

Estruturas Multiplicativas e Tomada de Consciência: Repartir para Dividir¹

Maria Lucia Faria Moro²
Universidade Federal do Paraná

RESUMO – Conforme proposições de Vergnaud e Piaget, os objetivos do estudo são: descrever concepções infantis da divisão por partição expressas em tarefas de aprendizagem de repartir coleções numéricas; identificar níveis da tomada de consciência de relações típicas daquele tipo de divisão. Este processo seria favorecido por tarefas que alternam momentos de repartir coleções, de interpretá-las e de produzir notações interpretadas a respeito. A análise microgenética dos dados videografados descreve a natureza e as alterações das soluções de seis alunos (7 a 8 anos) de uma escola pública que, em tríades, realizaram as tarefas em duas sessões. São descritas hierarquias de concepções da divisão por partição, ligadas à execução prática e às notações. Dessas hierarquias, foram identificados níveis de tomada de consciência de esquemas e relações pertinentes àquela divisão. São discutidos o lugar do repartir na compreensão da divisão e o papel da tomada de consciência de ações nessa aprendizagem conceitual.

Palavras-chave: construção da divisão; estruturas multiplicativas; concepções infantis de divisão.

Multiplicative Structures and the Grasp of Consciousness: Sharing for Dividing

ABSTRACT – According to Vergnaud's and Piaget's proposals, the study aims to describe children's conceptions of partitive division expressed on learning tasks of sharing numerical collections, and to identify the grasp of consciousness levels of the typical relations which define that kind of division. This process is supposed to be enhanced by tasks, which alternate moments of practical sharing of numerical collections, notation production and their interpretation. The microgenetic analysis of videotaped data describes the nature and the changes of six students' solutions (7 to 8 years old) to those tasks. These students were attending a State Elementary School and they performed the tasks in triads, during two sessions. Results show children's conceptions of partitive division disposed on two hierarchies, one for the practical executions and other for the notations. Both hierarchies give support to the identification of the grasp of consciousness levels of schemata and relations inherent to that type of division. The status of the sharing activities on the comprehension of partitive division and the role of the grasp of consciousness of actions in this conceptual learning are discussed.

Key words: construction of division; multiplicative structures; children's conceptions of division.

Este estudo vem de um projeto de pesquisa sobre a aprendizagem das estruturas aditivas e das multiplicativas em suas relações psicogenéticas, segundo a ótica da epistemologia genética. Seus objetivos são o de reexaminar níveis da construção infantil inicial da divisão conforme a provável relevância do repartir grandezas na passagem das estruturas aditivas às multiplicativas e os de identificar e descrever níveis da tomada de consciência de relações básicas da divisão em tarefas de repartição. Como em outros estudos do mesmo projeto, as proposições de Piaget (1974; 1978) sobre a tomada de consciência e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1985; 1990; 1996) foram as referências principais para organizar as tarefas de aprendizagem propostas às crianças, dada a hipótese examinada: a construção de esquemas próprios à divisão seria ativada sobretudo quando as execuções práticas alternam-se com sua interpretação verbal e com a produção

e a interpretação de notações a respeito. Logo, a alternância cíclica dessas realizações amplificaria as possibilidades de o sujeito tomar consciência das ações e relações aritméticas em jogo para sua conceitualização.

Visto no quadro da epistemologia genética como aspecto da equilibração, o processo da tomada de consciência de esquemas é uma das dimensões que transforma esses esquemas em um conceito ou em um sistema de conceitos (Piaget, 1974). A perspectiva piagetiana a respeito entende a ação como um "saber fazer" com algum grau de autonomia. Porém, seja quando há sucesso precoce, imediato, da ação, ou quando há fracasso com sucesso obtido adiante, a sua conceitualização ocorre por tomadas de consciência *a posteriori*, o que Piaget (1978) explica segundo um movimento das regiões de adaptação ao objeto, periféricas da interação sujeito-objeto, para regiões centrais desta interação, as das coordenações internas das ações.

Por sua vez, Vergnaud (1990; 1996) propõe uma relação dialética complexa entre a prática (conhecimentos em ato) e a teoria (saberes ou conhecimentos teóricos) ao tratar da conceitualização humana. Apoiada em Piaget, sua perspectiva destaca o esquema como totalidade funcional na organi-

1 O estudo ora reportado foi realizado com o apoio do CNPq e da UFPR/PRPPG, respectivamente nas formas de bolsa de produtividade e de bolsa para professor pesquisador *sênior*.

2 Endereço: Rua Ubaldino do Amaral, 760, ap. 901, Curitiba, PR, Brasil 80060-190. E-mail: mlfmoro@sul.com.br

zação invariante das ações para uma determinada classe de situações, do que resulta a idéia de campo conceitual: um espaço de problemas ou de classes de problemas que, para sua solução, compreende conceitos, procedimentos e representações simbólicas em conexão estreita. É um problema qualquer situação que, na busca de sua solução, traz aos sujeitos (na escola, fora dela) a necessidade de descobrir relações e de explorá-las, de elaborar hipóteses a respeito e verificá-las. No caso do conhecimento matemático, esse processo de elaboração de relações (binárias, terciárias, quaternárias) é precoce, assumindo sentido ao fazer parte de estruturas mais amplas e complexas em momentos evolutivos posteriores (Vergnaud, 1990; 1991). Compostas por esquemas relacionais dinâmicos, as referidas elaborações atestam a atividade inferencial e dedutiva dos sujeitos de transformar relações, ao que subjazem invariantes operatórios como organizadores essenciais do conhecimento.

Quanto à divisão, é o campo conceitual das estruturas multiplicativas que a comporta. Refere-se ele ao espaço de problemas, cuja solução implica multiplicações e divisões de vários tipos e níveis de complexidade, além dos conceitos e teoremas que definem tais situações como tarefas de caráter matemático. Para Vergnaud (1983; 1985), as estruturas multiplicativas assumem, sobretudo, a forma de relações quaternárias de equivalência entre duas relações de dois elementos (binárias). Elas se referem a elementos de mesma natureza ou de natureza diferente, do que derivam diferentes classes e subclasses de problemas, conforme as formas relacionais em jogo (isomorfismo de medidas, produto de medidas) e a presença de números inteiros ou decimais, de grandezas discretas ou contínuas. Entre diferentes classes e subclasses de problemas de estrutura multiplicativa, o mesmo autor analisa dois tipos de divisão: a divisão por partição e a divisão por quota. As tarefas deste estudo são de divisão por partição: da totalidade (dividendo) descobrir a extensão da parte (quociente) conforme um escalar (o divisor), do que resulta uma medida como a da totalidade inicial sobre a qual o escalar opera. Porém, esse tipo de divisão foi aqui utilizado com sua roupagem de tarefa de repartição de coleções numéricas.

É conhecida a literatura sobre o quanto o repartir coleções é precoce entre as crianças, o que alimentou e tem alimentado discussões sobre a origem da divisão nas estruturas aditivas (Correa, Nunes & Bryant, 1998; Moro, 1999; Parrat-Dayan, 1985). Se repartir coleções é mais fácil para as crianças, tem sido apontado que lhes é mais difícil compreender as relações específicas da divisão (Kornilaki & Nunes, 1999; Lautert & Spinillo, 2002; Nunes & Bryant, 1997; Squire, Bryant & Correa, 1999).

Vergnaud (1985) refere-se a diversas dificuldades das crianças na compreensão dos dois tipos de divisão pela necessidade de serem efetuados cálculos relacionais diferentes: procurar e obter a extensão da parte (valor unitário de mesma medida) conforme o valor escalar indicado (na divisão por partição); ou procurar e obter o número de partes (a quota) conforme a extensão indicada (na divisão por "quota"). Se a divisão por partição é, em seus inícios, vista como menos difícil para as crianças, há os que defendem o contrário (Squire & Bryant, 2003). Squire e Bryant (2002) apontam menor dificuldade na obtenção do quociente quando o dividendo aparece (desenhos de elementos) agrupado pelo divisor em

divisão por partição, e pelo quociente, em divisão por quota, em comparação com o inverso (agrupar pelo quociente em divisão por partição, agrupar pelo divisor em divisão por quota) (em um e outro caso, os elementos são desenhados em disposição espacial diferente). Isto ocorreria por apoiar-se a criança no esquema de fazer "porções" ao repartir (seu modelo mental de divisão), algo psicologicamente diferente conforme os dois tipos de problemas.

Para controlar um possível efeito da disposição dos elementos a repartir em configurações diferentes, Squire e Bryant (2003) analisaram soluções aos mesmos tipos de problemas de divisão com os elementos desenhados na mesma forma de "grade", e quando a instrução verbal do pesquisador orientava a atenção das crianças para elementos em coluna ou em linha (separação pelo divisor ou pelo quociente). Mas o mesmo resultado foi encontrado: os modelos de divisão das crianças baseados no repartir (obter porções) explicariam aquela tendência dos resultados, conforme uma compreensão integrada dos tipos de divisão, e não as condições perceptivas. Esses resultados sugerem que, se em sua natureza, a divisão por quota é mais complexa que a de partição, tais diferenças seriam relativizadas conforme o tipo de procedimento utilizado para efetuar as operações correspondentes, principalmente quanto a formas de apresentação e representação dos problemas.

Empregando entrevista de tipo clínico, Lautert e Spinillo (2002) obtêm concepções de divisão de crianças do Recife (5 a 9 anos) cuja maior frequência traz a idéia de partes e não a de quota, por conta da familiaridade infantil com o repartir. Mas este esquema não traria a compreensão imediata das relações entre os termos da divisão, pois isto pede mais que a idéia de partição. Avaliado pelas autoras a partir das soluções "lápis/papel" escolhidas pelas crianças, o desempenho em problemas de divisão aparece ligado às concepções, quadro em que uma concepção matemática da divisão e a instrução escolar teriam peso importante. Brito e Correa (2003), analisando representações da idéia de divisão de alunos do ensino fundamental em problemas criados por eles a partir de uma conta, apontam o predomínio da idéia da divisão como distribuição, um modo de divisão partitiva.

Sem dúvida, há apoio na literatura para vermos a divisão por partição como relativamente menos complexa para as crianças que a de quota. Assim, neste estudo, sobre a construção inicial das estruturas multiplicativas na aritmética, propusemos às crianças problemas de divisão por partição, focalizando as relações básicas presentes no repartir coleções discretas de extensão numérica pequena. Pedimos-lhes, ainda, para identificar o número de partes equivalentes repetidas, pelo significado dessa inferência para a multiplicação, uma operação oposta a e/ou recíproca da divisão (Vergnaud, 1985). Mas, lembramos, a construção conceitual matemática faz-se integrada à de seus sistemas simbólicos de representação, estes a ela inerentes (Vergnaud, 1985; 1990).

A literatura traz resultados significativos sobre a construção dos sistemas da escrita numérica como um objeto de conhecimento em si. Diferentes trabalhos mostram como são complexas e precoces as realizações das crianças de dar significado às marcas de quantificação que encontram e que produzem em seu cotidiano. E diversos autores defendem duas dimensões indispensáveis a serem articuladas

na educação matemática: a da produção, pelas crianças, de símbolos, de marcas para as quantidades, e a da sua própria interpretação dessas marcas, porque a transformação dos sistemas de escrita numérica só se faz por meio de sua interpretação pelo sujeito (Sinclair, 1990; Sinclair & Scheuer, 1993; Sinclair & Sinclair, 1986; Sinclair, Tièche-Christinat & Garin, 1994).

Lautert e Spinillo (2002) evocam a diferença entre conhecimento procedural (resolver o problema) e conhecimento verbal (definir a divisão). Alertam que a criança, com sucesso em problemas e que também atribui significado matemático à divisão, tem ferramentas poderosas ao raciocínio, pois domina a linguagem matemática aplicando-a aos princípios da divisão, enquanto opera sobre os valores do problema, estabelecendo relações numéricas entre eles. Em estudo sobre as relações entre as representações aritméticas e a tomada de consciência na construção cognitiva, Ferreira e Lautert (2003) descrevem cinco níveis para a tomada de consciência de relações implicadas em uma divisão por partição de uma criança de seis anos de idade de escola particular do Recife, ao interpretar o significado das suas marcas a respeito. Esses níveis (da ausência da idéia de totalidade a repartir, para a presença da idéia de partes resultantes, mas não das relações que as geraram) teriam surgido pela intervenção do experimentador e pela presença de referentes no enunciado.

As contribuições referidas nos animam a destacar, entre as tarefas por nós utilizadas, a produção e a interpretação de notações sobre as repartições executadas com material. Seguimos propondo que estes momentos seriam de provocação privilegiada da tomada de consciência das ações e relações em jogo nas ações efetuadas, mas também da construção das formas de representação convencional da operação de divisão.

Método

Os participantes do estudo foram seis alunos do ensino fundamental (de 7 anos e 3 meses a 8 anos e 10 meses de idade), de uma escola pública da periferia de um município da área metropolitana de Curitiba. Eles foram agrupados em tríades (uma tríade de 1ª série e outra de 2ª série) porque o projeto de pesquisa em que este estudo está inserido também se volta ao exame das trocas sociais infantis durante a realização das tarefas (dimensão não aqui abordada). A composição das duas tríades ocorreu por sorteio aleatório, respeitado o critério da defasagem ótima (Doise & Mugny, 1981).

As tarefas oferecidas, caracterizadas como situações-problema de divisão elementar por partição (Vergnaud, 1985), foram propostas oralmente pelo pesquisador em duas sessões (de até 40 minutos), para solução conjunta dos componentes das tríades segundo estratégias próprias de cada um deles.

O material utilizado consistiu de: uma coleção de até 20 fichas de plástico (mesma cor), uma caixa com uma divisória repartida em duas metades, dois bonecos, folhas de cartolina, canetas hidrocor. As crianças podiam nomear os elementos conforme suas próprias interpretações dos problemas, por exemplo: fichas, chocolates, balas ou bolachas para os dois bonecos, ou para serem repartidas “entre vocês três”. Houve gravação em vídeo de toda a seqüência de eventos com posterior transcrição, para cada tríade, de todas as ações e verbalizações das crianças e do adulto.

As situações-problema consistiam em repartir coleções de fichas em duas e três partes iguais em uma sessão, e em três (as três crianças) e quatro partes iguais (as crianças e o pesquisador) na outra sessão. A extensão numérica das coleções (o dividendo), escolhida ao acaso por cada criança em sua vez (a “rodada”), limitava-se a 20 elementos. Eis o tipo de instrução dada pelo pesquisador: “Escolha, sem ver, muitas fichas (ou “balas”), para repartir entre os dois bonecos.”, ou “... para repartir entre vocês três...” (por exemplo: 14 fichas repartidas pelas três crianças). Depois da repartição, as crianças eram solicitadas a interpretar o que haviam obtido e como: “Vejam, por que ficou assim? O que aconteceu agora?”. Em seguida, a cada repartição, eram convidadas a produzir, na cartolina única, notações a respeito do que fora executado: “Marquem, desenhem, escrevam com números ou com letras, do jeito que vocês quiserem, o que aconteceu quando LuF repartiu as balas pros bonecos.”. Após fazer as notações, as crianças eram convidadas a interpretar suas produções: “O que você quis dizer com este desenho?”; “Por que você marcou isto assim?”. Em seguida, eram ainda convidadas a identificar o número de partes equivalentes obtidas da repartição e que recompunham a quantidade total repartida: “Vejam ali na mesa quantas partes (ou montes) de balas têm.”, “...olhando os montes, como é que dá pra descobrir quantas balas vocês repartiram em tudo?” (Piaget & Szeminska, 1971; Vergnaud, 1985). Como justificamos, essas tarefas aconteceram em ciclos alternados de: solução prática com apoio no material com interpretação do executado; produção de notações e interpretação das notações produzidas, identificação do número de partes equivalentes. Este ciclo foi cumprido por três vezes (as “rodadas”).

Em todos esses momentos, intervenções do pesquisador ocorreram conforme a necessidade de: orientar as crianças na compreensão do que o problema pedia (“Vejam, repartam as fichas para os dois bonecos ficarem com o mesmo tanto igual de fichas.”); desafiar, mediante perguntas, as soluções incompletas ou menos avançadas para a busca de outras soluções (“Mas será que assim estão todos com o mesmo tanto igual de fichas?”); mediar as diferentes soluções expressas pelas crianças para provocar-lhes alterações e re-interpretações das realizações de uma e outra delas (“Olhem ali, o que o We marcou; será que pode também ser assim?”). Outros exemplos dessas formas de intervenção aparecem nos trechos de protocolos expostos na parte de resultados.

A análise dos dados obedeceu a diferentes níveis de descrição qualitativa, microgenética, das características das realizações práticas e notacionais de cada criança, tal como interpretadas por elas, para: a) identificar e descrever os tipos de concepção de divisão ali revelados; b) apreender a relação entre as modificações das realizações de cada criança e os diferentes patamares alternados dessas realizações (execuções práticas, interpretações verbais, produção de notações, interpretação das notações) (Gilliéron, 1980). Para tanto, recorremos a indicadores oferecidos pela literatura; por exemplo, as relações típicas de busca de uma medida a partir de um operador escalar nas divisões simples por partição (Vergnaud, 1985); as peculiaridades infantis na identificação dos termos e das relações entre eles em divisões elementares (Correa & cols., 1998; Kornilaki & Nunes, 1999; Moro, 1999; Nunes & Bryant, 1997).

Resultados

Os resultados são expostos, a seguir, em três partes: a parte A apresenta, em síntese, as concepções de divisão inferidas das repartições tal como interpretadas pelas crianças; a parte B, também em síntese, expõe as concepções de divisão inferidas da produção e da interpretação das notações; e a parte C, os níveis de tomada de consciência das relações pertinentes à divisão, os identificados para as seis crianças examinadas.³

A. Concepções de divisão a partir das execuções interpretadas das repartições

- 1º Concepções pré-aditivas: as repartições de coleção vão desde as que se restringem a duas partes não adicionáveis, ignorado o resto, até aquelas em três e quatro partes por distribuição, mas com resto unitário reconhecido e equivalência das partes obtida com ajuda.
- 2º Concepções aditivas: as partes obtidas das repartições por 2, 3 e 4 são vistas como parcelas de adição, quando há: exclusão do resto unitário, indistinção divisor/quociente e dividendo/quociente e soluções de compromisso para mudar o dividendo ou o divisor.
- 3º Concepções elementares de divisão: as repartições por dois têm a extensão de suas metades identificada com distinções dividendo/quociente, divisor/quociente. Mas as repartições por três e quatro, sem ou com resto, têm apenas os termos da divisão pontualmente identificados; as partes resultantes são vistas como equivalentes e ainda adicionáveis, consistindo em "... x elementos para cada um...".

B. Concepções de divisão a partir das notações em sua produção e interpretação

- 1º Ausência de qualquer concepção de divisão: reprodução de expressões aritméticas aditivas com reconhecimento pontual do resultado ou de algum termo, sem relação com o repartir efetuado.
- 2º Concepções pré-aditivas: produção de desenhos e/ou algarismos para as partes obtidas, mas que nem sempre a estas correspondem em número e/ou grandeza. Há reconhecimento pontual de valores ou termos isolados, ausentes relações entre eles.
- 3º Concepções aditivas: produção de expressões aritméticas aditivas e/ou subtrativas tidas como relativas ao repartir efetuado, com dividendo (composto e decomposto) e partes obtidas (em número e grandeza correspondentes), incluído e/ou excluído o resto.
- 4º Concepções de transição da aditiva à de divisão elementar: produção de desenhos com algarismos ou de expressões aritméticas correspondentes às partes obtidas (conforme o divisor), ao dividendo (decomposto e recomposto) e ao resto, com identificações ainda oscilantes das relações

entre esses termos, mas com indicação do repartir como ação que transforma o estado inicial (coleção total) na final (as partes).

- 5º Concepções elementares de divisão: produção de relato escrito alfabético com a idéia de que o dividendo (estado inicial) ao ser repartido transformou-se nas partes (estado final) e no resto, com distinção entre dividendo, divisor e quociente; ou de expressões canônicas de divisão e/ou de multiplicação cujos termos, sinais e valores são vistos como correspondentes ao repartir efetuado.

C. Níveis do processo da tomada de consciência das relações de divisão

Nível I – Menos avançado: da concepção pré-aditiva de divisão, com dois sub-níveis:

Sub-nível IA – de progresso restrito do primado da "metade" (bipartição), para o repartir em mais de duas partes, quando há: a) reorganização restrita do "saber repartir" em duas ou três partes equivalentes; b) conceitualização precária da equivalência das partes, de significado numérico instável, por abstração empírica do resultado (estado final), ausentes ligações com a grandeza repartida (estado inicial) e, muito menos, com o número de partes obtidas; c) reprodução notacional mecanizada, não ligada à repartição efetuada, exceto para a representação isolada de partes "configuradas" do estado final. Há descompasso importante entre avanços de um "saber repartir" restrito e sua conceitualização quanto à origem das partes equivalentes, sobretudo no plano das notações. A tomada de consciência teria ocorrido por abstração empírica restrita ao resultado da ação prática de repartir, ausente a abstração de qualquer relação com a ação de repartir uma grandeza, o estado inicial. Por exemplo:

Para $10 \div 3$, Sue (7 anos e 4 meses, 1ª série), distribui as fichas para Deb e LuF, excluindo-se da repartição: "*Cinco para cada.*"; Deb: "*Não! Pra você também!*"; Sue redistribui fichas com ajuda dos parceiros, cada um fica com três; Deb: "*Tá certo.*"; Sue (aponta suas três fichas na mesa, tem uma ficha na mão, olha LuF) ... *quantas você tem?*"; LuF (conta todas as fichas na mesa): "*...tem nove.*"; exp: "*Tem nove? Mas eram quantas que a Sue escolheu para repartir, Sue?*"; Sue olha exp e fichas enquanto parceiros anunciam total, extensão das partes, número de partes; adiante, Sue repete com o exp: "*Três.*" (para as crianças presentes), e acena afirmativamente à resposta "*... três...*" dos demais à pergunta do exp sobre quantos chocolates para cada um. Depois, olhando produção de Deb e a de LuF, Sue faz a seguinte notação:



Figura 1. "... é três, é três".

Interpretando sua notação, Sue (aponta algarismos): "*É três e três.*"; exp: "*Você marcou aqui três?*"; Sue: "*Marcou.*"; exp:

3 Cada exemplo é identificado pelas iniciais adaptadas do nome do sujeito, a série escolar (1ª ou 2ª) e/ou sua idade cronológica (anos e meses). A abreviatura *exp* indica intervenção do experimentador.

“Três e três é assim?”; Sue: “Três.”; exp: “Quer dizer três e três assim juntos?”; Sue (aceno afirmativo); exp: “Não é três pra cada?”; Sue: “É o três, o três”.

Sub-nível I B – de progresso da apreensão pregnante de partes equivalentes (estado final) para esboços de relação entre essas partes e o total repartido (estado inicial), havendo: a) reorganização de um “saber repartir” estável em partes equivalentes para cada “divisor”, mas resistência ao resto unitário; b) conceitualização estável para partes equivalentes em repartições exatas, por abstração pseudo-empírica, mas relação instável das partes com o total repartido, sendo a ação de repartir evocada isoladamente; c) reprodução notacional mecanizada: as marcas numéricas para partes e total têm reconhecimento pontual por abstração empírica, mas há ausência de relações entre eles. Há descompasso notório entre avanços de um “saber repartir” uma grandeza em partes equivalentes e o de uma conceitualização relacional muito elementar entre os termos da repartição, o mesmo ocorrendo em relação às suas notações. Estas aparecem sem significado numérico e relacional. A tomada de consciência, por abstração pseudo-empírica, seria a da relação entre as partes e a grandeza repartida, sobretudo no plano da ação; no plano da sua notação teriam ocorrido abstrações empíricas da presença de grandezas numéricas e da significação isolada de sinais aritméticos. Por exemplo:

Para $12 \div 3$, Ig (8 anos e 4 meses, 2ª série), depois de contar as 12 fichas, distribuí-as, uma a uma, obtendo três partes de 4 fichas; confere as partes com os parceiros e diz: “Um, dois, três, quatro, é quatro... não sobrou.”; exp: “Então, o que aconteceu?”; Ig: “É quatro, quatro, quatro.”; nada diz enquanto, a perguntas do exp, We atribui ao repartir a obtenção das partes; mas recorda com os parceiros, o total repartido: “Doze.”, e a extensão de cada parte: “Quatro.”. Adiante (Figura 2), olhando o que Vi faz, escreve ‘o Igor repartiu 20 para e de com’, risca 20 e ‘com’ quando Vi o faz; Ig: “Eu terminei.”; exp (para Ig): “Deu quantos para cada um? Marque aí.”; Ig (olha notação de Vi): “Três, ali.” (marca 3); exp: “É só olhar lá (mesa com material)”; Ig: “Quatro! Não sei onde ponho.” (olha o que Vi faz)...”. Faz uma continha, escreve $20 \div 3 = 4$; adiante, conforme Vi, risca 20 e faz $12 \div 3 = 4$.

Figura 2. “Repartido... é de tirá três?”.

Ao interpretar sua notação, Ig não lê o que marcou. Quando We lê seu próprio escrito “O Igor repartiu...” Ig diz: “Doze.”; [...]; adiante, quando exp contesta sinal de – na notação de We: “Doze menos três? Foi isto que vocês fizeram? De doze tiraram três?”, Ig diz: “Repartido.”; exp: “E é este o sinal de repartir?”; Ig (olha suas notações, sinal de \div): “É de tirá três?”.

Nível II – Intermediário: da concepção aditiva de divisão, também com dois sub-níveis:

Sub-nível IIA – de estabilização da idéia aditiva de divisão, com os traços seguintes: a) reorganização acentuada de um “saber repartir” grandezas em duas ou três partes equivalentes conforme o “divisor”, mas com resistência à identificação de resto não unitário; b) conceitualização progressiva de relações aditivas entre as partes obtidas de um repartir, nem sempre evocado, resultando na grandeza repartida. Há abstração pseudo-empírica estável da relação entre duas partes, mas instável para três partes, sobretudo com resto não unitário; c) produção notacional intencional progressivamente correspondente às partes conforme cada “divisor” e à grandeza repartida (composta pelas partes), por abstração pseudo-empírica de sua relação aditiva, com resto excluído. Ocorre pequeno descompasso entre: avanços expressivos de um “saber repartir” uma grandeza em partes equivalentes, avanços da conceitualização da relação aditiva entre as partes e a grandeza repartida, e entre suas notações. Estas têm significado numérico e relacional aditivo. Haveria tomada de consciência de que partes equivalentes têm relação aditiva estável com a grandeza repartida, por abstração pseudo-empírica, também no plano de sua notação. Por exemplo:

Ao interpretar $8 \div 3$, feita por LuF, Deb (7 anos e três meses, 1ª série) diz (com LuF): “Dois pra cada.”; exp: “E sobraram quantos?”; Deb (com LuF): “Dois.”; exp: “Então, os oito foram repartidos por quantos?”; Deb: “Três.” (gesto para si e parceiros); exp: “Deu quanto oito repartido pelos três?”; Deb (com LuF): “Dois pra cada um”. Adiante, Deb produz sua notação:



Figura 3. “Dois pra cada um, a sobra, os bonecos”.

Interpretando sua notação, Deb diz, apontando parte e “divisores”, dividendo e resto com correção do registro da grandeza e da escrita repetida de algarismos: “Fiz dois pra cada um, a sobra, os bonecos.”; exp: “E aqui (borrados) você marcou e tinha riscado, né?”; Deb: “É, era o dois.”; exp: “E precisava?”; Deb: (aceno negativo); Exp: “Não!...””; exp: “E este número (8) quer dizer o quê?”; Deb: “Que tinha mais, era em tudo”.

Sub-nível IIB – de transição da concepção aditiva para a de divisão elementar, consistindo de: a) organização estável de um “saber repartir” grandezas em duas e três partes, com ou sem resto além do unitário; b) conceitualização estável das partes como parcelas da grandeza repartida, em divisões

com ou sem resto. Há identificação dos termos da divisão, mas somente de relações entre estado final e o estado inicial, evocada a transformação deste pelo repartir; c) produção notacional intencional para as partes obtidas conforme cada “divisor” e para os demais termos envolvidos. Relações entre os estados final e inicial são apontadas por conta da interpretação dos primeiros registros da ação de repartir. E as partes são vistas como “de todos e de cada um”, compondo e recompondo aditivamente a grandeza repartida.

Nesse sub-nível, o descompasso ocorre entre os avanços da conceitualização de relações elementares de dividir no plano da execução das repartições, por abstração pseudo-empírica, e os modestos, mas firmes avanços das notações que evocam relações elementares a partir do repartir, a favor desses últimos. Por exemplo:

Para $8 \div 3$, LuF (8 anos e três meses, 1ª série) (conta as oito fichas, dá as fichas, uma a uma, para Sue, Deb e para si e separa duas fichas ao lado) “... e tem que deixar dois.”; exp: “E quantos que sobrou?”; LuF: “Dois, e se desse esses dois, um pra mim, um pra ela (Deb), dai ela (Sue) ai ficar sem.”; exp: “Se tivesse um outro menino aqui (aponta 2 fichas resto), ele podia ficar com estas?”; LuF: “Daí, podia.”; exp: “Deu quanto oito repartidos por três?”; LuF (com Deb): “Dois pra cada um.”; exp: “E o que é que sobrou?”; LuF: “Dois, sobrou.”. Adiante, LuF faz sua notação:



Figura 4. “Oito, repartido”.

De sua notação, LuF diz: “Marquei dois pra este, dois pra este, dois pra este...” (aponta cada boneco com fichas desenhadas e algarismos 2), os três; exp (palavras): “E aqui, o que é que você escreveu?”; LuF: “Que sobrou dois.”; exp: “E você não precisou marcar em tudo quanto era?”; LuF: “Não.”; exp: “Mas você se lembra quanto era?”; LuF (aceno afirmativo); exp: “Quanto que era?”; LuF: “Oito, os repartido”.

Nível III – Mais avançado: da concepção elementar de divisão, com dois sub-níveis:

Sub-nível III A: de transição de um repartir estável para o dividir, com os traços seguintes: a) organização plena de repartições em duas e três partes com grandezas diversas; mas há marcas aditivas na organização das repartições por três e quatro (com grandezas extensas e resto além do unitário); b) conceitualização estável das relações de transformação entre estados inicial e final conforme o repartir efetuado, com iden-

tificação dos termos da divisão e distinção divisor-quociente. Mas as partes são “de todos e de cada um”, conforme cada divisor, ausente a idéia de quociente como extensão numérica de qualquer das partes; c) da passagem da reprodução notacional parcialmente mecanizada à produção notacional intencional canônica dos termos da divisão, presente o repartir na relação entre estados inicial e final e incluída a relação do resto com as partes obtidas e o dividendo.

Há descompasso a favor de expressivos avanços no plano da conceitualização das ações de repartir, por abstração reflexionante de relações próprias da divisão, em comparação a limites acentuados na produção de notações. Porém, estes limites são menos acentuados na interpretação dessas notações. Por abstração reflexionante, haveria tomada de consciência de relações típicas da divisão, sobretudo no plano das realizações práticas. Por exemplo:

Para $12 \div 3$, We (8 anos e 10 meses, 2ª série) antecipa: “... doze, seis pra cada um.”; Vi: “Não!”; We: “Seis pra cada um... e vai sobrá, vai sobrá... dois, eu acho.”; [...]; para cada parceiro com quatro fichas, We: “Cada um ficaram com quatro porque repartiu.”; exp: “Repartiu quantos?”; We: “Quatro pra cada.”; exp: “Quantos em tudo ele repartiu?”; We: “Ah! Doze, repartidos pelos três, ficou quatro”; exp: “E deu sobra?”; We com Vi: “Não.”. Copiando Vi, We faz sua notação:



Figura 5. “Dividido por três, é quatro pra cada, quatro mais quatro mais quatro, doze...”.

Para suas escritas alfabéticas, We (aponta 12, diz): “... o Ig repartiu... doze, aqui, oh..., não aqui para cada, nós três... (completa palavra ‘resultado’ e escreve ‘para a cada’); exp: “Deu resultado, o quê? Quantos pra cada um?”; We: “Três pra cada um.”; exp: “É três pra cada um?”; We (olha sua escrita, aponta três); exp: “É isto que está lá?” (mesa com partes compostas); We: “Não, quatro, é quatro.” (marca 4). Para a expressão $12 - 3 = 4$, We: “Repartimo (e lê)... doze menos três.”; exp: “Doze menos três? Foi isto que vocês fizeram? De doze tiraram três?”; We: “Eh!”; Vi: “Não.”; Ig: “Repartido.” We: “Repartimo.”; exp: “É este o sinal de repartir?”; Vi: “Dois pontinhos.”; We: “Não, eu sei; (corrige, marca ÷) ...dividido por três, é quatro pra cada.”; para $4 + 4 + 4 = 12$, diz: “Quatro mais quatro mais quatro, doze, como os montinhos lá. (aponta mesa com fichas em partes) ... outro jeito de pôr”.

Sub-nível III B – da estabilização de relações elementares de dividir, cujos traços são: a) organização plena de repartições em 2, 3 e 4, com grandezas diversas e resto além do

unitário e com estimativas plausíveis sobre as partes como resultado da ação de repartir; b) conceitualização estável das relações entre os termos da divisão, identificados, com as distinções entre divisor e quociente, dividendo e quociente. As partes equivalentes são “ x elementos para cada um”, havendo ausência da idéia de quociente como grandeza qualquer das partes obtidas conforme o divisor; c) produção notacional intencional, contendo relações de transformação do estado inicial no final e com referências fortes à ação de repartir e às relações elementares de divisão.

Descompasso existe entre avanços conceituais expressivos das notações, por abstração reflexionante de relações elementares de divisão, e os da execução das repartições, a favor dos primeiros. Seria a tomada de consciência de relações próprias à divisão trabalhada no plano da representação canônica da operação. Por exemplo:

Para $20 \div 3$, Vi (7 anos e 11 meses, 2ª série) dá fichas uma a uma em três partes, enquanto We diz: “*Dez pra cada..., vai dá cinco pra cada um, vai dá quinze e vai sobrá cinco.*”; Vi (obtendo 6, 6, 8, redistribui elementos e obtém 7, 7, 6; retira duas fichas das partes 7 e 7, obtém 6, 6, 6 com We dizendo “*Tira dois, agora vai dá seis.*”); exp (para Vi): “*E em tudo eram quantos?*”; Vi com We: “*Vinte*”; exp: “*E foram repartidos?*”; Vi: “*Repartidos por três,.... ficaram seis para cada*”; exp: “*E teve sobra?*”; Vi com We: “*Os dois lá.*” (duas fichas separadas). Adiante, Vi produz suas notações:

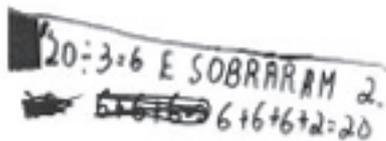


Figura 6. “Não! Vinte repartidos por três... igual a seis, para cada um...estes daqui... e sobram dois, é a sobra”.

Ao interpretar suas notações, Vi diz ($20 \div 3 = 6$): “*Vinte vezes três que é igual...*”; exp: “*Vezes?*”; Vi: “*Não! Vinte repartidos por três... (aponta sinal e algarismos) igual a seis, para cada um.*”; exp: “*Repartidos por quantos meninos?*”; Vi: “*Três, estes daqui.*” (aponta 3 na expressão e lê) “*E sobram dois, é a sobra.*”; exp (aponta a expressão aditiva): “*E aqui?*”; Vi: “*É para ver que se juntar tudo, fica vinte de novo, os seis de cada e o resto.*” (apontando parcelas).

Discussão

A. Concepções de divisão conforme o repartir e suas interpretações

Em resposta ao primeiro objetivo deste estudo, a hierarquia de concepções de divisão, obtida do exame das repartições executadas com o material e interpretadas pelas crianças, retrata a seguinte progressão inicial da divisão por partição: um primeiro momento, em que impera a distribuição de uma coleção em duas e, depois, em mais partes, ausente a relação entre a ação efetuada e seus resultados; um segundo momento, de predomínio de relações aditivas, pelas quais, se já há identificação dos resultados do repartir,

muita resistência ainda existe para compreender a relação específica dessa ação transformadora com as grandezas em jogo, ausente a distinção entre o escalar e as medidas sobre as quais ele opera. Essa resistência tem sua quebra iniciada com as concepções elementares de divisão, mas que ainda não trazem elaboração precisa daquelas relações, na ausência da idéia de quociente, propriamente dita.

A salientar, primeiro, que a hierarquia obtida não pode ser vista como completa: ela refere-se somente ao que nos revelaram as seis crianças examinadas. Também, ela concerne apenas ao tipo de divisão focalizada, a de partição, e com grandezas discretas pequenas. Mesmo assim, essa hierarquia nos permite melhor integrar diferentes traços que a literatura aponta para a construção do conceito focalizado: nas concepções pré-aditivas, a precocidade do repartir em duas e, depois, em mais partes, por distribuição, quando é forte o primado do resultado, interpretado como estático e eventualmente equivalente. Adiante, nas concepções aditivas, repartir é a ação da qual partes equivalentes resultam; mas assume ela forte sentido aditivo, recompondo o total inicial, ausente a relação da parte obtida com o divisor em sua ação sobre o dividendo como escalar. E, depois, nas concepções elementares de divisão, o esboço progressivo desse cálculo relacional, superados obstáculos ou confusões, entre as quais a do divisor com o resultado, aquele como operador, mas este ainda não como quociente.

Novamente, nessa construção o esquema de repartir surge como relevante. Precoce no repertório infantil e expresso freqüentemente na distribuição um a um de elementos “para que todos fiquem com o mesmo tanto igual”, o repartir teria seu poder justamente porque dele resultam não apenas a decomposição de uma grandeza em partes, mas a recomposição dessa grandeza pela adição dessas partes, o que é próprio das concepções aditivas. Logo, esta dimensão daria ao repartir um lugar necessário na construção da divisão (Correa & cols., 1998; Moro, 1999; Moro, 2004; Parrat-Dayán, 1985; Squire & Bryant, 2002; 2003).

Porém, essa necessidade do repartir teria sentido na medida em que seu emprego sustente a progressiva elaboração de invariantes, os quais possibilitariam ao sujeito inferir relações de transformação de grandezas, as típicas da divisão.

Com base em realizações de nossos sujeitos, teríamos, por exemplo, como invariante, a correspondência “um a um”. Esta, mesmo em seus momentos pré-operatórios, permite atribuir a cada “divisor” um elemento até esgotar-se a coleção, ao serem obtidas partes equivalentes. Porém, com a inferência de que a cada “divisor” cabe uma parte, daquela correspondência surgiria a correspondência “um para muitos”, fundamental ao cálculo relacional com o operador escalar. Um outro invariante exemplar seria a relação inclusiva parte-todo que, de modo integrado, organizaria a decomposição-recomposição da grandeza total em x partes equivalentes, enumeráveis então conforme o escalar e podendo ter cardinalidade estável.

Esses argumentos falam da necessidade do esquema de repartir na elaboração das concepções aditivas de divisão por partição. Mas, ele seria insuficiente à progressão além daquelas concepções quando, mais que uma elementar identificação de várias partes equivalentes, são exigidas inferências relacionais mais sofisticadas sobre o papel do operador escalar na obtenção da extensão da parte como

quociente (Kornilaki & Nunes, 1999; Lautert & Spinillo, 2002; Nunes & Bryant, 1997; Squire & Bryant, 2002; Squire & cols., 1999; Vergnaud, 1985). Os avanços (desencadeados pelo próprio repartir) na elaboração de invariantes como os identificados, permitiriam, ao menos em parte, chegar à idéia mesma de divisão (por partição). Logo, se o repartir está estreitamente ligado à psicogênese da divisão por partição, em seus momentos aditivos, é o dividir que estaria presente nas concepções mais adiantadas, quando relações aritméticas características da operação se fazem presentes. Conforme a hierarquia obtida, haveria um salto qualitativo relevante do repartir para o dividir, em acordo com o que propõem Squire e Bryant (2002). Porém, nesse quadro, o repartir seria antecedente psicogenético necessário ao dividir.

É importante insistir que essa passagem do repartir para o dividir valeria apenas para as divisões por partição. Como vimos, Vergnaud (1983; 1985) oferece indicadores analíticos relevantes sobre a complexa diferença entre os cálculos relacionais envolvidos nos diversos tipos de divisão, o que dá sentido ao argumento de que diferenças psicológicas importantes ocorreriam em cada um dos casos (Squire & Bryant, 2002; 2003). Porém, também, sempre podem haver dificuldades relativas aos procedimentos de apresentação e de representação dos problemas.

B. Concepções de divisão conforme as notações produzidas e suas interpretações

A outra hierarquia, apoiada na análise das notações das crianças com suas interpretações, aponta concepções da divisão que vêm: da ausência de qualquer idéia de divisão para uma concepção aditiva de divisão, mas antes passando por idéias pré-aditivas, quando predomina o reconhecimento das partes obtidas, não necessariamente tidas como parcelas a adicionar. Mas somente as concepções de transição se reportam a marcas relativas à transformação efetuada na coleção, na busca de partes equivalentes conforme o operador escalar. Assim aparece a progressiva superação de obstáculos à formulação notacional das relações pertinentes, para chegar a modos canônicos de representação aritmética.

Inicialmente, temos que examinar as semelhanças e diferenças entre a hierarquia de concepções identificadas das notações, e aquela retirada das realizações práticas das crianças de repartição. As semelhanças são importantes, pois as duas hierarquias trazem, em linhas gerais, desenhos psicogenéticos que se correspondem. Mas, muito mais do que semelhanças há uma correspondência esperada entre uma construção no plano das ações de repartir coleções, e aquela de suas formas de representação escrita: essas formas, como sistemas de significantes, constituem-se, a partir da idéia de homomorfismo, em instrumentos de simulação de determinada realidade (não de sua reprodução absoluta e simétrica) “... *um meio de prever efeitos reais e de ‘calcular’ ações a executar para provocá-las ou evitá-las*” (Vergnaud, 1985, p. 201)⁴.

Por sua vez, as diferenças dizem respeito a produções que denotam a ausência de concepção de divisão e as que

são de transição, das concepções aditivas para as elementares da divisão. São diferenças que falam a favor da defasagem relativa entre idéias e relações verbalmente elaboradas das execuções, e sua notação, cujo sentido pode ser apreciado na descrição que fizemos dos níveis da tomada de consciência, adiante discutida. Assim, por exemplo:

- notações relativas à ausência de qualquer idéia de divisão vêm de sujeitos que expressaram sobretudo concepções pré-aditivas de divisão durante a interpretação verbal do executado, quando há centração nas partes obtidas do repartir, o resultado. Em suas notações não apareceram marcas dessa transformação pelo repartir; e, quando um deles produziu o sinal canônico de divisão, copiou de notações de parceiro, sem lhe atribuir o significado correspondente; somente com provocação do adulto evocou a ação executada de repartir sem tê-la como representada pelo sinal.
- notações de transição das concepções aditivas para as de divisão elementar são de sujeitos que formularam relações pertinentes da divisão, sobretudo em problemas de divisão por 2. Porém, mostraram limites nas formas de representação, quer pelo apoio ainda presente em relações aditivas, ou por dificuldades ao produzir notações próximas das canônicas, com alguma superação desses limites nas interpretações de suas notações. São casos que mostram o quanto construir sistemas notacionais requer domínio de habilidades específicas de escrita numérica e alfabética.

Um segundo aspecto a salientar é que esses resultados sobre as notações retratam tendência assinalada na literatura (Brito & Correa, 2003; Lautert & Spinillo, 2002; Moro, 2004) sobre a construção de modos de representação do repartir em problemas de divisão por partição: da força inicial de marcas para o estado final (o resultado do repartir), para a de marcas para a transformação efetuada (a ação de repartir) sobre o estado inicial (a grandeza repartida), em caminho que vai da ausência da idéia de divisão para concepções elementares a respeito, via concepções aditivas.

Sobre essa tendência, mantemos a explicação seguinte: as crianças também fizeram notações observando as coleções de elementos resultantes do repartir, além de também serem, neste estudo, provocadas a verificar quantas partes de extensão equivalente estavam presentes. Ora, parece significativa, nessas circunstâncias, a presença de partes iguais simétricas, por si sós pregnantes à apreensão figurativa inicial de algumas crianças, apesar da precocidade do repartir. Daí que, para algumas delas, seria pouco provável representar o repartir como ação que transforma a grandeza inicial; já, em outros níveis, seriam esperadas marcas para o repartir como ação que produz partes: a) adicionáveis, como nas concepções aditivas de divisão, ou b) equivalentes e contidas certo número de vezes na coleção total e que a esta correspondem.

C. Os níveis da tomada de consciência das relações da divisão.

Sobre os resultados referentes ao segundo objetivo do estudo, a descrição que fizemos dos níveis da tomada de consciência das relações próprias da divisão por partição mostra avanços de elaboração em cada nível e entre níveis, ocor-

4 A tradução da citação do autor é de nossa responsabilidade.

rentes pela progressiva superação de obstáculos conceituais e relacionais referentes ao contido nas realizações práticas de repartir, com o “dar-se conta” das relações ali praticadas. Obstáculos correspondentes são novamente enfrentados ao serem produzidas notações a respeito, na medida em que cada sujeito, conforme suas possibilidades, “dá-se conta” do que necessita marcar sobre aquelas realizações, bem como, do significado dessas marcas, para compreendê-las como representações das ações e/ou relações efetuadas.

Falamos a favor do papel necessário da tomada de consciência na construção focalizada, quando ocorreria o interjogo de abstrações empíricas e pseudo-empíricas de relações entre estados e transformações (Piaget, 1977), na seguinte progressão:

- a) de duas ou mais partes equivalentes resultantes do repartir, sem aceitação da idéia de resto e sem relação com a grandeza repartida;
- b) de partes como resultado da decomposição da grandeza repartida, e que também a recompõem: a cada “divisor” corresponde sua parte (equivalente a dos demais), aceita a idéia de resto;
- c) de partes equivalentes que se repetem n vezes (e podem ser contadas), conservando sua equivalência, e a da grandeza repartida (quando se inicia a distinção entre divisor e quociente);
- d) de partes que resultam do repartir a grandeza n vezes: “as partes de todos e de cada um”, conforme cada divisor, ausente ainda a idéia de quociente.

O patamar, acima indicado como “a”, corresponde aos descritos por Ferreira e Lautert (2003) para a criança que tiveram. Esse patamar retrata, de fato, abstrações relativamente iniciais da elaboração visada. Contudo, identificamos outros patamares da tomada de consciência de esquemas e relações, por termos realizações de mais sujeitos. Dessa forma, se repartir elementos de uma coleção, distribuindo-os um a um, em duas e/ou mais partes, por exemplo, revela um “saber fazer” (conhecimento em ato) (Vergnaud, 1990; 1996), a interpretação dessa ação e do que dela resulta é ocasião de, no plano verbal, elaborar a presença daquelas partes como equivalentes e resultantes do repartir uma certa grandeza, logo, de explicitar tais relações. Depois, produzir notações a respeito dessas relações é ocasião de ativar o “dar-se conta” daquelas ações, relações e seus resultados no plano de sua representação notacional. Em seguida, a interpretação das notações traria a organização daquelas ações e relações no plano do significado das marcas utilizadas para representá-las, quando é reformulado o próprio sistema de representação. Enfim, voltar às partes obtidas para contá-las como partes repetidas e equivalentes, seria nova ocasião para inferir a idéia do operador, antes de retomar-se o ciclo, fazendo, via material, outra repartição. Assim, essa alternância cíclica traria a expectativa de que a conceitualização em curso influenciaria a ação (Piaget, 1978).

Os progressos observados na compreensão da divisão por partição de cada criança aparecem estreitamente ligados com o “dar-se conta” de esquemas e relações pertinentes ao conceito, a ponto de se poder apontar a necessidade, desse processo da tomada de consciência, aos avanços mesmo modestos das crianças. E seu papel necessário tem a ver com o formato da tarefa: o da alternância cíclica entre

execuções interpretadas e notações interpretadas relativas àquelas execuções.

Porém, embora necessário, aquele processo não seria suficiente: outras condições, combinadas, teriam seu lugar no ativar os benefícios da alternância cíclica das tarefas utilizadas. Então, os avanços no aprender dever-se-iam também: ao patamar conceitual de partida do sujeito, trazendo-lhe formas de aproveitar, nas tarefas, suas experiências anteriores (escolares e não escolares) com o conteúdo; à qualidade das intervenções do adulto (no papel de professor) ao amplificar as possibilidades de tomada de consciência de ações, de relações entre elas e seus resultados, de cada sujeito e entre eles na situação em tríades que empregamos (Ferreira & Lautert, 2003).

O que apontamos traz indicações para a educação matemática: a necessidade de tarefas cujo formato enseje a execução interpretada de soluções pelos alunos, alternada com a produção de notações a respeito. Assim, há margem para haver, de fato, a ação do sujeito na construção de seu conhecimento. Porém, apenas isto não basta: cabe ao professor conduzir tais situações, o que será tanto mais produtivo quanto melhor ele, próprio construiu o conceito que ensina. Melhor saberia ele, então, trabalhar com o conhecimento prévio dos alunos e identificar os obstáculos colocados a uma construção conceitual específica, bem como, os tão relativos pontos de “chegada”.

Compreender a divisão por partição no âmbito das estruturas multiplicativas tem sua história na aprendizagem matemática. É uma história individual, mas que tem regularidades entre os indivíduos, pelas possibilidades estruturais cognitivas de cada um e em relação aos tipos de situação. Essa história se faz na medida em que o sujeito opera coleções numéricas, atua sobre elas, transformando-as. É uma história longa (por exemplo, na escolaridade básica), com saltos qualitativos e obstáculos epistemológicos, mesmo porque seu domínio pelos aprendizes integra a necessidade de elaboração dos seus sistemas simbólicos de representação (Vergnaud, 1985; 1990; 1991).

É a perspectiva de que o conhecimento se constrói segundo a reação circular entre o sujeito e os objetos “... o primeiro conhecendo-se tão somente na medida em que age sobre aqueles, e os segundos não se tornando conhecíveis senão em função do progresso das ações executadas sobre eles” (Piaget, 1974, pp. 281-282).

Referências

- Brito, M. R. F. de & Correa, J. (2003). O significado do conceito de divisão em crianças de escola elementar [Resumo]. Em Sociedad Argentina de Educación Matemática (Org.), *III Conferencia Argentina de Educación Matemática. Libro de Resúmenes* (p. 150). Salta: SOAREM/UNSa.
- Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 321-329.
- Doise, W. & Mugny, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence*. Paris: InterÉditions.
- Ferreira, S. P. A. & Lautert, S. L. (2003). A tomada de consciência analisada a partir do conceito de divisão: Um estudo de caso. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 16(3), 547-554.

- Gilliéron, C. (1980). El psicopedagogo como observador: Por qué y como. *Infancia e Aprendizaje*, 9, 7-21.
- Kornilaki, E. & Nunes, T. (1999). Do multiplication and division develop in parallel or as co-ordinated operations? [Resumo]. Em European Society of Developmental Psychology (Org.), *IXth. European Conference on Developmental Psychology: Human Development at the Turn of the Century*. Abstracts (pp. 389-390). Spetses: ESDP/University of Athens.
- Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (2002). As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 18(3), 237-246.
- Moro, M. L. F. (1999). Aprendizagem construtivista de estruturas aditivas e multiplicativas na iniciação matemática. *Temas em Psicologia da SBP*, 7(3), 263-282.
- Moro, M. L. F. (2004). Notações da matemática infantil. Igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 17(2), 251-266.
- Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática* (S. Costa, Trad.). Porto Alegre: Artes Médicas.
- Parrat-Dayan, S. (1985). À propos de la notion de moitié: Rôle du contexte expérimental. *Archives de Psychologie*, 53, 433-438.
- Piaget, J. (1974). *La prise de conscience*. Paris: PUF.
- Piaget, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. I. L'abstraction des relations logico-arithmétiques*. Études d'Epistémologie Génétique (vol. XXXIV). Paris: PUF.
- Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender*. (C. L. de P. Leite, Trad.) São Paulo: EDUSP/Melhoramentos. (Trabalho original publicado em 1974)
- Piaget, J. & Szeminska, A. (1971). *A gênese do número na criança*. (C. M. Oiticica, Trad.) Rio de Janeiro: Zahar.
- Sinclair, A. (1990). A notação numérica na criança. Em H. Sinclair (Org.), *A produção de notações na criança* (pp. 71-96). (M. L. F. Moro, Trad.) São Paulo: Cortez. (Trabalho original publicado em 1988).
- Sinclair, A. & Scheuer, N. (1993). Understanding the written system: 6 year-olds in Argentina and Switzerland. *Educational Studies in Mathematics*, 1-23 (separata).
- Sinclair, A., Tièche-Christinat, C. & Garin, A. (1994). Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres? Em M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavinot (Orgs.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 243-249). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Sinclair, H. & Sinclair, A. (1986). Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. Em J. Hiebert (Org.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 59-74). London/Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Squire, S. & Bryant, P. (2002). From sharing to dividing. The development of children's understanding of division. *Developmental Science*, 5(4), 452-466.
- Squire, S. & Bryant, P. (2003). Children's models of division. *Cognitive Development*, 18(3), 355-376.
- Squire, S., Bryant, P. & Correa, J. (1999). Young children's understanding of division [Resumo]. Em European Society of Developmental Psychology (Org.), *IXth. European Conference on Developmental Psychology: Human Development at the Turn of the Century*. Abstracts (p. 389). Spetses: ESDP/University of Athens.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em R. Les & M. Landau (Orgs.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes* (pp. 127-174). London: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité* (3^a ed.). Berne: Peter Lang.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(23), 133-170.
- Vergnaud, G. (1991). L'appropriation du concept de nombre: un processus de longue haleine. Em J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (Orgs.), *Les chemins du nombre* (pp. 271-282). Lille: Presses Universitaires de Lille.
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. Em J.-M. Barbier (Org.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-292). Paris: PUF.

Recebido em 29.09.2004

Primeira decisão editorial em 15.03.2005

Versão final em 06.04.2005

Aceito em 02.08.2005 ■