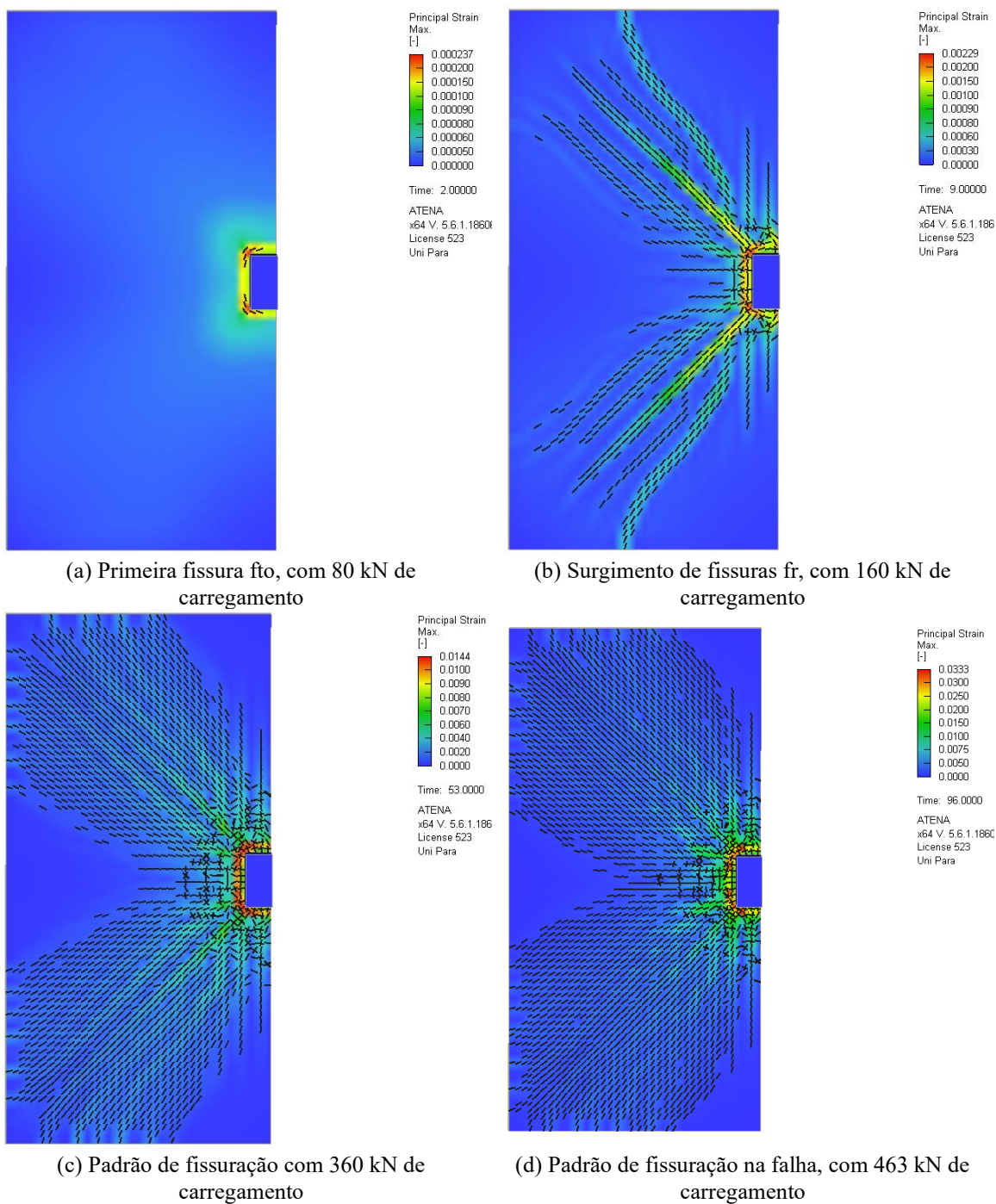


Figura 15 - Evolução do dano conforme o aumento do carregamento no espécime P16A

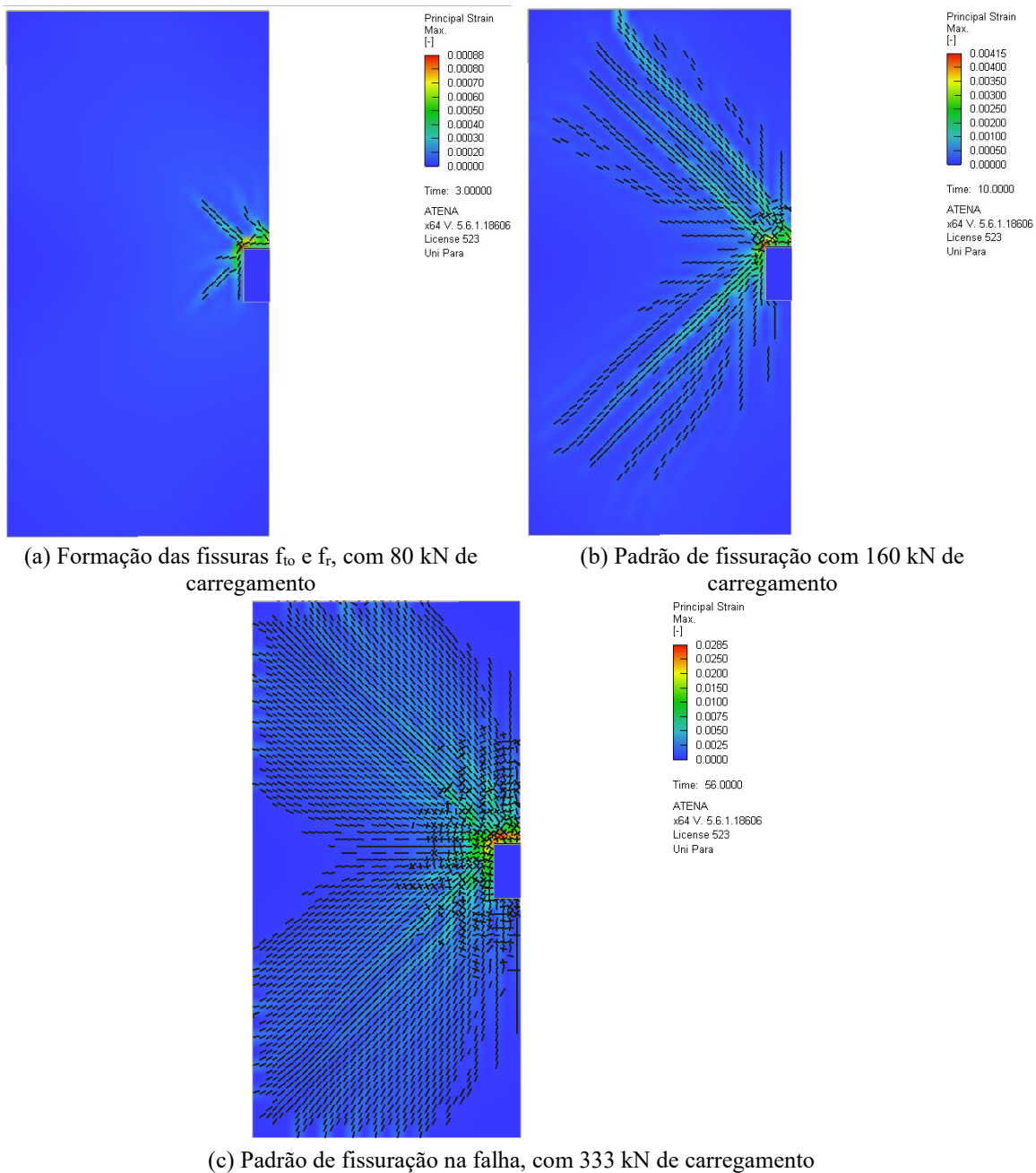
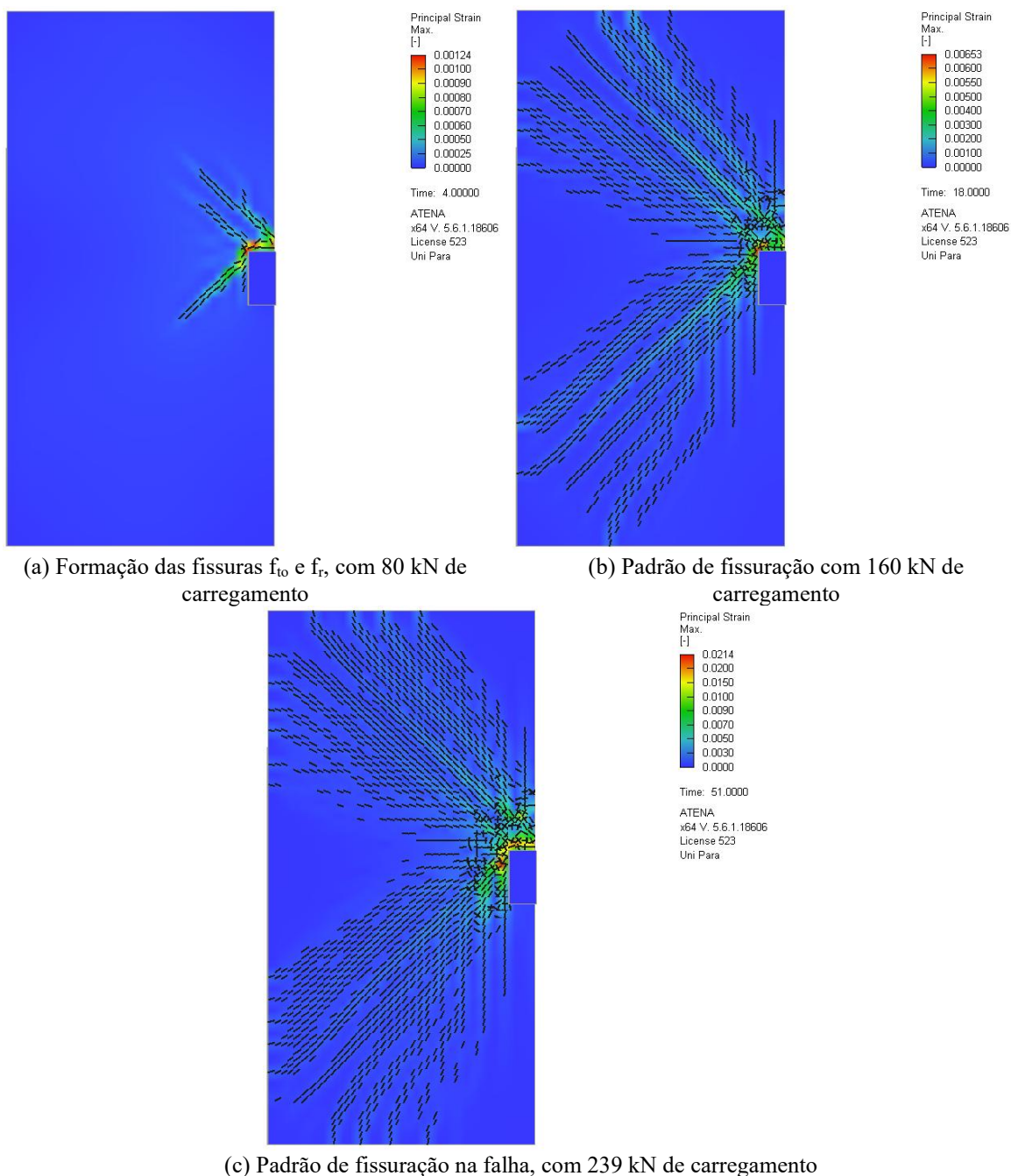


Figura 16 - Evolução do dano conforme o aumento do carregamento no espécime P30A



Superfície de ruptura

Da Figura 17 a 19, são apresentadas as superfícies de ruptura de todos os espécimes, sendo verificado que a laje com carga concêntrica apresenta uma fissura crítica que contornou o pilar, formando completamente o cone de punção e constatando uma distribuição simétrica da fissuração. Já nos casos de punção excêntrica, a ruptura ocorre de forma assimétrica, uma vez que a fissura crítica fica concentrada no sentido sul, em que é aplicada a excentricidade, formando um cone de punção reduzido, não sendo verificadas fissuras significativas no lado oposto à excentricidade.

Figura 17 - Superfície de ruptura do espécime P0A

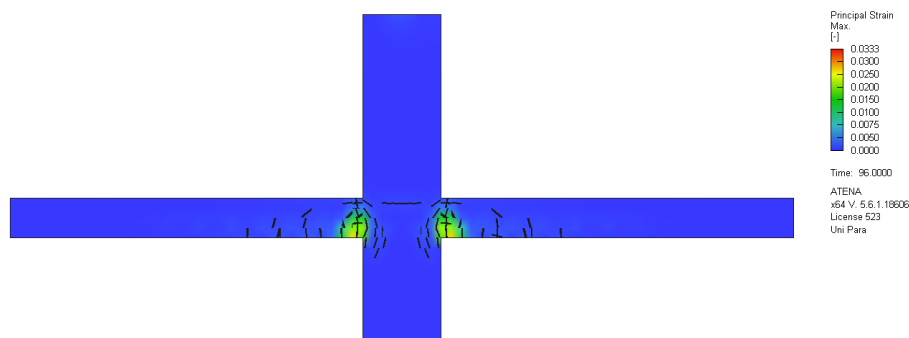


Figura 18 - Superfície de ruptura do espécime P16A

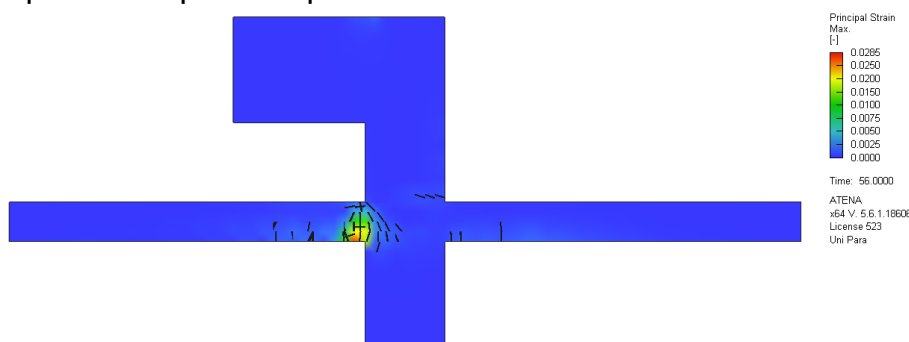
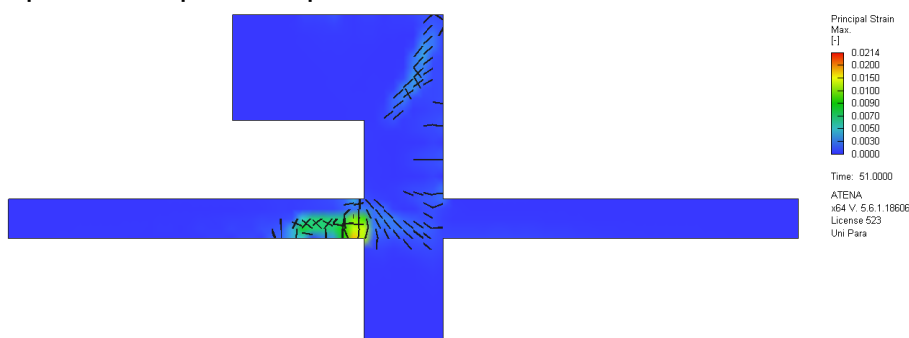


Figura 19 - Superfície de ruptura do espécime P30A



Análise paramétrica

Proposta de estudo paramétrico

Com o objetivo de avaliar o efeito do momento desbalanceado, foi realizado o aumento do comprimento do trecho em balanço que sai da parte superior do pilar, além de ter sido alterada a propriedade do material para linear elástica nesse mesmo trecho, permitindo a extrapolação dos resultados e o aumento do nível de excentricidade aplicada, transferindo-se o carregamento para a laje sem que o pilar rompesse, conforme apresentado na Figura 20.

A partir disso, foi estudado o efeito da excentricidade para as ligações laje-pilar sem armadura de cisalhamento, variando esse parâmetro de 40 em 40 mm, de 0 a 160 mm; de 80 em 80 mm, de 160 a 480 mm, e de 160 em 160 mm, de 480 a 1280 mm, conforme indicado nas Tabela 7. Essa série foi realizada a partir do modelo computacional P16A, sendo mantidas as propriedades do concreto e das armaduras para esses modelos.

Figura 20 - Alterações na parte superior do pilar

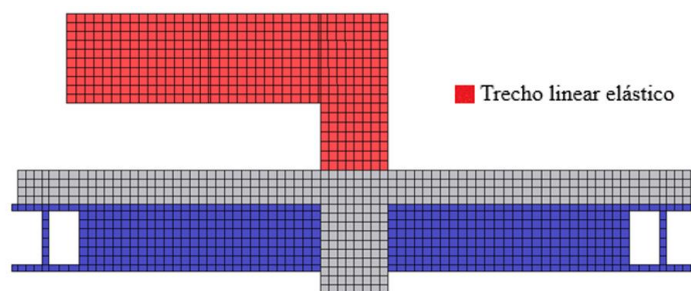


Tabela 7 - Modelos paramétricos

Modelo	L (mm)	d (mm)	f_c (MPa)	ρ (%)	e (mm)
P0A – e	3000	121	38,6	1,06	0
P4A – e					40
P8A – e					80
P12A – e					120
P16A – e					160
P24A – e					240
P32A – e					320
P40A – e					400
P48A – e					480
P64A – e					640
P80A – e					800
P96A – e					960
P112A – e					1120
P128A – e					1280

Resultados dos modelos paramétricos

Deslocamentos verticais

Com base no gráfico carga versus deslocamento apresentado na Figura 21, é possível observar que o aumento da excentricidade provoca diminuições relevantes na carga última e no deslocamento máximo das ligações laje-pilar, alterando a rigidez destas, obtendo-se reduções entre as lajes extremas (P0A – e; P128A – e) de 75,1% e 77,9%, respectivamente. Vale ressaltar que a excentricidade do modelo P128A – e é muito elevada, porém, mesmo para excentricidades menores, como do modelo P32A – e, são obtidas perdas significativas de 41,3% de resistência e de 49,5% de deslocamento ao comparar com o modelo de referência. Essas reduções estão diretamente associadas ao aumento do momento desbalanceado, que gera a concentração de esforço cortante na região alinhada com a excentricidade.

Na Tabela 8, é apresentado um resumo dos resultados de cada modelo em relação a suas respostas de carga última, deslocamento máximo e momento desbalanceado.

Ao correlacionar a resistência à punção com o momento desbalanceado, é possível verificar certa linearidade nessa relação, em que, conforme o aumento do momento desbalanceado, ocorre gradativa diminuição da resistência das ligações laje-pilar, conforme apresentado na Figura 22.

Figura 21 - Efeito da excentricidade no comportamento carga versus deslocamento

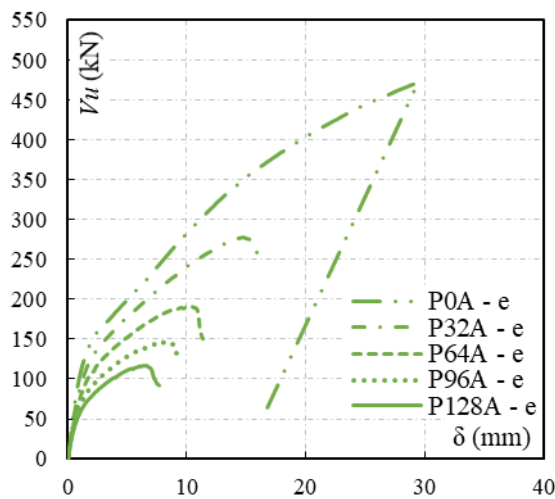
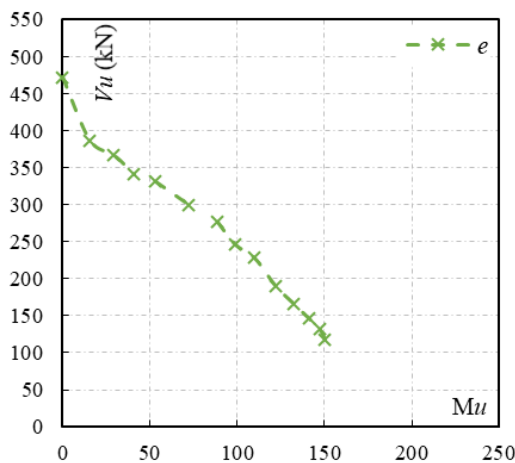


Tabela 8 - Resumo dos deslocamentos, cargas últimas e momentos desbalanceados

Espécime	δ_u (mm)	V_u (kN)	M_u (kN.m)
P0A - e	29,40	472,30	0,00
P4A - e	19,25	387,23	15,49
P8A - e	18,28	366,97	29,36
P12A - e	16,51	341,06	40,93
P16A - e	16,43	331,58	53,05
P24A - e	14,96	300,32	72,08
P32A - e	14,83	276,86	88,60
P40A - e	13,28	246,73	98,69
P48A - e	12,24	228,53	109,69
P64A - e	10,38	190,49	121,91
P80A - e	9,24	165,78	132,62
P96A - e	8,63	146,76	140,89
P112A - e	7,83	131,51	147,30
P128A - e	6,48	117,34	150,20

Figura 22 - Efeito do momento desbalanceado na resistência à punção



Na Figura 23 é apresentado o perfil de deslocamentos verticais das lajes, monitorado em 11 pontos ao longo do eixo na direção Norte-Sul. Ao analisar esses deslocamentos para lajes submetidas a diferentes níveis de momento desbalanceado, verifica-se que, no modelo carregado concentricamente (P0A – e), o deslocamento ocorre de forma simétrica na direção Norte-Sul, apresentando seu deslocamento máximo na região central, alinhada a aplicação de carga. Já nos casos de punção excêntrica, conforme o aumento da excentricidade do carregamento, são provocadas acentuadas assimetrias do perfil de deslocamento das lajes, sendo o pico de deslocamento concentrado mais ao sul, acompanhando o sentido de aplicação da excentricidade, o que indica aumento da concentração de tensões cisalhantes nessa região. Outro comportamento identificado está relacionado à diminuição do deslocamento máximo dos espécimes, conforme o aumento da excentricidade, levando à ruptura com deslocamentos menores.

Além disso, a partir do espécime P64A – e, é notada a ocorrência de uma inflexão do deslocamento vertical ao longo do eixo da laje, em que o lado ao norte tende a ser deslocado para cima, apontando para uma inversão de sinal da solicitação nesse lado e, consequentemente, uma diminuição da área resistente à punção.

Padrão de fissuração

Nas Figuras 24 a 28, é possível analisar o efeito da variação de excentricidade no padrão de fissuração na ruptura dos modelos computacionais. Para o modelo P0A – e, observa-se um padrão de fissuração simétrica, sendo formado o cone completo de ruptura pela fissura tangencial (f_t0), que se desenvolve ao redor de todo o perímetro do pilar. Já para modelos com momento desbalanceado, ocorre uma assimetria no padrão de fissuração, concentrando as fissuras radiais (f_r) no lado da aplicação da excentricidade e redução do cone de ruptura, devido ao fato de a f_t0 não contorna completamente o pilar, o que leva à diminuição da resistência à punção. Além disso, nos modelos com maiores excentricidades (P64A – e, P96A – e, P128A – e), é notável o surgimento de uma fissura tangencial do lado oposto a aplicação da excentricidade, lado Norte, partindo da superfície superior para a inferior, demonstrando inversão de sinal da solicitação nesse lado.

Estimativas normativas

Na Figura 29, são relacionadas as tensões associadas ao momento fletor (v_m) e ao esforço cortante nas lajes (v_u), ambos divididos pela tensão teórica, determinada com base nas formulações normativas (v_{Rc}), verificando-se a influência dessas tensões de acordo com as previsões normativas para cada laje. A linha contínua preta representa a situação ideal. Os resultados acima são considerados conservadores, enquanto os resultados abaixo são considerados inseguros.

Dessa forma, a Figura 29 mostra que a NBR 6118 (ABNT, 2023) apresentou resultados mais próximos da linha contínua, enquanto o ACI 318 (ACI, 2019) mostrou tendência ao conservadorismo conforme o aumento das tensões associadas ao momento fletor, em que, com o aumento da excentricidade, ocorre maior distanciamento do resultado computacional em relação ao teórico da norma americana.

Figura 23 - Efeito da variação da excentricidade nos deslocamentos verticais

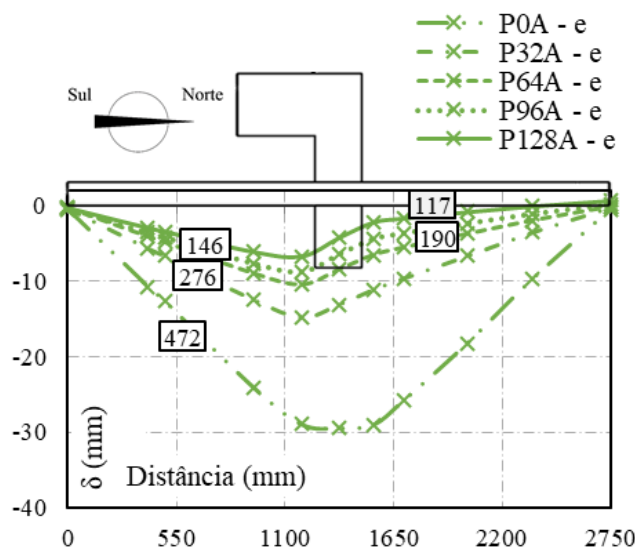


Figura 24 - Padrão de fissuração na ruptura do modelo P0A - e

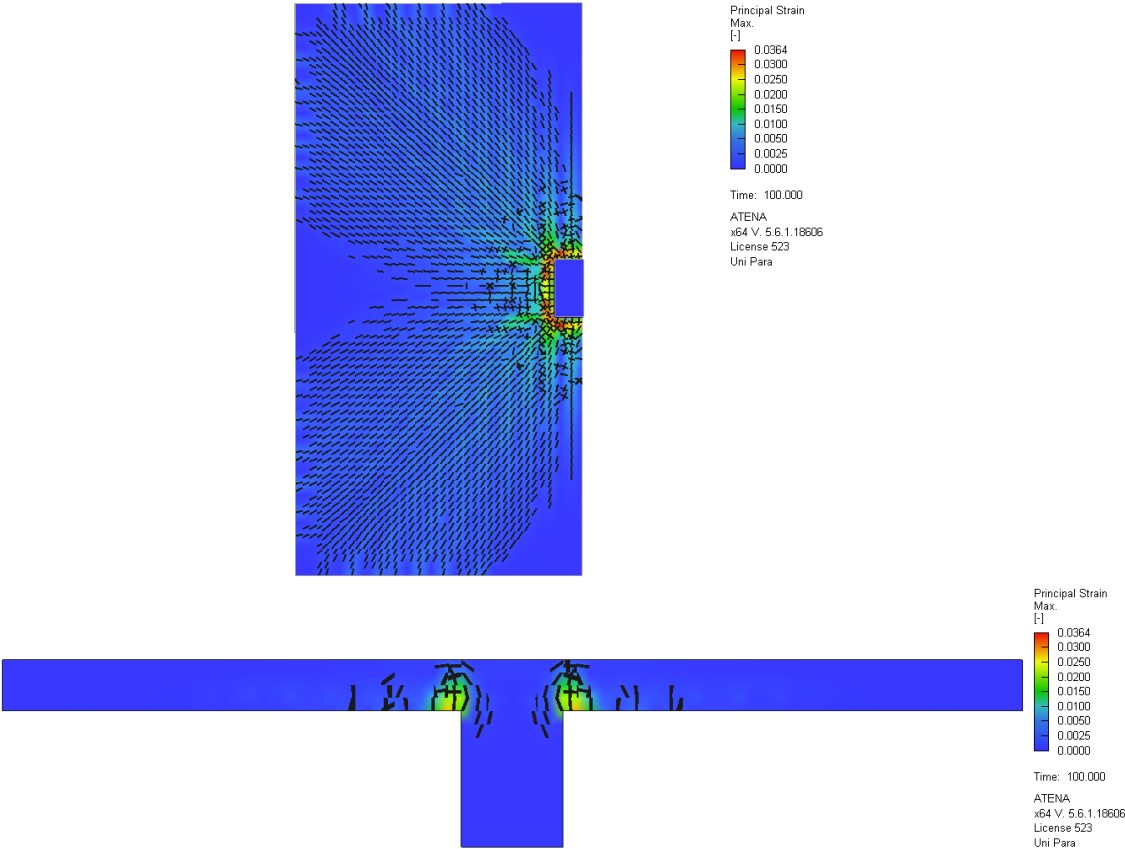


Figura 25 - Padrão de fissuração na ruptura do modelo P32A - e

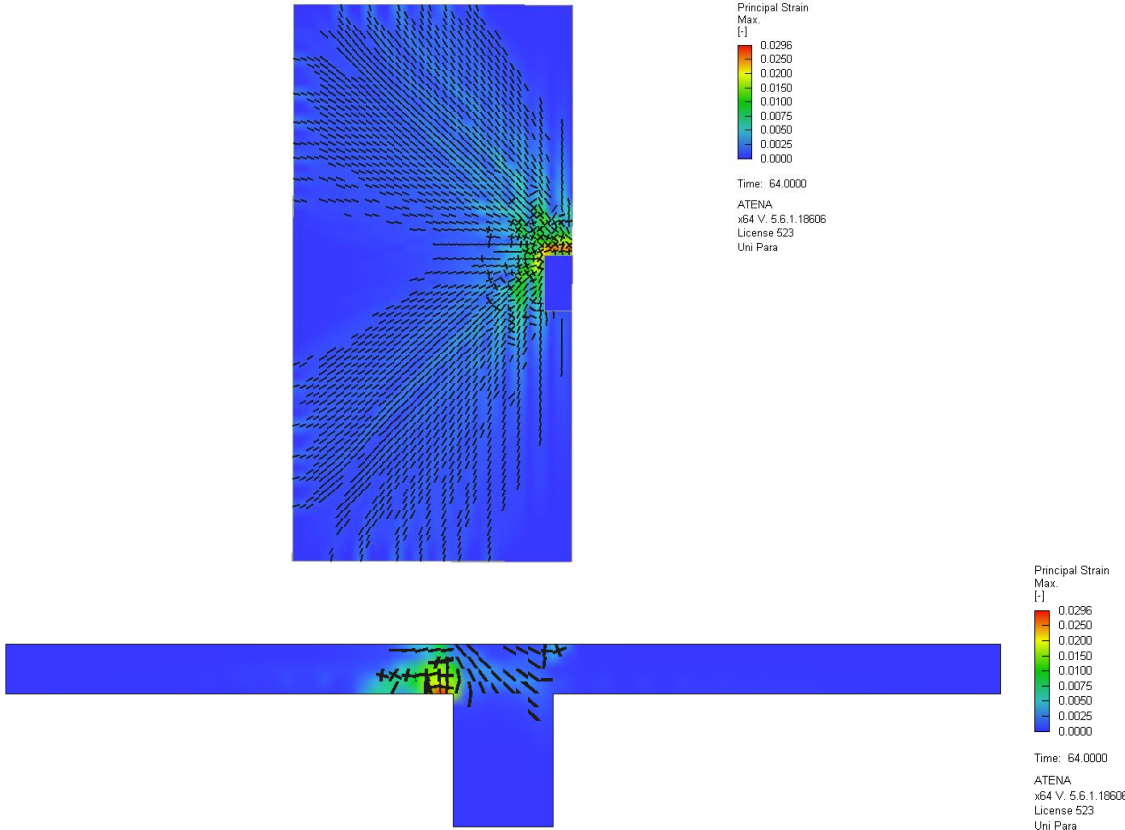


Figura 26 - Padrão de fissuração na ruptura do modelo P64A - e

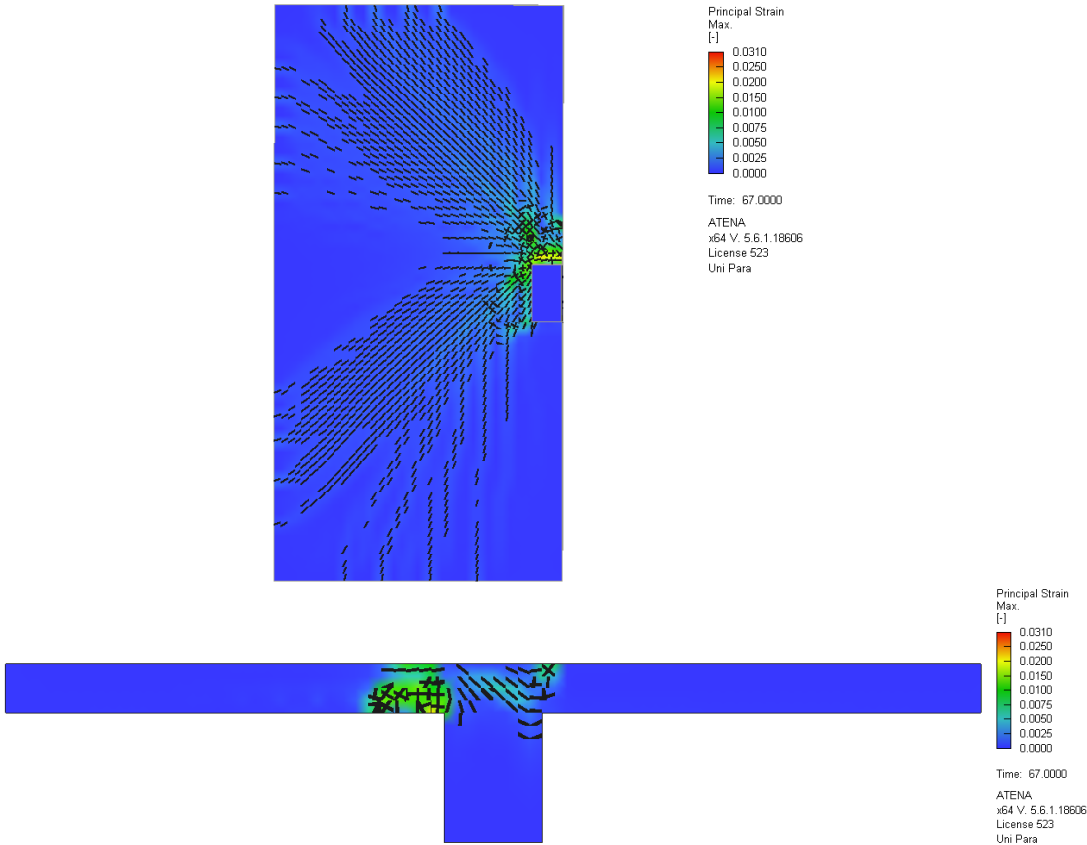


Figura 27 - Padrão de fissuração na ruptura do modelo P96A - e

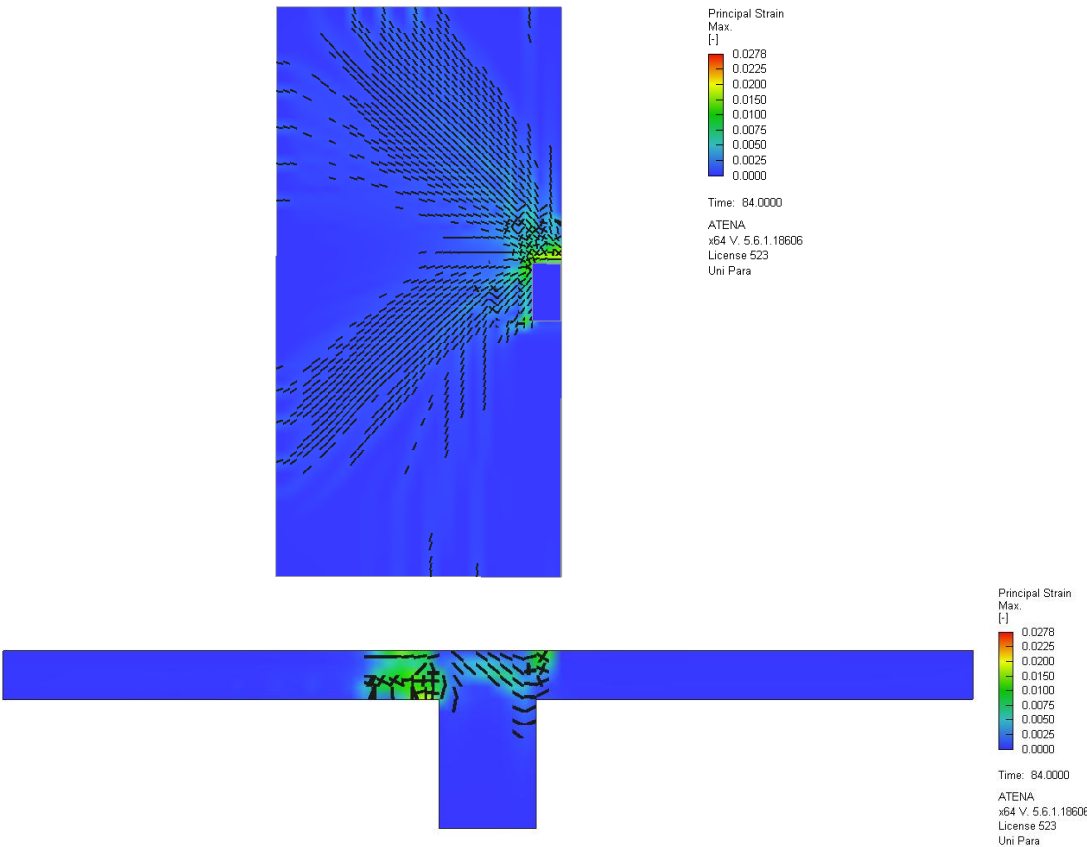


Figura 28 - Padrão de fissuração na ruptura do modelo P128A - e

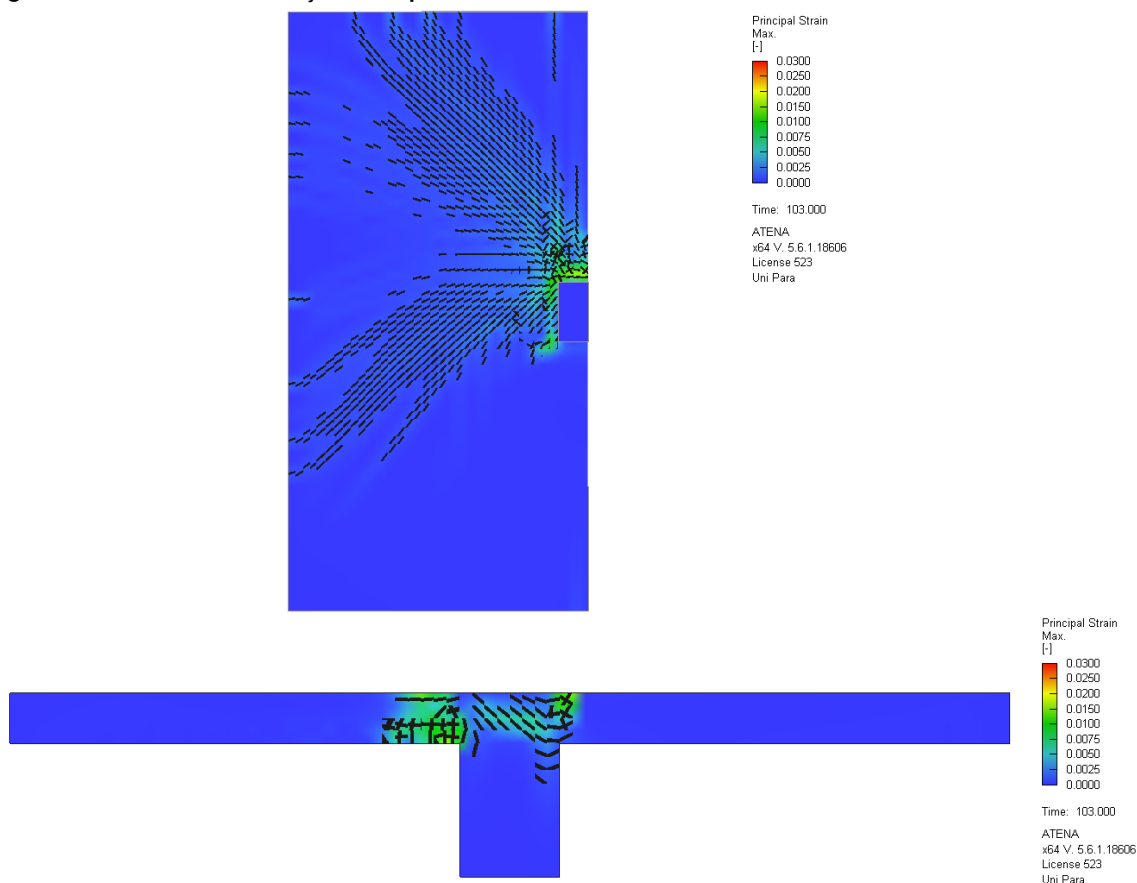
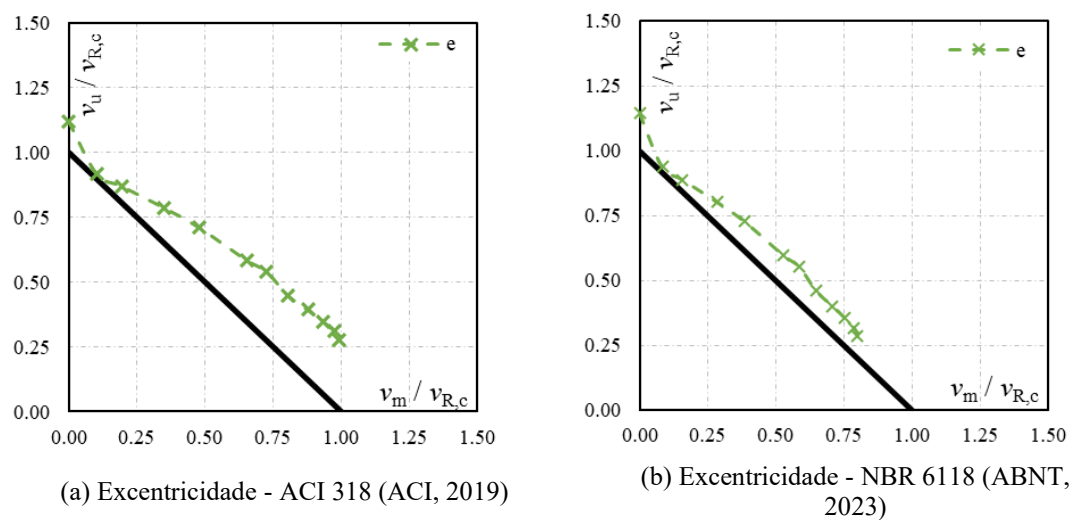


Figura 29 - Tensão resistente computacional e teórica



Conclusões

Os resultados da proposta de modelagem, utilizando o *software* ATENA, indicam uma grande aproximação dos resultados experimentais. A carga última apresentou um erro de apenas 0,5% enquanto, para os valores de deslocamento, foi obtido uma diferença de 3%. As previsões do modo de ruptura com evolução de dano demonstraram um padrão de fissuração igual ao observado por Kruger (1999). Dessa forma, essa estratégia de

modelagem mostrou-se eficaz para previsão de carga última e do modo de ruptura, possibilitando a realização de uma análise paramétrica.

Na análise paramétrica realizada para a verificação do efeito da excentricidade de carregamento, foram obtidas reduções máximas de carga última de 75,1% e de deslocamento de 77,9%, associadas ao aumento da excentricidade, verificando-se certa linearidade entre a redução de carga e o incremento de momento desbalanceado. A excentricidade também provocou alterações no padrão dos deslocamentos verticais, em que o aumento desse parâmetro ocasionou assimetrias no perfil de deslocamento e até a ocorrência de inflexões na laje de um lado para o outro, compatíveis com o padrão de fissuração apresentado, havendo a inversão de sinal da sollicitação no lado oposto à aplicação da carga. Para essa série, as normas não apresentaram resultados contra a segurança, com a norma brasileira demonstrando resultados mais próximos ao ideal, enquanto a norma americana obteve uma tendência conservadora com o aumento das tensões associadas ao momento desbalanceado.

Com isso, os resultados computacionais obtidos neste trabalho conseguiram expandir o conhecimento sobre o desempenho das normas para esses casos, contribuindo para o aprimoramento das práticas de projeto e para o desenvolvimento de diretrizes mais precisas na análise de ligações laje-pilar submetidas a momentos desbalanceados.

Referências

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318**: building code requirements for structural concrete. Farmington Hills, 2019.
- ASSOCIACAO BRASILEIRA DE NORMAS TECNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2023.
- BAZANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures**, v. 16, p. 155-177, 1983.
- CERVENKA, V. **ATENA program documentation**: part 1, theory. Prague: Cervenka Consulting, 2021.
- EINPAUL, J. *et al.* Punching shear capacity of continuous slabs. **ACI Structural Journal**, v. 113, n. 4, 2016.
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **Model Code 1990**: model code for concrete structures 1990. Lausanne: Special Activity Group 5, 1992.
- GOODCHILD, C. Rationalisation of flat slab reinforcement. **Research Focus**, n. 44, p. 10, 2001.
- HORDIJK, D. A. **Local approach to fatigue of concrete**. Delft, 1991. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Delft University of Technology, Delft, 1991.
- KRUGER, G. **Resistance au poinçonnement excentré des planchers-dalles**. Lausanne, 1999. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne, 1999.
- LIBERATI, E. A. P. *et al.* Failure analysis of punching in reinforced concrete flat slabs with openings adjacent to the column. **Engineering Structures**, v. 182, 2019.
- MANSOUR, W. *et al.* Improving the punching capacity of two-way RC flat slabs via external strengthening using various configurations of aluminum sheets. **Construction and Building Materials**, v. 420, 2024.
- MAUÉS, F. P. *et al.* Numerical modelling of Flat Slabs with diferente amounts of double-headed studs as punching shear reinforcement. **Buildings**, v. 15, p.960, 2025.
- MENDES, R. P. *et al.* Numerical evaluation of the punching shear strength of flat slabs subjected to balanced and unbalanced moments. **Buildings**, v. 14, n. 4, p. 985, 2024.
- MENETREY, P.; WILLIAM, K. J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. **ACI Structural Journal**, v. 92, n. 3, 1995.
- MUTTONI, A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 105, n. 4, 2008.
- SANTOS, E. V. **Punção em lajes lisas**: métodos de cálculo, prescrições normativas e exemplos de aplicação. Brasília, 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

SANTOS, J. B. *et al.* Investigating punching shear in slabs with unbalanced moments and openings. **Engineering Structures**, v. 299, 2024.

VAN MIER, J. G. M. Multi-axial strain-softening of concrete: part I: fracture; part II: load-histories. **Materials and Structures**, v. 19, n. 111, 1986.

ZHENG, B. *et al.* Effect of column size on punching behavior of flat slabs with square columns: numerical investigation. **Journal of Building Engineering**, v. 79, 2023.

Declaração de Disponibilidade de Dados

Os dados de pesquisa só estão disponíveis mediante solicitação.

Rodrigo Fernandes Moraes

Instituto de Tecnologia | Universidade Federal do Pará | Travessa Barão de Mamoré, 80, Guamá | Belém - PA - Brasil | CEP 66073070 | Tel.: (91) 98543-7201 | E-mail: rfernandesmoraes2015@gmail.com

Maurício de Pina Ferreira

Faculdade de Engenharia Civil | Universidade Federal do Pará | Rua Jari, 10, Conjunto Embrapa | Belém - PA - Brasil | CEP 66095-137 | Tel.: (91) 98834-2838 | E-mail: mpina@gmail.com

Editores: **Marcelo Henrique Farias de Medeiros e Eduardo Pereira**

Ambiente Construído

Revista da Associação Nacional de Tecnologia do Ambiente Construído

Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar, Centro

Porto Alegre - RS - Brasil

CEP 90035-190

Telefone: +55 (51) 3308-4084

www.seer.ufrgs.br/ambienteconstruido

www.scielo.br/ac

E-mail: ambienteconstruido@ufrgs.br



This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License.