ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

DOSSIÊ PPGEM 40 ANOS

Transformações Geométricas no Ensino de Geometria: diferentes apropriações na matemática moderna

Geometric Transformations in Geometry Teaching: different appropriations in modern mathematics

Maria Célia **Leme da Silva***
ORCID iD 0000-0001-6029-0490
Ana Paula **Jahn****
ORCID iD 0000-0003-0515-7536

Resumo

Este artigo constitui um estudo no âmbito de um projeto mais amplo acerca das relações entre a História da Geometria Escolar e o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Analisamos como um determinado saber – as transformações geométricas (TG) – circulou no contexto brasileiro durante o referido período. Sob uma perspectiva histórica, investigamos quatro livros didáticos produzidos entre as décadas de 1960 e 1970 por líderes do MMM. As questões orientadoras deste estudo foram as seguintes: quais são as semelhanças e diferenças nas abordagens das TG entre os diferentes livros? Como ocorreu a articulação entre as TG e a Geometria Euclidiana (GE)? O processo de inserção das TG por meio dos livros didáticos foi diverso, ressaltando a complexidade do diálogo e a viabilidade de conciliar demandas oriundas de culturas distintas: a acadêmica, como representante da produção científica, e a escolar, representante de experiências de práticas profissionais.

Palavras-chave: História da Geometria Escolar. Livro didático de Matemática. Campo acadêmico. Campo profissional. Geometria Euclidiana.

Abstract

The present work establishes a study within the scope of a broader project on the relationships between the History of school geometry and the Modern Mathematics Movement (MMM). We analyzed how a particular knowledge – geometric transformations (TG) – circulated in the Brazilian context during the mentioned period. From a historical perspective, we investigated four textbooks produced between the 1960s and 1970s by MMM leaders. The guided questions of this study were the following: what are the similarities and differences in the approaches to TG between the different books? How did the articulation between TG and Euclidean Geometry (GE) happen? The process of insertion of TG through textbooks was diverse, highlighting the complexity of the dialogue and the

* Doutora em Educação (Currículo) na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professora Associada da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Diadema e do Programa de Pós-graduação da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru e Rio Claro, SP, Brasil. E-mail: celia.leme@unifesp.br.
** Doutora em Didática da Matemática na Universidade Joseph Fourier (UJF-Grenoble, França). Professora Doutora do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), São Paulo, SP, Brasil e Pós-doutoranda do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, SP. E-mail: anajahn@ime.usp.br.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

prediction of reconciling demands arising from specific cultures: the academic one, as a representative of scientific production, and the school one, representing experiences of professional practices.

Keywords: History of school geometry. Mathematics textbook. Academic field. Professional field. Euclidean geometry.

1 Considerações iniciais

Iniciamos nosso artigo convidando os leitores a relembrar algumas considerações sobre um momento de mudanças significativas no ensino de Matemática que, no Brasil, ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM). Trata-se de um movimento renovador do ensino de Matemática que mobilizou, entre outros, matemáticos, professores de Matemática, pedagogos, psicólogos, epistemólogos, educadores em geral, de inúmeros países, para discutir mudanças no ensino de Matemática da Educação Básica. Foram realizadas conferências, seminários organizados pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), criados programas curriculares para o ensino de Matemática, grupos de estudo para divulgar e subsidiar os professores com cursos de formação, todos com o propósito de construir, coletivamente, uma nova proposta para o ensino de Matemática, produzir materiais didáticos com novos conteúdos e novas abordagens metodológicas. Concordando com Bloch (2001) sobre as dificuldades e o risco em delimitar um começo e um fim de um movimento histórico, preferimos situar historicamente o MMM entre as décadas de 1950 a 1980.

No Brasil, alguns marcos justificam o período delimitado, como os Congressos Nacionais de Ensino de Matemática[1], com a primeira edição em 1955, em Salvador/Bahia, sob a liderança de Martha Dantas[2]; a década de 1960, como o auge do MMM, com as primeiras publicações de livros didáticos modernos, em particular os livros de Osvaldo Sangiorgi[3], lançados a partir de 1963; a década de 1970, em que as críticas ao MMM se intensificam, em particular, a avaliação do matemático Elon Lages Lima[4], no 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, apontando “o ensino brasileiro seguindo modelos estrangeiros que não tiveram aprovação satisfatória nos países de origem” (Búrigo, 1989, p. 215), assim como a tradução

---

[1] O I Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática foi em 1955, Salvador/Bahia; o II foi em 1957, Porto Alegre/RS; o III foi em 1959, no Rio de Janeiro/RJ; o IV foi em 1962 Belém/PA; o V e último Congresso foi em 1966, São José dos Campos/SP.

[2] Martha Maria de Souza Dantas, será apresentada mais adiante no texto.

[3] Osvaldo Sangiorgi, será apresentado mais adiante no texto.

[4] Elon Lages de Lima (1929-2017), matemático, pesquisador e professor do IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, fez mestrado e doutorado (1958) na Universidade de Chicago, na área de topologia algébrica.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

para o português do livro de Morris Kline[5], com o título *O Fracasso da Matemática Moderna*, em 1976.

Internacionalmente, também há indicativos que sinalizam o início do movimento, tanto na América como na Europa. Como exemplo, citamos o CIEAEM – *Comission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*, criada em 1950, que propunha coordenar o trabalho psicológico, metodológico e prático, no sentido de melhoria do ensino de matemática, em diferentes países, o SMSG – *School Mathematics Study Group* (USA), em 1958, que produziu textos didáticos ditos *modernos*, traduzidos depois para o português; o Seminário de Royaumont, na França, em 1959, que resultou na publicação do livro *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*, em 1961, também traduzido para o português pelo GEEM – *Grupo de Estudos do Ensino da Matemática*[6]*;* e a realização da Primeira Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), ocorrida na Colômbia, em 1961.

De todo modo, uma das características centrais do MMM foi a tentativa de aproximar a matemática escolar da matemática acadêmica do século XX, de modo que os estudantes chegassem à Universidade mais familiarizados com conceitos, noções e a linguagem produzida pelos matemáticos do período. De início, a preocupação era com o curso secundário (atuais Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), propedêutico para o Ensino Superior, mas rapidamente espalhou-se para o ensino primário (atual Anos Iniciais do Ensino Fundamental) e a Educação Básica em geral (Kilpatrick, 2012).

O momento da MMM constitui um espaço privilegiado para examinar as articulações entre profissionalização/saberes/formação docente, nas quais as tensões estabelecidas entre o campo acadêmico e o campo profissional ficam evidenciadas (Valente; Bertini; Morais, 2021). Um desafio posto nas propostas modernizadoras foi procurar um diálogo entre os matemáticos (representantes do campo acadêmico) e os professores de matemática (representantes do campo profissional).

Dentro da proposta de estudar esse movimento em perspectiva da História da Educação Matemática, interessamo-nos por um saber específico da Geometria do ginásio: o das transformações geométricas (TG), visando analisar a inserção desse conteúdo no ensino e sua participação e/ou contribuição no movimento de produção de uma Geometria escolar no período do MMM. Isso porque, embora essa orientação do estudo de TG já estivesse presente

---

[5] Morris Kline (1908-1992), matemático e historiador da matemática, professor de matemática do Instituto Courant de Ciências Matemáticas, Universidade de Nova York.
[6] O GEEM foi criado em 1961, em São Paulo, e atuou até 1976, sempre sob a liderança de Osvaldo Sangiorgi.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

na reforma Campos de 1931, a partir das ideias de Félix Klein[7] do início do século XX – em particular com o foco na noção de função como conceito integrador dos diferentes campos da matemática – com a circulação das ideias modernizadoras na década de 1960, as TG voltam a ter papel de destaque, em especial por conta da possibilidade de articular seu estudo com a abordagem algébrica, orientação central na Matemática Moderna.

Se por um lado as TG retornam com a intenção de ressignificar o ensino da Geometria, de outra parte, a complexidade de inserir um novo conteúdo, acrescida de sua articulação com a Álgebra, resultou em intensos debates, críticas e apropriações diferentes entre as lideranças do MMM no Brasil, algumas delas verbalizadas por seus personagens, entre eles Benedito Castrucci e Martha Dantas:

> Então, o processo foi sair uma geometria também por meio de uma estrutura algébrica. Daí fizeram o estudo da geometria já no ginásio por meio de espaços vetoriais, que é uma estrutura algébrica. [...]. E o outro caminho foi *pelos grupos de transformações*, uma estrutura algébrica, uma ideia do Klein, mas agora passado a limpo para poder funcionar.
> Começamos a sentir um fracasso, e o fracasso para mim foi a Geometria [...] então eu dei um curso de espaços vetoriais e nos meus cursos todos, eu tinha muito êxito com os alunos-professores. E dessa vez eu fracassei, quer dizer, os alunos não reagiram bem, acabaram não fazendo boas provas [...] Eu acho que o ponto que eu senti aqui onde houve a queda foi a geometria. E também outros professores sentiram (Castrucci, 1988 *apud* Búrigo, 1989, p. 171, 209, grifo nosso)
> Já na década de 50, quando comecei a ensinar no curso secundário, o abandono da Geometria euclidiana era notório. A causa maior era, sem dúvida, o despreparo dos professores. [...] Era preciso reapresentá-la com uma nova roupagem e foi o que fizemos, em 1964 [...]. Das recomendações de eminentes matemáticos, deduzimos que o estudo da Geometria, através das *transformações geométricas*, permite assentar noções abstratas sobre bases intuitivas mais simples e mais sólidas, tornando-as compreendidas melhor e facilitando a demonstração de propriedades que os envolvem (Dantas, 2002 *apud* Duarte, 2007, p. 279, grifo nosso).

Nesse contexto, o objetivo do presente estudo é analisar, em perspectiva histórica, quatro livros didáticos produzidos entre a década de 1960 e 1970 – três deles publicados para o curso ginasial (antes da Lei 5692/71[8]) e o último para o curso de 1º grau – que inseriram o ensino das TG para alunos de 13 anos de idade (3ª série ginasial ou 7ª série do 1º grau). As principais questões norteadoras de nosso estudo são: como as TG foram tratadas nas quatro obras? Quais as semelhanças e diferenças na abordagem das TG entre os livros? Como os saberes do campo acadêmico e os saberes do campo profissional foram balizados nas referidas produções didáticas? No que segue, antes de explicitar os fundamentos teórico-metodológicos do estudo, discorremos de forma breve sobre as principais ideias da proposta modernizadora para o ensino

[7] Félix Klein (1849-1925), matemático alemão que liderou a primeira Comissão Internacional para estudo do Ensino da Matemática (CIEM), de modo a propor reformas do ensino.
[8] A Lei nº 5692/71 propôs uma nova estrutura para Educação Básica, que passou a ser: o ensino de 1º grau, com oito anos de escolaridade, e o ensino de 2º grau, com três anos (Brasil, 1971).

de Geometria.

2 As propostas de uma Geometria Moderna

O ensino de Geometria foi objeto de grandes debates e embates entre as lideranças brasileiras. O mesmo pode ser constatado no âmbito internacional e um exemplo foi a célebre frase do matemático Jean Dieudonné[9], durante o Seminário de Royaumont: “Se eu quisesse resumir numa frase todo o programa que tenho em mente, fá-lo-ia como slogan: Abaixo Euclides!” (OECE, 1961, p. 35). Diferentes propostas foram formuladas para a modernização da geometria, buscando uma articulação próxima com a Matemática do século XX. O professor Howard Fehr[10], um dos defensores do MMM nos EUA, apontou duas tendências para o ensino de Geometria, em 1962. A primeira, elaborada por G. D. Birkhoff[11], propunha uma modificação nos axiomas de Euclides, seguindo a forma geral de Hilbert[12]. Os axiomas de Birkhoff foram modificados por Edwin C. Moise e usados em textos experimentais em escolas dos Estados Unidos. Ele destaca que tal tendência procurava conservar a Geometria de Euclides, corrigindo seus defeitos por meio da introdução dos números reais. A segunda tendência teve início na Alemanha e recomendou o desenvolvimento da Geometria por meio das TG, fundamentada nas ideias de F. Klein. Nessa abordagem, a Geometria Euclidiana (GE) foi concebida como o estudo das propriedades de figuras que não se alteram sob a aplicação das transformações do grupo das semelhanças. Importante ressaltar que este grupo engloba as isometrias, que são transformações que preservam distâncias e ângulos.

Conforme assinalamos, a inserção das TG nos programas do curso secundário no Brasil aconteceu desde, pelo menos, a Reforma de Francisco Campos, em 1931, porém nas reformas seguintes, de 1942 e 1951, elas perdem força, são mencionadas pontualmente, sem destaque e sem relação com as demais noções ou tópicos do programa (Jahn; Magalhães, 2023).

Assim, é importante compreender como a tendência em incorporar as TG foi apropriada nos livros didáticos das décadas de 1960 e 1970, em especial, nos livros que tiveram a autoria ou a supervisão de matemáticos de referência da Universidade de São Paulo (USP). Em particular, nos questionamos: Quais as semelhanças ou diferenças identificadas a respeito das

[9] Jean-Alexandre Dieudonné (1906-1992), matemático, francês, um dos fundadores do grupo Bourbaki. Nicholas Bourbaki foi um pseudônimo usado por um grupo de matemáticos que defendiam uma evolução e revolução interna na Matemática a partir do desenvolvimento e estudo da noção de estruturas (Camargo, 2009, p. 43).

[10] Howard Fehr (1901-1982), matemático estadunidense.

[11] George David Birkhoff (1884-1944), matemático estadunidense.

[12] David Hilbert (1862-1943), matemático alemão.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

TG? Como foi feita a articulação entre a TG e a *clássica* GE?

3 Fundamentos teórico-metodológicos da pesquisa

Os quatro livros examinados foram obras de relevância nas décadas de 1960 e 1970, por diversas razões, entre eles, todos têm autores ou supervisores considerados autoridades no processo de apropriação dos ideários do MMM no Brasil, em particular, nos estados de São Paulo e da Bahia, e que mantiveram relações próximas com o grupo GEEM[13]. Criado em 1961, o GEEM, sob a coordenação de Osvaldo Sangiorgi, foi um marco decisivo para a constituição do movimento no Brasil, permitindo ampla divulgação da nova proposta para além dos círculos restritos de educadores e promovendo a realização de experiências apoiadas numa discussão articulada (Búrigo, 1989). O Quadro 1 informa as referências das fontes analisadas.

Título	Autor	Editora	Ano
Matemática – Curso Moderno para os ginásios – 3º vol.	Osvaldo Sangiorgi	Cia. Editora Nacional São Paulo	1967
Matemática – Curso Moderno – 3 Ciclo Ginasial	Alcides Bóscolo, Benedito Castrucci	Editora FTD São Paulo	1970
Ensino Atualizado da Matemática – curso ginasial – vol. 3	Omar Catunda, Martha M. de Souza Dantas, Eliana Costa Nogueira, Norma Coelho de Araújo, Eunice da C. Guimarães e Neide C. de Pinho e Souza	Edart São Paulo	1971
Curso Moderno de Matemática para ensino de primeiro grau – 7	Anna Averbuch, Franca Cohen Gottlieb, Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Liberman e Jacy Monteiro (supervisão)	Cia. Editora Nacional São Paulo	1975

Quadro 1- Livros didáticos selecionados para análise
Fonte: elaborado pelos autores com base em: Sangiorgi (1967), Bóscolo e Castrucci (1970), Catunda *et al*. (1971) e Averbuch *et al*. (1975)

A proposta é compreender como as TG chegaram à cultura escolar por meio dos livros didáticos. Segundo Badanelli e Cigales (2020), os livros didáticos constituem-se como fontes relevantes para investigação desde que a historiografia da educação colocou seu foco na cultura escolar, sendo considerado dispositivo fundamental para a transmissão de saberes e para a organização de práticas escolares. Além disso, nos momentos de turbulência, de inserções de novas abordagens, os livros didáticos ganham papel de destaque, por serem os primeiros a traduzirem propostas inéditas para as práticas pedagógicas. Chervel (1990, p. 191-192) sinaliza que:

> As coisas se passam de forma diferente quando à escola são confiadas finalidades

[13] Um estudo mais aprofundado sobre o GEEM pode ser lido em Lima e Passos (2008).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

> novas, ou quando a evolução das finalidades desarranja o curso das disciplinas antigas. [...]. De um lado, os novos objetivos impostos pela conjuntura política ou pela renovação do sistema educacional tornam-se objeto de declarações claras e circunstanciadas. De outro lado, cada docente é forçado a se lançar por sua própria conta em caminhos ainda não trilhados, ou a experimentar as soluções que lhe são aconselhadas.

Munakata (2012, p. 122) reitera o destaque dos livros didáticos como configurações peculiares próprias da escola e inerentes à cultura escolar:

> [...] noção de cultura escolar refere-se não somente a normas e regras, explícitas ou não, símbolos e representações, além dos saberes prescritos, mas também, e sobretudo, a práticas, apropriações, atribuições de novos significados, resistências, o que produz configurações múltiplas e variadas, que ocorrem topicamente na escola. [...] Uma dessas coisas peculiares à escola é precisamente o livro didático.

Assim, o exame de quatro coleções distintas permite cotejar como cada autor, ou conjunto de autores, compreende, apropria-se e consome os diferentes ideários que circularam, de maneira a criar e construir uma proposta didática própria a cada livro.

Seguindo na exposição dos teóricos que sustentam o estudo, assim como na apresentação da trajetória de análise, trazemos as reflexões de Fernandes e Garnica (2020) sobre o caminho metodológico de uma pesquisa na História da Educação Matemática, e optamos por abraçar uma postura qualitativa, dialogando com o objeto de investigação – as TG.

Desta maneira, nos debruçamos na revisão bibliográfica sobre o tema e o MMM. A tese de Jahn (1998) que apresenta uma abordagem histórica da gênese do conceito das TG, o estudo de Bkouche (1991) sobre os diferentes significados internos ao próprio conceito de TG e externos no que diz respeito às relações da disciplina e outras áreas do conhecimento, além de revisar os inúmeros estudos já desenvolvidos sobre o MMM, dentre os quais, destacamos: Búrigo (1989); Duarte (2007); Camargo (2009); Rios (2010); Silva (2014).

Feita uma ampla revisão, optamos por adentrar as fontes e extrair delas as características das TG dos quatro livros cotejados com as problemáticas identificadas na revisão bibliográfica de forma a construir as três categorias de análise que passam a nos guiar no exame de cada livro: (1) Abordagem das TG como objetos de ensino – o objetivo foi analisar como o conceito de TG é definido nos livros, por exemplo, se e como é relacionado com o conceito de função e quais propriedades são destacadas; (2) Articulação entre TG e GE – o objetivo foi analisar como a proposta de inserir as TG se integrou (ou não) com a GE configurada para as escolas, por exemplo, se e como se relaciona com o conceito de congruência de figuras; (3) Sequência de conceitos estudados sobre TG – o objetivo foi analisar se houve uma uniformização na escolha das TG a serem apresentadas e na ordem dos conceitos estudados. Antes de passar às análises dos livros, apresentaremos brevemente seus(suas) autores(as).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

4 Um pouco sobre os/as Autores/as dos livros analisados

Todos os livros didáticos do Quadro 1 apresentam no rol de seus autores ou supervisores pelo menos um(a) professor(a) que participava ativamente do GEEM. Entretanto, podemos distinguir dois grupos: o dos Matemáticos (doutores e/ou catedráticos em Matemática da USP[14]) que representam o campo acadêmico, o conhecimento da matemática do século XX; e o de professores(as) de Matemática que representam o campo profissional, o conhecimento da cultura escolar e suas dinâmicas. O primeiro grupo foi formado por Omar Catunda (1906-1986), catedrático de Análise; Benedito Castrucci (1909-1995), catedrático de Geometria, e Luiz Henrique Jacy Monteiro (1921-1975), doutor em Álgebra, todos homens[15], professores da USP que representavam autoridades nacionais na produção matemática do período, todos vinculados à Sociedade Brasileira de Matemática de São Paulo. Entre outras atividades, eles eram responsáveis por ministrar os cursos sobre a Matemática Moderna (MM) no GEEM, ou seja, formar os professores(as) no que diz respeito aos novos conceitos a serem incorporados no ensino, entre eles, as TG. A participação desses três matemáticos na elaboração dos livros didáticos foi no sentido de garantir a apropriação da MM de forma correta, precisa, com o rigor e a linguagem adequados para estudantes ginasiais (Duarte, 2007). No segundo grupo, estavam os(as) professores(as) de Matemática, licenciados em Matemática, como Osvaldo Sangiorgi (1921-2017), Alcides Bóscolo, Lucília Bechara Sanchez e Manhúcia Perelberg Liberman (1927-2017). Esses(as) professores(as) também ministraram cursos de formação no GEEM, porém tinham seu reconhecimento no campo profissional vinculado às práticas pedagógicas de *bons* professores de Matemática. Lucília Bechara Sanchez (2023), por exemplo, nos relatou que aprendeu a MM nos cursos do GEEM[16], pois durante sua formação na Pontifícia Universidade Católica de Campinas não teve contato com os tópicos da MM.

As demais autoras constituem um grupo somente de mulheres, porém não de São Paulo e sem vínculo com o GEEM. Duas delas eram do Rio de Janeiro: Anna Averbuch e Franca

---

[14] A Universidade de São Paulo foi criada em 1934, instituindo a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCLUSP) com a contratação de professores estrangeiros para formar a primeira geração de matemáticos brasileiros. Catunda foi assistente do professor italiano Luigi Fantappié em Análise Matemática; Castrucci foi assistente de Geometria na cadeira do professor Giacomo Albanese e Jacy Monteiro exerceu a função de auxiliar de ensino no curso de Álgebra Moderna ministrado por Jean Dieudonné (Duarte, 2007).

[15] Podemos identificar a diferença de gênero como um fator determinante no processo formativo estabelecido no GEEM, entretanto, este não é o nosso objeto de estudo.

[16] Lucília era professora de Matemática, concursada pela Secretaria de Ensino de São Paulo, na cidade de Conchas e veio para São Paulo no 2. Semestre de 1961, participar do curso de MM do GEEM, como comissionada.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

Cohen Gottlieb, e foram convidadas por Manhúcia Liberman para participar da produção do livro; e quatro delas eram de Salvador: Eliana Costa Nogueira, Norma Coelho de Araújo, Eunice da C. Guimarães e Neide C. de Pinho e Souza, todas graduadas em Matemática pela então Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia e professoras de Matemática da Secção Científica de Matemática do Centro de Ensino de Ciências da Bahia (CECIBA) da UFBA. Finalmente, ainda na Bahia, temos a professora Martha de Souza Dantas (1923-2011), licenciada em Matemática, professora da disciplina de *Didática Especial de Matemática* do curso de Matemática da Universidade da Bahia, coordenadora do CECIBA.

5 Análise dos livros de Sangiorgi e Bóscolo & Castrucci

Os livros de Osvaldo Sangiorgi (OS) e Bóscolo e Castrucci (BC) trazem as TG como apêndices de modo a não integrar as TG com a GE inserida no corpo das obras e, por esta razão, fizemos uma análise conjunta dos dois. Ambos os livros têm praticamente o mesmo título, indicando a presença da MM na coleção e foram publicados com três anos de diferença, na década de 1960, ainda com a organização do ensino secundário dividido em primário (4 primeiras séries), ginasial (4 séries) e colegial (3 séries).

O livro de OS contém 314 páginas, organizadas em 4 capítulos além do apêndice, sendo os capítulos 3, 4 e o referido apêndice destinados à Geometria, totalizando 63,7% do livro. Já o livro de BC tem 297 páginas, contendo 19 capítulos e o apêndice. Entre os capítulos, a parte referente ao ensino de Geometria encontra-se do capítulo 12 ao 19 e no apêndice, o que corresponde a 51% do livro. Podemos notar que ambos dedicam mais da metade de seus livros para a Geometria; e as TG, nos dois livros, estão no apêndice, sendo que o livro de OS dedica 14 páginas e o de BC 15 páginas. A presença das TG no apêndice denota a concepção dos autores em não integrar o seu estudo ao da GE. Tudo indica que as TG foram inseridas somente para atender às recomendações de um programa moderno defendido pelo GEEM[17].

Entretanto, a abordagem e as sequências de conceitos para o ensino das TG nos dois livros se diferenciam consideravelmente, em especial, na ordem e na forma como as TG são abordadas, como podemos observar no Quadro 2.

[17] Sangiorgi indica no prefácio que o livro está em acordo com o Programa que foi aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário do Ministério de Educação e Cultura, de 25 a 30 de novembro de 1963 e com as Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de matemática, curso secundário – 1º ciclo –publicadas no Diário Oficial de 19/01/1965.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

Transformações **Geométricas** ***Planas –*** OS	***Transformações do Plano –*** BC
Grupo das Translações*:* segmento orientado, medida algébrica, segmento equipolentes, translação no plano, translação de figuras planas, adição de translação, verificação de que as translações no plano, com relação à operação de adição, têm estrutura de grupo comutativo.	***Transformações do plano***: identidade e isometria.
Grupo das Rotações*:* rotação em ponto, nas figuras, arcos co-terminais, adição de rotações e verifica as quatro propriedades para justificar a estrutura de grupo comutativo,	***Translação***: define translação em um ponto, destaca as propriedades da transformação – isometria, que a uma reta não paralela à amplitude corresponde uma reta paralela a ela, a uma reta paralela à amplitude corresponde a própria reta, um ângulo corresponde a um ângulo congruente a ele –, translações iguais e inversas, composição de translações e verifica as propriedades da transformação com a composição.
Simetria Axial*:* define ponto simétrico, eixo de simetria, simetria axial, apresenta a simetria de um quadrilátero e de um triângulo.	***Simetria central****:* define para um ponto, destaca as propriedades da transformação, apresenta a composição de duas simetrias centrais de centro *O* e *O'* obtendo a translação de amplitude OO' e paralela a OO'.
Simetria Central*:* define ponto simétrico, simetria central, apresenta como exemplo a simetria central de um triângulo.	***Rotação***: define rotação em um ponto, destaca as propriedades da transformação e verifica as propriedades da transformação com a composição.
Aplicação prática da ***simetria axial*** – problema do menor caminho.	***Simetria Axial****:* define para um ponto, destaca as propriedades da transformação, apresenta duas possibilidades para fazer a composição de simetrias axiais: uma com eixos paralelos que resulta numa translação e outra com eixos perpendiculares que resulta em simetria central de centro na intersecção dos eixos.
Teste de atenção: conjunto com dez exercícios: 4 de translação, 1 rotação, 1 de translação seguida de rotação, 1 de simetria axial, 1 de simetria central e 2 de aplicações das TG para problemas de menor caminho.	***Isometria Direta e Inversa****:* relaciona com a ideia de deslizamento e sobreposição.
	Grupo das Transformações: retoma os exemplos de adição e de multiplicação nos conjuntos numéricos estudados anteriormente (Z, Q e R) como grupos comutativos, e anuncia que algumas transformações têm a mesmas propriedades com a operação de composição, exemplificando para o caso do grupo comutativo das translações em relação à composição e diz ser possível verificar o mesmo para as rotações.

Quadro 2 – Título do Apêndice e ordem dos conteúdos sobre TG nos livros de OS e BC
Fonte: elaborado pelos autores com base em: Sangiorgi (1967) e Bóscolo e Castrucci (1970)

A análise do Quadro 2 mostra várias diferenças: a primeira delas diz respeito à maneira de iniciar o estudo das TG. OS inicia o estudo com o Grupo das Translações, definindo a translação como: "a translação T_a, também chamada uma transformação dos pontos do plano, porque "transforma" um ponto A num ponto A', mediante o segmento orientado AA'" (Sangiorgi, 1967, p. 303), sem, contudo, definir anteriormente o que vem a ser transformação no plano. O uso da palavra *transforma* por OS, entre aspas, pode indicar uma maneira intuitiva

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

de abordar as TG, uma *preocupação com o pedagógico*, indicando aspectos do campo profissional, sem necessariamente estabelecer relação com o conceito de função, ou seja, o saber acadêmico das TG é abordado sem uma definição formal.

De outra parte, BC inicia o estudo das TG definindo transformação no plano como "uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π" (Bóscolo; Castrucci, 1970, p. 283) e, em seguida, apresenta a transformação identidade e o conceito de isometria, com suas propriedades. Considerando sua formação e atuação principal, inferimos que a opção é feita pelo aspecto formal do saber em questão, prevalecendo o campo acadêmico. Esta diferença sinaliza abordagens distintas, ou seja, OS não relaciona as TG com o estudo de funções, enquanto BC o faz e identifica e examina as propriedades decorrentes das respectivas funções.

No que diz respeito à escolha e à sequência de conteúdos, novamente os autores não seguem a mesma ordem: enquanto OS inicia apresentando os grupos comutativos de translações e rotações, BC opta por trabalhar primeiramente as transformações em geral e as respectivas propriedades, apresentando a estrutura de grupo comutativo somente ao final do Apêndice.

Em síntese, apesar de ambos destinarem o estudo das TG para o Apêndice, a abordagem realizada é evidentemente distinta, tanto na ordem em que as TG são apresentadas, e fundamentalmente, na abordagem: BC propõe um tratamento funcional, identifica os invariantes em cada TG, define isometria direta e inversa, e finaliza com as estruturas de grupo comutativo das translações e rotações, exatamente os mesmos temas que OS inicia o estudo das TG.

Os próximos dois livros inserem as TG no corpo do livro e buscam articular o estudo das TG com a GE, porém, novamente, de maneira muito diferenciadas. Assim, analisaremos em separado cada um dos livros.

6. Análise dos livros de Catunda *et al.* (CD) e de Averbuch *et al.* (GRUEMA)

O terceiro livro examinado, de autoria de Catunda, Dantas e colaboradoras, que designaremos por CD, está organizado em 4 capítulos, mais dois tópicos iniciais: Introdução e Noções de Lógica. Três capítulos são dedicados à geometria do plano: Capítulo II – *Reta*, que é desenvolvido de forma algebrizada e no qual são abordadas as TG na reta, a saber: translações, simetrias, transformações afins e homotetia; Capítulo III – *Geometria afim do plano* e Capítulo IV – *Geometria Euclidiana – Distâncias e Polígonos*. Os três capítulos perfazem um total de 111 páginas, o que corresponde a aproximadamente 78% do volume, revelando uma porcentagem expressiva dedicada à geometria e, em todos os capítulos, as TG se fazem

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

presentes. Os referidos capítulos e a introdução do livro indicam claramente a existência de uma abordagem inusitada para o ensino de geometria: primeiro a Geometria Afim, depois a Geometria Euclidiana, "só depois de explorada a parte puramente linear – espaços vetorial e afim de duas dimensões – é iniciada a parte métrica da geometria elementar", sendo essa uma "reformulação idealizada pelo professor Omar Catunda" (Catunda *et al*., 1971, p. VII-VIII). O Quadro 3 apresenta resumidamente a lista e a ordem de conteúdos relacionados às TG desenvolvidos nos referidos capítulos de geometria.

Capítulo II Reta	***Translação*** na reta real; ***Simetria*** na reta real; ***Conjunto das translações e simetrias***; ***Transformação afim*** ou afinidade na reta; ***Homotetia*** na reta.
Capítulo III Geometria Afim	***Translações no plano***: definição, composição de translações (adição de vetores), translações formam grupo comutativo; **Dilatações**: definição (multiplicação de vetor por escalar), composição de dilatações; **Propriedades** das translações e dilatações para definir espaço vetorial.
	Transformações no plano afim: definição de transformação no plano (correspondência pontual); definições de **translação**; **simetria central**; **homotetia**; **Teoremas** do produto de duas simetrias no plano e do produto de uma simetria por uma translação; **Grupo afim elementar**: conjunto de translações e simetrias pontuais. **Figuras congruentes**: que se podem transformar, uma na outra, por uma transformação do grupo afim elementar; **Homotetia no Triângulo.**
Capítulo IV Geometria Euclidiana	***Simetria axial*** (simetria em relação à reta); **Propriedades da simetria axial** (pontos fixos; semi-plano em semi-plano oposto; composição de simetria com ela mesma é Id; figura simétrica de uma reta é outra reta); **Definições**: duas figuras, simétricas uma da outra, em relação a um eixo r, dizem-se congruentes (**congruência por simetria**); **Figura simétric**a e **eixo de simetria** (uma figura que se transforma em si mesma por uma simetria axial); **Reta perpendicular** a partir da simetria axial; **Propriedade simétrica da ortogonalidade**; **Composição de simetrias** (com sistema de coordenadas); **Teoremas**: composta de 2 simetrias axiais em relação a eixos paralelos e em relação a eixos ortogonais; **grupo das congruências** (isométrico ou euclidiano): conjunto das transformações que se decompõem em simetrias axiais.
	Rotação: definida por composição de duas simetrias cujos eixos não são paralelos, nem ortogonais; Transporte de figuras (por transporte de segmento e de ângulo); casos de congruência de triângulos (por transporte de segmentos e de ângulos).
	Figuras semelhantes**:** definição: uma figura F é semelhante a outra figura F' quando F é congruente a uma figura F'' a qual é homotética de F; **semelhança é obtida pela composição de uma homotetia com uma congruência**, propriedades da semelhança (teoremas de homotetia). Casos de semelhança de triângulos e de figuras quaisquer.

Quadro 3 – Tópicos relacionados às TG no livro de CD
Fonte: elaborado pelos autores com base em Catunda *et al*. (1970)

O Quadro 3 evidencia uma grande quantidade de novos conceitos a serem abordados no curso ginasial, para além do estudo detalhado das TG – em particular: definição de espaço vetorial, plano afim, grupo afim elementar – todos eles necessários para definir figuras congruentes e semelhantes. A GE é abordada nos capítulos III e IV, apesar de a designação ser

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

somente no capítulo IV. Com a Geometria Afim[18] definida, as propriedades que podem ser justificadas envolvendo paralelismo e colinearidade são estudadas e algumas demonstradas; por exemplo, propriedades de paralelogramos e trapézios e, com a homotetia nos triângulos, o Teorema de Tales e suas consequências. No capítulo IV, o conceito de figuras congruentes é ampliado, permitindo transportar figuras pelas TG definidas e esse transporte se reduz ao transporte de segmentos e de ângulos. Como era de se esperar no estudo da GE, medidas de segmentos e de ângulos são conceituadas de maneira relativamente precisa. O transporte por congruência estará em foco no estudo da congruência de triângulos. De fato, os teoremas que enunciam estes casos são demonstrados mobilizando o transporte de segmentos e de ângulos, e, na sequência, permitem retomar o estudo das propriedades de triângulos e quadriláteros na abordagem Euclidiana. A título de exemplo, a demonstração do primeiro teorema relativo a triângulos isósceles: "a bissetriz do ângulo *A* é o eixo de simetria do triângulo isósceles" (Catunda *et al*., 1971, p. 11) é realizada considerando a simetria em relação à bissetriz do ângulo oposto à base.

Quanto à opção metodológica, o livro apresenta uma abordagem tradicional: os conceitos partem das definições, seguidos de teoremas frequentemente demonstrados e, ao final, exercícios mobilizando a linguagem algébrica, predominantemente. Tudo leva a crer que a escolha do estudo da geometria via TG, fortemente estruturada nas noções de espaço vetorial, plano afim, grupos de transformações, conceitos abstratos, acaba por mitigar os aspetos intuitivos e visuais das TG, tornando o texto próximo àqueles dos livros didáticos da chamada Matemática Acadêmica.

Finalmente, o livro de Averbuch *et al*. (GRUEMA[19]) está organizado em 12 tópicos, sendo possível identificar 4 deles dedicados à Geometria, o que corresponde a 46 % da obra. O primeiro (tópico 3), intitulado *Paralelismo e Direção* representa uma sistematização da relação de paralelismo, e tem por objetivos: reconhecer que a relação de paralelismo é uma relação de equivalência; identificar segmentos equipolentes; construir o ponto médio de um segmento; dividir segmentos em partes equipolentes e graduar uma reta. Os três últimos tópicos (10, 11 e 12) retomam o estudo de Geometria: Circunferências, Simetria e Congruência, respectivamente. Com isso, podemos dizer que o estudo das TG é iniciado por meio do conceito

[18] A Geometria Afim estuda as propriedades das figuras que podem ser deduzidas dos axiomas de incidência e paralelismo, limitando-se apenas a alguns axiomas de congruência. Em relação a esses axiomas, são considerados exclusivamente aqueles relacionados à noção de igualdade de segmentos ou à razão entre segmentos contidos numa mesma reta ou em retas paralelas.
[19] A sigla GRUEMA (Grupo de Ensino de Matemática Atualizada) passou a ser a denominação de autoria utilizada nos livros a partir de 1972, com os autores elencados no Quadro 1.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

de Simetria (tópico 11), que se refere à reflexão em relação a uma reta (chamada de simetria axial), cujos objetivos são:

> 1. Reconhecer e construir pontos simétricos em relação a uma reta; 2. Determinar o eixo de simetria de um segmento; 3. Determinar o simétrico de uma figura plana em relação a um eixo; 4. Determinar o eixo de simetria de figuras planas; 5. Identificar os invariantes de uma simetria; 6. Reconhecer e construir a mediatriz como eixo de simetria de um segmento e a bissetriz como eixo de simetria de um ângulo; 7. Identificar e aplicar as propriedades da mediatriz e da bissetriz; 8. Reconhecer e construir as medianas de um triângulo, 9. Construir perpendiculares a uma reta utilizando simetria (Averbuch *et al*., 1975, p. 143).

A primeira diferença identificada na obra, comparativamente às demais, é o estudo de somente uma TG no livro para a 7ª série[20], que é a simetria axial (ou reflexão em reta). Após exercícios exploratórios que permitem caracterizar pontos simétricos, a definição é apresentada: "Simetria axial de eixo $\overleftrightarrow{AB}$ é a função que transforma pontos do plano em seus simétricos em relação a $\overleftrightarrow{AB}$." (Averbuch *et al*., 1975, p. 144).

Observamos que a definição de Simetria axial é pautada no conceito de função, com destaque para suas propriedades, a saber: conservação de alinhamento, de distância, leva reta/segmento em reta/segmento e leva circunferência em circunferência (de mesmo raio). Com isso, inferimos que os autores buscaram caracterizar as principais propriedades invariantes da simetria axial, vista como uma função, em conformidade com a definição exposta.

Ainda examinando a abordagem das TG, é preciso ressaltar que os tópicos do livro têm uma estrutura comum que pode ser assim descrita: iniciam-se por grupos de *exercícios preliminares*; seguem caixas de textos sistematizando o que foi abordado em tais exercícios (com as seguintes denominações: *Anote*; *Você observou que*; *De um modo geral*; *Você lembra?*; *Aprendemos que*) e novos grupos de *exercícios de aplicação* são propostos (em alguns deles, seguem caixas de textos com a designação *Você provou que* ou *Você demonstrou*). Além disso, há uso de história em quadrinhos com dois personagens (crianças), como uma forma de introduzir textos com linguagem mais acessível aos alunos visando contextualizar, problematizar e/ou sistematizar as noções matemáticas em estudo. Nota-se que a definição de simetria somente é apresentada depois de um grupo diversificado de exercícios preliminares sobre pontos simétricos.

Depois da definição de simetria, o livro propõe *exercícios de aplicação* do conceito, que permitem *descobrir* uma maneira de encontrar o eixo de simetria dados um ponto *P* e seu simétrico *P'*, bem como uma forma de obter o ponto médio de um segmento por construção

[20] As autoras e o supervisor optaram por não apresentar a translação e a rotação, como estava presente nos outros três livros analisados.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

geométrica. Constatamos, ainda, como uma característica relevante da proposta, que os estudos de mediatriz e bissetriz são feitos com base no conceito de simetria axial, explorando e identificando as propriedades dessa isometria. Por exemplo, a bissetriz de um ângulo é abordada como eixo de simetria do ângulo, o que indica uma forma de desenvolver conceitos da GE via (ou a partir de) TG, no caso, a reflexão em relação a uma reta.

O mesmo pode ser dito com relação ao conceito de congruência de figuras. Com base em exercícios e histórias em quadrinhos é introduzida a ideia de aplicar simetrias axiais sucessivas a uma mesma figura de forma a fazê-la corresponder com outra figura sobrepondo-as, e então a definição de figuras congruentes é apresentada da seguinte maneira "Anote: Quando é possível transformar uma figura *F* em uma figura *G* por uma sucessão de simetrias, as figuras são congruentes." (Averbuch *et al*., 1975, p. 175).

Em síntese, o livro do GRUEMA caracteriza-se por propor somente uma das TG no livro do 7ª. série, a simetria axial, porém por meio de um estudo detalhado, a partir do conceito de função, que havia sido estudado em tópico anterior no livro, mobilizando diversos exercícios exploratórios, com construções geométricas, uso de histórias em quadrinhos, entre outros recursos pedagógicos para, finalmente, articular a simetria axial com os conceitos da GE e desenvolver um estudo dedutivo de figuras geométricas planas, em especial triângulos e quadriláteros.

7 Conclusões

Chegamos ao final do exame dos quatro livros e retomamos as questões norteadoras do nosso estudo: quais as semelhanças ou diferenças identificadas a respeito da introdução das TG? Como foi feita a articulação entre a TG e a GE? Para responder tais questões, construímos três categorias visando um estudo pormenorizado, cuja síntese apresentamos no Quadro 4 que segue.

Autor(es)	Abordagem da TG (definição)	Articulação entre TG e GE	Conteúdos
OS	Translação e Rotação, conjuntos munidos da operação de adição para justificar a estrutura de grupo comutativo.	Não houve, TG isoladas no Apêndice do livro	Translações Rotações Simetria Axial Simetria Central
BC	Transformações no plano como funções e estudo de suas propriedades. Grupo das Transformações, exemplificando com grupo comutativo das translações em relação à composição	Não houve, TG isoladas no Apêndice do livro	Transformações Translações Simetria Central, Rotação Simetria Axial Isometria Direta e Inversa
CD	Transformações no plano afim como funções e estudo de suas propriedades.		Translações, Dilatações

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

	Grupo afim elementar, grupo das congruências (isométrico ou euclidiano)	Integra as TG com a GE nos Caps. III e IV	Transformação no plano afim Grupo afim elementar Homotetia Simetria axial Grupo das congruências Rotação
GRUEMA	Simetria Axial como uma função e estudo de suas propriedades	Integra as TG com a GE nos tópicos Simetria e Congruência	Simetria axial

Quadro 4 – Síntese das categorias analisadas nos livros selecionados
Fonte: elaborado pelos autores

Ao realizarmos o cotejamento dos quatro livros de forma ampla, identificamos certas semelhanças, porém as diversidades ficam muito mais evidenciadas do que as similaridades. É possível dizer que temos quatro propostas claramente diferenciadas para abordagem das TG nos livros didáticos examinados.

A categoria de articular as TG com a GE no livro didático foi um divisor no processo analítico, visto que os livros de OS e BC optaram por não inserir as TG no corpo do texto, deixando-as isoladas (ou desconectadas) do estudo da GE "clássica", presente nos livros didáticos desde sempre. Tudo indica que a escolha por esta abordagem possa estar vinculada às experiências dos autores no campo profissional, como formadores de professores e docentes do curso ginasial.

No caso de OS, seu reconhecimento estava ligado às boas práticas profissionais, foi o primeiro autor a introduzir a Matemática Moderna, anunciou em seu livro "o bom bocado" para o ensino da geometria: "Não memorize demonstrações de teoremas" (Jahn; Leme da Silva, 2023), tema discutido e alardeado durante a década de 1950 como um dos principais problemas do ensino de geometria. Podemos inferir que seu objetivo na proposta de uma geometria modernizadora foi no sentido de favorecer a compreensão dos estudantes para o processo lógico-dedutivo presente nas demonstrações, em inserir exercícios exploratórios com tarefas experimentais de modo a valorizar uma geometria intuitiva antes do tratamento dedutivo. A abordagem das TG por meio da estrutura de grupos comutativos, como OS apresentou no Apêndice, possivelmente significaria um conceito de difícil compreensão.

O livro de BC foi elaborado por uma dupla de autores com formações distintas: Bóscolo era professor do curso secundário e representava o campo profissional, e Castrucci era professora da USP e tinha o domínio do campo acadêmico, da matemática do século XX. Em seu livro intitulado "Lições de Geometria Elementar", ele expõe sua posição sobre a abordagem:

> Há um movimento para a substituição do conceito geométrico no curso colegial e,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

> talvez, no ginasial, por uma algebrização da Geometria, tratando-a como um capítulo da Álgebra Linear. Acreditamos que esta inovação preconizada por grandes matemáticos não possa ser feita imediatamente, pois a nosso ver seria, no momento, um passo ousado (Castrucci, 1969, s.n., grifo do autor).

A posição de Castrucci (1969, s.n.) como "um passo ousado" pode ter sido decisiva para que Bóscolo concordasse em inserir as TG de forma *isolada* no Apêndice, haja vista que o papel de Castrucci na produção didática era no sentido de garantir o domínio científico dos livros de Matemática Moderna:

> Depois do GEEM, aí alguns colegas começaram a escrever livros de Matemática Moderna para o secundário, e eu não estava muito interessado. Mas aí um colega meu [Bóscolo] disse, não, ajude a escrever comigo, porque eu tenho medo na parte rigorosa escapar erro, então escrevei uma coleção da FTD (Castrucci, 1988 *apud* Duarte, 2007, p. 284).

De outra parte, mesmo como Apêndice, a proposta do livro de BC enfoca a abordagem funcional, buscando identificar invariantes para cada uma das TG e, somente ao final, apresenta a estrutura de grupo comutativo, o que caracteriza uma apresentação e tratamento distinto daquele feito por OS. De todo modo, podemos dizer que ambos priorizaram as experiências vivenciadas no campo profissional, na prática do professor em sala de aula, considerando inclusive a prática de formador de professores, em que Castrucci revela as dificuldades encontradas junto a professores nos cursos oferecidos pelo GEEM.

Outra característica evidenciada no Quadro 4 diz respeito às TG selecionadas para serem estudadas pelos estudantes de 13 anos. OS vai diretamente para as isometrias: Translação, Rotação, Simetria Axial e Central, enquanto BC introduz o conceito de transformação no plano como ponto de partida, apresenta as TG em ordem distinta daquela proposta por OS e inclui Isometrias Diretas e Inversas.

O livro de CD apresenta, inicialmente, a Translação e Dilatação, em conjunto; apresenta as transformações no plano afim, define grupo afim elementar, realiza o estudo da homotetia e entrelaça o conceito de congruência ao definir grupo das congruências, para finalizar com Rotação. A Simetria central não é feita em separado, fica integrada como caso particular das Rotação. Certamente, o livro de CD se diferencia das demais obras por realizar um tratamento completo das TG, o mais próximo possível dos conceitos desenvolvidos no campo acadêmico, sendo inclusive comparado, pelo próprio Castrucci, à abordagem de um curso de pós-graduação:

> [...] existem remanescentes da matemática Moderna na Bahia, existe a Martha de Souza Dantas que ainda acredita que a matemática Moderna deve ser ensinada, [...] apresentando resultados da *geometria ensinada por transformações.* Só sei que o que ela apresenta lá, eu ensino na pós-graduação. Se os alunos dela de lá aprendem é muito interessante, é excepcional. Mas não tem mais nada, ninguém mais está ensinando isso (Castrucci, 1988 *apud* Duarte, 2007, p. 281, grifo nosso).

É preciso considerar que o livro de CD foi elaborado por um coletivo de autores, de formações diferenciadas: Catunda, professor aposentado da USP, representava o campo acadêmico, enquanto Dantas e as demais autoras, representavam a experiência profissional acumulada no CECIBA. Neste caso, diferentemente de BC, tudo indica que o campo acadêmico prevaleceu comparativamente ao campo profissional, como considerou Martha Dantas, inclusive mencionando a baixa repercussão da obra:

> A redação dos novos textos só foi possível porque contaram com a colaboração de Omar Catunda, "que aceitou, inclusive, a proposta que lhe fizemos de usar, na abordagem da Geometria, as transformações geométricas, recomendação centenária – feita por Felix Klein, no século passado" (Dantas, 1993 *apud* Duarte, 2007, p. 23-24).
>
> [...] as ideias originais de Catunda não passaram pelo concreto porque, como bem disse Dienes – famoso pedagogo quando aqui esteve, Catunda era dos que queimavam a etapa da concretização. Assim, o algebrismo utilizado, sobretudo na introdução da geometria e a abstração decorrente da introdução dos conceitos foram responsáveis, em parte, pela rejeição dos livros (Dantas, 1993 *apud* Duarte, 2007, p. 217).

A avaliação de Martha reitera os desafios de buscar aproximar uma geometria abstrata e algebrizada da academia de uma geometria escolar e evidencia igualmente a confiança, depositada pela equipe, no que se refere ao conhecimento acadêmico de Catunda para colocar em prática o estudo das TG.

O livro do GRUEMA foi redigido por um coletivo de professoras sob a supervisão de Jacy Monteiro. Entretanto, apresenta uma proposta muito diferente daquela realizada por CD, ao selecionarem uma TG, a Simetria Axial, como a única a ser estudada na 7ª série e articulada à GE. Quando questionada sobre tal abordagem, Lucília Bechara Sanchez (2023) explica:

> *Lucília: Havia muito essa história de quando você faz um livro didático inovador, você precisa conversar com a matemática existente, para as pessoas entenderem e se envolverem, sem ficar com a ideia de: Ah mudou toda a matemática! Então quando trabalhamos as transformações no GRUEMA, tão importantes, começamos pelo seguinte: o que é trabalhado na geometria euclidiana? E vimos que eram: as congruências no 3º ginasial e as semelhanças no 4º ginasial, basicamente. Então pensamos: vamos trabalhar as congruências e as semelhanças via transformações geométricas.*
> *Entrevistador: E por que a translação e a rotação ficaram de fora?*
> *Lucília: Então, essa é uma pergunta que eu não saberia dizer.... Eu poderia arriscar... Primeiro que a translação... é um movimento pouco percebido, teórico vamos dizer assim... pouco motivador! E a rotação no espaço corresponderia no plano à simetria axial e assim favorecia na hora de entender a simetria no plano, fazendo uma rotação no espaço. Já uma rotação no plano, não é fácil, né, é mais difícil. E mais, no livro, a gente procurou fazer não muitas transformações para uma maior aceitação dos professores.*

A justificativa acrescenta aspectos pedagógicos ao objetivo de integrar as TG com os conceitos centrais da GE, e não pelo estudo exaustivo das TG. Novamente, demandas do campo profissional prevaleceram, mesmo tendo Jacy Monteiro como supervisor, ao retirarem as TG que pudessem ser complexas e priorizando uma integração com a GE presente nos livros

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

didáticos de antes. Vale considerar que Lucília Bechara, para além da formação obtida por meio dos cursos do GEEM, em 1961, participou do curso preparatório para os Colégios Vocacionais de São Paulo, que incluíam aulas de Psicologia e de Didática, tendo vivenciado, entre 1962 e 1968, a experiência de ser professora e coordenadora de matemática do Ginásio Vocacional de São Paulo, considerada uma experiência inovadora na educação pública do estado de São Paulo (Nakamura; Garnica, 2018).

Em síntese, a análise de como as TG foram inseridas nos livros reitera as tensões estabelecidas entre o campo acadêmico e o profissional. O exame do processo de inserir as TG na cultura escolar, por meio de livros didáticos, realizado por diferentes autores, sujeitos com histórico de formações e experiências diferenciadas, revela a complexidade do diálogo, da possibilidade de conjugar demandas vindas de duas culturas distintas: a acadêmica, como representante da produção científica, e a escolar, representante de experiências de práticas profissionais.

O MMM trouxe muitas aprendizagens, permitiu o contato com abordagens distintas, como as quatro propostas para o estudo de TG ora analisadas, explicitando a diversidade, as disparidades e até as ousadias frente a um movimento renovador. Não encontramos consensos para o estudo das TG mesmo num coletivo de lideranças, o que nos permite ressaltar a não existência de uma única representação das TG no ensino durante o MMM, e sim, a existência de múltiplas e diversas geometrias das – ou com – transformações.

Agradecimentos

À FAPESP, Processo 2023/04639-8, pelo apoio financeiro.

Referências

AVERBUCH, A. *et al*. **Curso Moderno de Matemática para ensino de primeiro grau – 7**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

BADANELLI, A. B.; CIGALES, M. Questões metodológicas em manualística. **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, v. 20, n.1, p. 1-7, 2020.

BKOUCHE, R. De la géométrie et des transformations. **Repères-IREM**, Grenoble, [s.v.], n. 4, p. 134-158, juil. 1991.

BLOCH, M. **Apologia da História ou O ofício de historiador**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

BÓSCOLO, A.; CASTRUCCI, B. **Matemática** – **Curso Moderno** – 3 Ciclo Ginasial, São Paulo: FTD, 1970.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

BRASIL. Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, p. 6377, 12 ago. 1971. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html. Acesso em: 20 jul. 2024.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 286 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre,1989.

CAMARGO, K. C. **O ensino da geometria nas coleções didáticas em tempos do Movimento da matemática Moderna na capital da Bahia**. 2009. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2009.

CASTRUCCI, B. **Geometria Curso Moderno**. São Paulo: Livraria Nobel S. A., 1969.

CATUNDA, O. *et al*. **Ensino Atualizado da Matemática** – Curso ginasial – volume 3. São Paulo: EDART-São Paulo, 1971.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação,** Porto Alegre, [s.v.], n. 2, p. 177-229, 1990.

DUARTE, A. R. S. **Matemática e Educação Matemática:** a dinâmica de suas relações ao tempo do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. 2007. 437 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FERNANDES, F. S.; GARNICA, A. V. M. Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática: éticas e políticas na inserção de novos sujeitos, cenários e conhecimentos. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 34, p. 1-16, 2020.

JAHN, A. P. **Des transformations des figures aux transformations ponctuelles. Etude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre** : relations entre aspects géomètriques et fonctionnels en classe de Seconde. 1998. 459 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Université Jospeh Fourier, Grenoble, 1998.

JAHN, A. P.; LEME DA SILVA, M. C. Não decore demonstrações de teoremas! – A Geometria Moderna de Osvaldo Sangiorgi. **RIPEM -** Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília, v. 13, n. 4, p. 1-19, set./dez. 2023.

JAHN, A. P.; MAGALHÃES, G. R. Transformações geométricas em livros didáticos do ensino secundário: indícios da geometria escolar no período de 1930-1950. *In*: CONGRESO IBEROAMERICANO DE HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2023, Heredia. **Memorias...** Heredia, Costa Rica: Universidad Nacional, 2023, p. 334-348. Disponível em: https://repositorio.una.ac.cr/handle/11056/28041?show=full. Acesso em: 20 jul. 2024.

KILPATRICK, J. The New Math as an international phenomenon. **ZDM – Mathematics Education**, Berlim, v. 44, n. 4, p. 563-571, 2012.

LIMA, F. R.; PASSOS, L. F. G.E.E.M. – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e o Movimento da Matemática Moderna. *In*: VALENTE, W. R. (org.). **Osvaldo Sangiorgi**: um professor moderno. São Paulo: Annablume Editora, 2008. p. 95-118.

NAKAMURA, M. E. F. P.; GARNICA, A. V. M. Aspectos do ensino de Matemática nos Ginásios Vocacionais paulistas: integração de disciplinas e Matemática Moderna. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20. n. 2, p. 85-112, 2018.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289

MUNAKATA, K. Livro didático como indício da cultura escolar. **História da Educação**, Porto Alegre, v. 20, n. 50, p. 119-138, 2012.

ORGANIZAÇÃO EUROPEIA PARA A COOPERAÇÃO ECONÓMICA - OECE. **Mathématiques Nouvelles**. Paris: OECE, 1961.

RIOS, M. S. B. **A proposta de ensino nos livros do GRUEMA**. 2010. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**. 3º Volume para os ginásios. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967.

SANCHEZ, L. B. **Entrevista concedida a Ana Paula Jahn, Maria Célia Leme da Silva e Guilherme Rodrigues Magalhães**. São Paulo, 18 de novembro de 2023.

SILVA, J. C. D. **As transformações geométricas nos currículos prescritos de matemática no ensino fundamental (1930-2010)**. 2014. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2014.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. F.; MORAIS, R. S. Saber profissional do professor que ensina Matemática: discussões teórico-metodológicas de uma pesquisa coletiva em perspectiva histórica. **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, v. 21, [s.n.], p. 1-20, 2021.

Submetido em 21 de Dezembro de 2023.
Aprovado em 28 de Março de 2024.