

# Oscilação quântica de sabores com pacotes de ondas

(*Quantum flavor oscillation with wave packets*)

Alex Eduardo de Bernardini<sup>1</sup> e Stefano De Leo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Raios Cósmicos, Instituto de Física “Gleb Wataghin”,  
Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil*

<sup>2</sup>*Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil*

Recebido em 23/06/2004; Revisado em 02/09/2004; Aceito em 22/09/2004

Sugerimos um esquema de aproximação analítica para estudarmos os fenômenos de oscilação de quântica de sabores de uma maneira pedagógica e compreensiva. Após uma breve descrição do *status* em que se encontra o estudo teórico dos fenômenos de oscilação, com uma discussão introdutória dos resultados obtidos com ondas planas, nós introduzimos o formalismo com pacotes de ondas de modo a estudar algumas características peculiares inerentes aos fenômenos de oscilação quântica. Seguimos um estudo analítico com um pacote de ondas *Gaussiano* onde mostramos que as oscilações são limitadas por uma função amortizada ao longo do tempo a qual caracteriza o *slippage* (“escorregamento”) entre dois pacotes de ondas. Demonstramos que o *spreading* de um pacote de ondas é tipicamente um efeito de segunda ordem, de fato, relevante no limite não-relativístico. Ao mesmo tempo, quantificamos uma fase adicional dependente do tempo a qual modifica o caráter *standard* de oscilação da fórmula de conversão de sabores. Finalmente, consideramos uma função *Quadrada* e uma função *Seno* para descrevermos a localização das partículas e verificamos como se altera a probabilidade de oscilação de sabores sob tais circunstâncias.

**Palavras-chave:** neutrinos, oscilação de sabores, pacotes de ondas.

We suggest an analytical approximation scheme to study the flavor quantum oscillation phenomena in a pedagogical and comprehensive way. After briefly describing the *status* of the theoretical study of quantum oscillations, with an introductory discussion of the results obtained with plane waves, we introduce the wave packet formalism in order to study some peculiar characteristics comprised by the quantum oscillation phenomena. By following an analytical study with *Gaussian* wave packets, we show that the oscillations are bounded by a time-dependent vanishing function which characterizes the *slippage* between the wave packets. We demonstrate that the wave packet *spreading* is typically a second order effect which is indeed relevant in the non-relativistic limit. In addition, we quantify an additional time-dependent phase which changes the *standard* oscillating character of the flavor conversion formula. Finally, we consider a *Square* and a *Sine* function to describe the particle localization and we verify how it changes the flavor oscillation probability under such circumstances.

**Keywords:** neutrino, flavor oscillation, wave packet.

## 1. Introdução

O problema de oscilação quântica é conhecido desde 1955 quando Gell-Mann e Pais [1], ao estudarem o chamado  $\theta$  puzzle, observaram que autoestados de um Hamiltoniano de interação não coincidem necessariamente com os autoestados de massa ou de decaimento de uma partícula, e propuseram a existência de

dois káons neutros para explicar os diferentes tempos de decaimento observados experimentalmente. Um pouco antes, em 1953, em um esquema para classificar as novas partículas que vinham sendo descobertas, Gell-Mann representava o káon neutro  $K^0$  e sua antipartícula  $\bar{K}^0$  como duas partículas distintas. O decaimento de ambas as partículas em um par pión-

<sup>1</sup>Enviar correspondência para Alex Eduardo de Bernardini. E-mail: alexeb@ifi.unicamp.br.

antipión  $\pi^+\pi^-$  era já observado. Desde então, como poderíamos saber qual partícula houvera originado tal decaimento:  $K^0$  ou  $\bar{K}^0$ ? Tal problema foi resolvido quando perceberam que aquilo que observavam corresponde à mistura de dois estados,  $K^0$  e  $\bar{K}^0$ . Desta maneira, historicamente, pela primeira vez a interferência entre dois estados com massas ligeiramente diferentes aparecia no contexto da mecânica quântica.

Em 1955, Pais e Piccioni [2] contribuíram significativamente quando sugeriram que a propagação de autoestados de sabor, como uma superposição coerente de autoestados de massa, levam à conversão parcial de um estado com um número quântico de sabor inicial em um estado com outro número quântico de sabor. Verificou-se que probabilidade de transição de sabores oscila no espaço com uma fase de oscilação que depende da diferença de massa. Tal construção teórica foi verificada em uma série de experimentos com sistemas kaônicos neste mesmo período [3, 4, 5]. Oscilações similares também foram observadas para os mésons B em 1987 [6].

Já em 1957, Pontecorvo percebeu que a existência de massas para neutrinos poderia representar a possibilidade de oscilações quânticas similares para estas partículas. A mistura de sabores para neutrinos, em linhas gerais, foi sugerida pouco tempo depois [8], e o caso de oscilação para dois sabores, bem como sua aplicação no estudo do problema de neutrinos solares, foi examinado até o final dos anos 60 por Pontecorvo e Gribov [9, 10]. Oscilações de sabores de neutrinos, porém, são muito mais difíceis de serem observadas do que as oscilações de sabores dos mésons, justamente porque neutrinos têm massas muito pequenas e se acoplam somente via interações fracas. É, portanto, de longa data que as propriedades dos neutrinos, em particular, o problema de oscilação quântica, vêm despertando bastante interesse. Nos últimos anos, uma série de experimentos, seja com neutrinos solares [11, 12], seja com neutrinos atmosféricos [13], tem fornecido fortes evidências sobre as massas e sobre a mistura de sabores dos neutrinos [14, 15, 16, 17]. Em paralelo, o grande interesse no estudo dos fenômenos de oscilação quântica [18, 19, 20] tem estimulado um número crescente de trabalhos com o propósito de entender os fundamentos teóricos que governam o fenômeno de oscilação de sabores [21, 22, 23]. Além do grande interesse nesse campo, a dificuldade conceitual no entendimento de alguns aspectos físicos que se “escondem” nas fórmulas de oscilação representam um intrigante, e as vezes embaraçante, desafio para os físicos.

O tratamento *standard* com ondas planas [24, 25] consiste na mais elementar aproximação utilizada no estudo do problema de oscilação de sabores. Contudo, apesar de ser fisicamente intuitivo e simples, rigorosamente, o modelo com ondas planas não é suficiente para o completo entendimento da física envolvida em oscilações quânticas. O tratamento com ondas planas implicaria em um perfeito conhecimento da energia e do momento e, conseqüentemente, uma incerteza “infinita” na localização espaço-temporal da partícula oscilante. Oscilações são destruídas sob tais condições [26]. De maneira a superar tais dificuldades, um modelo com pacote de ondas para neutrinos ultra-relativísticos foi introduzido por Kayser [26] e posteriormente aplicado por outros autores [27, 28].

Entretanto, uma objeção muito comum a tal formalismo corresponde ao fato de que os autoestados de massa (partículas oscilantes) não são, e não podem ser, “diretamente” observados. Seria mais “convincente” escrever uma probabilidade de transição entre partículas observáveis envolvidas na produção e na detecção das partículas oscilantes em um chamado modelo de pacotes de ondas *externos* [20, 29]. Neste modelo, as partículas a serem estudadas seriam representadas por propagadores relativísticos que se propagam entre a fonte e o detector. Os pacotes de onda representariam as partículas externas que estão interagindo na produção das partículas oscilantes (propagadores). A função que representa o *overlap* entre os pacotes de ondas que entram e que saem no modelo de pacotes de ondas *externos* corresponde à própria função de onda do autoestado de massa referente à partícula que se propaga no tempo. Notoriamente, pode ser demonstrado que as densidades de probabilidade para partículas oscilantes ultra-relativísticas (e estáveis), seja no modelo de Kayser [26], seja no modelo de pacotes de ondas *externos*, são matematicamente equivalentes [20]. Sendo assim, não temos problemas em considerar um pacote de ondas associado à partícula que se propaga no espaço-tempo. Além do mais, o modelo com pacotes de ondas na forma preliminar apresentada por Kayser [26] simplifica consideravelmente a discussão de alguns aspectos físicos que acompanham o fenômeno de oscilação [30, 31].

Neste contexto, pretendemos apenas estabelecer um esquema condensado, porém, didaticamente organizado, para estudarmos analiticamente o fenômeno de oscilação de sabores, uma vez que, na literatura, numerosas prescrições são ainda um tanto confusas.

Muitas vezes, em uma aproximação analítica aplicada ao estudo da evolução temporal de um autoestado de massa, as limitações impostas pela introdução de pacotes de ondas não são devidamente consideradas.

Na seção 2 deste texto, introduzimos o problema de oscilação quântica de sabores com o intuito de apresentarmos uma revisão do formalismo com ondas planas e verificarmos as limitações impostas pelo uso de ondas planas. Na seção 3, nós introduzimos sistematicamente os pacotes de ondas *Gaussianos* [23, 32] para estudarmos o fenômeno de oscilação quântica. Em particular, o isto nos permite quantificar as correções de primeira e segunda ordem do caráter oscilante das partículas que se propagam no espaço-tempo. Assumimos uma distribuição de momentos altamente centrada para descrevermos a energia de um autoestado de massa em uma série de potências de maneira a obter as expressões analíticas aproximadas para a evolução temporal do pacote de ondas e, da mesma forma, para a probabilidade de oscilação de sabores. O termo de segunda ordem na expansão da energia é levado em conta de modo a verificarmos cuidadosamente a influência do mesmo ao quantificarmos os efeitos de *spreading* e de *slippage* dos pacotes de ondas em ambos os regimes de propagação: não-relativístico e ultra-relativístico. Identificamos, também, uma fase adicional dependente do tempo que pode alterar o caráter oscilante na fórmula de conversão de sabores. Na seção IV, nós introduzimos uma função *Quadrada* e uma função *Seno suavemente amortizada* para descrevermos a localização da partícula e verificarmos como a forma de um pacote de ondas pode alterar a probabilidade de oscilação de sabores. Encerramos com as conclusões na seção V.

## 2. O fenômeno de oscilação quântica de sabores com ondas planas

A possibilidade de dois ou mais estados quânticos se combinarem para compor um novo estado vem dos princípios fundamentais da mecânica quântica. A medida de um observável faz com que um estado quântico inicial seja levado a um autoestado quântico do operador associado à grandeza observável. O processo de medida física determina uma base de estados físicos constituída por todos os autoestados do referido operador (ou de um conjunto de operadores se for o caso). Bases diferentes associadas a operadores diferentes podem ser correlacionadas por transformações lineares

de modo que um estado físico qualquer possa ser descrito como uma combinação (*mixing*) de autoestados de uma dessas bases. Assim é construído o princípio quântico de superposição. As propriedades de um estado quântico são descritas em termos de uma função de onda que, dentre outras informações físicas, carrega o significado de uma densidade de probabilidades, fator este, que leva a um conflito com a idéia clássica de “partícula” quando usada para descrever um estado físico. Essa dificuldade conceitual de interpretação é, por exemplo, freqüentemente apresentada na discussão do experimento de espalhamento quântico em fenda dupla. O mesmo conceito de combinação de estados quânticos aparece quando autoestados de um Hamiltoniano de interação são descritos como uma superposição quântica de autoestados de massa de um mesmo sistema físico. São criadas, assim, condições para a oscilação do número quântico associado ao Hamiltoniano de interação ao longo de uma propagação espaço-temporal. Para sermos mais precisos no contexto específico do problema de oscilação quântica de sabores, o Hamiltoniano de interação determina uma base de autoestados de sabor ao passo que autoestados de massa compõem a base determinada por um Hamiltoniano (livre) de propagação. Em particular, as oscilações de sabor surgem quando uma fonte cria uma partícula que corresponde à combinação linear de autoestados de massa. Os principais aspectos dos fenômenos de oscilação quântica de sabores podem ser compreendidos através do estudo de um problema com apenas dois autoestados de sabor descritos por

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

onde  $\nu_\alpha$  e  $\nu_\beta$  representam autoestados de sabor ortogonais entre si,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  representam autoestados de massa também ortogonais entre si,  $\theta$  é o ângulo de mistura e  $U$  é a matriz que diagonaliza o Hamiltoniano de propagação se este é inicialmente descrito na base de autoestados de sabor. O cálculo das amplitudes de transição de um autoestado de sabor para outro requer o conhecimento da evolução temporal dos estados quânticos envolvidos e dos produtos escalares entre os autoestados. Ao assumirmos que temos simplificações matemáticas substanciais quando a dependência espacial das funções de onda é unidimensional (eixo  $z$ ) podemos representar genericamente

mente a evolução espaço-temporal de um autoestado de massa como

$$\nu_i(z, t) = \phi_i(z, t) \nu_i \quad (2)$$

poderíamos descrever a evolução espaço-temporal dos autoestados de sabor como

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \Psi_\alpha(z, t; \theta) \\ \Psi_\beta(z, t; \theta) \end{pmatrix} = \\ & U \begin{pmatrix} \phi_1(z, t) & 0 \\ 0 & \phi_2(z, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \\ & U \begin{pmatrix} \phi_1(z, t) & 0 \\ 0 & \phi_2(z, t) \end{pmatrix} U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix}, \quad (3) \end{aligned}$$

Em particular, ao considerarmos uma partícula produzida inicialmente em um autoestado de sabor  $\alpha$  em  $t = z = 0$ , a evolução espaço-temporal deste estado físico seria descrita por

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(z, t; \theta) = & \\ & \phi_1(z, t) \cos(\theta) \nu_1 + \phi_2(z, t) \sin(\theta) \nu_2 = \\ & [\phi_1(z, t) \cos^2(\theta) + \phi_2(z, t) \sin^2(\theta)] \nu_\alpha + \\ & [\phi_1(z, t) - \phi_2(z, t)] \cos(\theta) \sin(\theta) \nu_\beta = \\ & \phi_\alpha(z, t; \theta) \nu_\alpha + \phi_\beta(z, t; \theta) \nu_\beta \quad (4) \end{aligned}$$

Desta maneira, fica evidente que uma partícula criada em um autoestado de sabor  $\alpha$ , ao longo da evolução espaço-temporal, terá probabilidade não-nula de ser detectada como um autoestado de sabor  $\beta$  uma vez que a amplitude de transição de sabor  $\alpha \rightarrow \beta$  seria dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; z, t, \theta) &\equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle \equiv \\ & \nu_\beta \cdot \Phi_\alpha(z, t; \theta) = \phi_\beta(z, t; \theta). \quad (5) \end{aligned}$$

Obviamente, o desenvolvimento é análogo quando procuramos determinar amplitude de transição  $\alpha \rightarrow \alpha$ ,  $\mathcal{A}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha; z, t, \theta) \equiv \phi_\alpha(z, t; \theta)$ . Como veremos na seção 2.2, com estas propriedades, a obtenção da probabilidade de conversão do número quântico de sabor  $\alpha$  em  $\beta$  é imediata.

## 2.1. Vínculos cinemáticos

Antes de prosseguirmos com o estudo do fenômeno de oscilação quântica de sabores no contexto já elaborado, é importante verificarmos sob quais condições cinemáticas podemos, eventualmente, encontrar algumas restrições quanto à aplicação do formalismo com ondas planas.

Durante o processo de criação de um autoestado de sabor alguns vínculos cinemáticos podem ser importantes na derivação da fórmula de oscilação de sabores [34]. Particularmente, qualquer processo de criação de uma partícula (seja ela um estado oscilante ou não) pode ser considerado, no âmbito cinemático, como um processo de decaimento *efetivo* de dois corpos [30] ilustrado por

$$m_o \leftarrow \begin{matrix} M \\ \bullet \end{matrix} \rightarrow m_{1,2}$$

onde os subíndices de  $m_{1,2}$  se referem aos autoestados de massa. Se o decaimento ocorre em um número maior do que duas partículas, a quantidade  $m_o$  representa a massa efetiva de todas as demais partículas que acompanham os autoestados de massa e, obviamente, tem valor igual à soma dessas massas. Para outros processos de produção que não correspondem a um decaimento, a quantidade  $M$  corresponde à energia do centro de massa e não à massa de uma ressonância. No sistema de repouso, a conservação de momento e de energia impõe que

$$M = (p_i + m_o)^{\frac{1}{2}} + (p_i + m_i)^{\frac{1}{2}} = E_i^o + E_i, \quad (6)$$

onde  $i = 1, 2$ .

Após algumas manipulações algébricas simples encontramos [36]

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_2 = \frac{\Delta m^2}{2M}, \\ \Delta p &= p_1 - p_2 = \frac{\bar{E}_{12} - M}{\bar{p}_{12}} \Delta E, \quad (7) \end{aligned}$$

e

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{1-2} = \frac{\bar{E}_{12}^2 - \bar{p}_{12}^2 - M \bar{E}_{12}}{\bar{E}_{12}^2 \bar{p}_{12} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta E}{2E_{12}} \right)^2 \right]} \Delta E. \quad (8)$$

com

$$\bar{E}_{12} = \frac{E_1 + E_2}{2} \quad \text{e} \quad \bar{p}_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (9)$$

Se observarmos que a diferença quadrática de massas não é nula,  $\Delta m^2 \neq 0$ , teríamos como consequência  $\bar{E}_{12} - M \neq 0$ , de modo que, no sistema de repouso da partícula de massa  $M$  (ou, em linhas gerais, no sistema de referência do centro de massa), sob nenhuma hipótese, as diferenças de momentos, energias e velocidades seriam nulas, ou seja,  $\Delta p \neq 0$ ,  $\Delta E \neq 0$  e  $\Delta \mathbf{v} \neq 0$ . Concluímos que não existe nenhum sistema de referência onde  $\Delta \mathbf{v} = 0$  uma vez que, neste caso,

a diferença de velocidades deveria ser nula em qualquer sistema de referência (invariância de Lorentz). Também não existe nenhum sistema de referência onde  $\Delta p = 0$ . De fato, ao aplicarmos uma transformação de Lorentz com velocidade  $\beta$  a partir do sistema de repouso da partícula  $M$ , encontraremos

$$\begin{aligned}\Delta p' &= \gamma(\Delta p - \beta \Delta E), \\ \Delta E' &= \gamma(\Delta E - \beta \Delta p),\end{aligned}\quad (10)$$

de modo que, para satisfazermos  $\Delta p' = 0$ , é necessária a imposição de uma condição fisicamente inconcebível sobre  $\beta$ ,

$$\beta = \left| \frac{\Delta p}{\Delta E} \right| = \frac{(p_1 + m_o)^{\frac{1}{2}} + (p_2 + m_o)^{\frac{1}{2}}}{2\bar{p}_{12}} > 1. \quad (11)$$

onde o subíndice  $M$  se refere à massa total  $M$ .

Se desejássemos estender o resultado acima para um sistema que não fosse o sistema de repouso do centro de massas, poderíamos efetuar um *boost* de Lorentz na direção que faz um ângulo  $\alpha$  com o momento da partícula oscilante no novo sistema de referência. Neste caso, a conservação de momento e de energia implicaria em

$$\Delta E = \frac{\Delta m^2}{2E_M} \quad (12)$$

e

$$\Delta p = \frac{\Delta m^2}{2} \left[ \frac{\bar{E}_{12}^o}{\bar{E}_{12} P_M \cos(\alpha) - E_M \bar{p}_{12}} \right] \quad (13)$$

Tais vínculos podem ser úteis para identificarmos quão realísticas são as aproximações que se seguem no estudo do problema de oscilação de sabores. Ou seja, já neste ponto, podemos observar que não é fisicamente correto assumirmos momentos diferentes e energias iguais para diferentes autoestados de massa, o que frequentemente ocorre no estudo com ondas planas.

## 2.2. O tratamento com ondas planas

Apesar de apresentar algumas inconsistências (apontadas no fim desta seção), o tratamento com ondas planas se apresenta como uma ferramenta teórica conveniente para o estudo fenomenológico dos problemas de oscilação. A evolução espaço-temporal em uma dimensão para uma partícula livre é convenientemente descrita por

$$\phi_i(z, t) = N \exp[-i\Phi_i(z, t)] \quad (14)$$

onde  $\Phi_i(z, t) = E(p_z, m_i) t - p_z z$  é uma fase invariante de Lorentz.

Uma vez que o Hamiltoniano  $H_i$  é um operador Hermitiano, o produto entre as funções de onda  $\phi_i^\dagger(z, t) \phi_i(z, t)$  pode ser definido como uma densidade de probabilidades [35] a qual é uma quantidade positiva definida independente do tempo, de modo que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \partial_t \left( \phi_i^\dagger(z, t) \phi_i(z, t) \right) = \\ d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dz \phi_i^\dagger(z, t) \phi_i(z, t) \right) \\ \frac{dt}{dt} = 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Em um sistema físico no qual o estado inicial de uma partícula seja representado por um autoestado de sabor  $\nu_\alpha$ , segundo os cálculos com ondas planas, a probabilidade de encontrarmos um autoestado de sabor  $\nu_\beta$  é convenientemente expressa [25] em termos do ângulo de mistura  $\theta$  e da diferença de fases  $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$  por

$$\begin{aligned}P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \\ \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) |\phi_1(z, t) - \phi_2(z, t)|^2 = \\ \sin^2(2\theta) \frac{1 - \cos \Delta\Phi}{2}.\end{aligned}\quad (16)$$

De fato, conforme observamos na fórmula (16), o formalismo com ondas planas [25] ignora qualquer efeito que eventualmente possa aparecer devido a forma analítica das funções de onda envolvidas. Além do mais, por completeza, na expressão para oscilação de probabilidades, os fatores relacionados à instabilidade de uma partícula massiva (no caso de um méson, isto é, uma partícula que possa decair em outras tantas) precisam ser considerados de modo que se descreva de forma completa o processo de oscilação [19]<sup>2</sup>. A fase  $\Delta\Phi$  invariante de Lorentz é usualmente dada em termos de uma distância  $L$  (percorrida em um tempo  $T$ ), de uma diferença de massas  $\Delta m^2$ , e de um valor médio para o momento  $\bar{p}$ . Frequentemente se assume  $T \sim L$  e  $p_{1,2} \sim E_{1,2}$ , isto é,

$$\Delta\Phi = T \Delta E - L \Delta p \approx L(\Delta E - \Delta p). \quad (17)$$

No limite não-relativístico teríamos

$$\Delta\Phi \approx \Delta m L, \quad (18)$$

<sup>2</sup>Não nos estenderemos sobre o estudo dos fenômenos de oscilação para partículas instáveis. Para interesse mais geral do leitor, sugerimos a revisão feita por Beuthe [20].

e, em uma aproximação ultra-relativística, teríamos

$$\Delta\Phi \approx \frac{\Delta m^2}{2\bar{p}}, \quad (19)$$

que levaria à já bem conhecida expressão [24, 25, 33]

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{2\bar{p}} L\right) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\pi L}{L_{osc}}\right), \quad (20)$$

onde  $L_{osc}$  é a distância na qual  $\Delta\Phi$  é igual a  $2\pi$ .

Neste ponto, poderia ser mais interessante, e até mesmo mais condizente com a física, procurarmos um tratamento mais refinado do que a aproximação com ondas planas. De fato, uma condição necessária para observarmos o fenômeno de oscilação impõe que a fonte e o detector de partículas oscilantes sejam localizados em uma região delimitada por  $\delta z$  muito menor do que o comprimento de oscilação  $L_{osc}$ ,  $L_{osc} \gg \delta z$ . Isto seria possível somente se o momento ( $p$ ) e a energia ( $E$ ) da partícula oscilante apresentassem uma incerteza em seus valores tal que o erro (ou incerteza) na mediada de  $m^2$  fosse dado por  $\delta m^2$ ,

$$\delta m^2 = [(2E \delta E)^2 + (2p \delta p)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

com valor maior do que a diferença de massas  $|m_1^2 - m_2^2| = \Delta m^2$ ,  $\delta m^2 \geq \Delta m^2$ , caso contrário, não seria possível quantificar as oscilações observadas [19]. Caso essa condição não seja satisfeita, teríamos  $\Delta m^2 \geq 2p \delta p$ . Mas a relação de incerteza de Heisenberg,  $\delta z \delta p \geq 1$ , quando substituída na fase de oscilação da Eq. (19), fornece

$$\delta z \geq \frac{2p}{|\delta m^2|} \geq \frac{L_{osc}}{2\pi}, \quad (22)$$

a qual é contrária à condição sugerida como necessária para que se observe oscilação,  $L_{osc} \gg \delta z$ .

Este consiste no principal argumento em favor de um tratamento com pacote de ondas [26].

### 3. Pacotes de ondas gaussianos

A evolução temporal de um pacote de ondas que representa um autoestado de sabor pode ser descrita de maneira geral pela expressão (4). Já observamos anteriormente que o coeficiente de  $\nu_\beta$  na Eq. (4) corresponde à amplitude de transição de sabor  $\alpha \rightarrow \beta$  designado pela Eq. (5). A probabilidade de encontrarmos um estado de sabor  $\nu_\beta$  em um instante de tempo  $t$  seria convenientemente escrita como a integral do módulo ao quadrado da amplitude de transição de sabor, ou seja,

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\phi_\beta(z, t; \theta)|^2, \quad (23)$$

que pode ser reescrita como

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{1 - \text{INT}(t)\}, \quad (24)$$

onde  $\text{INT}(t)$  representa o termo de interferência entre os autoestados de massa dado por

$$\text{INT}(t) = \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dz \phi_1^\dagger(z, t) \phi_2(z, t) \right]. \quad (25)$$

Se considerarmos os autoestados de massa  $m_s$  ( $s = 1, 2$ ) representados por pacotes de ondas dados no instante  $t = 0$  por

$$\phi_s(z, 0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{z^2}{a^2}\right] \exp[ip_s z], \quad (26)$$

as funções de onda que descrevem a evolução temporal dos mesmos serão dadas por

$$\phi_s(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_s) \exp[-i E(p_z, m_s) t + i p_z z], \quad (27)$$

onde

$$E(p_z, m_s) = (p_z^2 + m_s^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \varphi(p_z - p_s) = (2\pi a^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(p_z - p_s)^2 a^2}{4}\right]. \quad (28)$$

De maneira a obtermos a probabilidade de oscilações, nós poderíamos calcular o termo de interferência  $\text{INT}(t)$  resolvendo a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_1) \varphi(p_z - p_2) \exp[-i \Delta E(p_z) t] = \exp\left[-\frac{(a \Delta p)^2}{8}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_o) \exp[-i \Delta E(p_z) t], \quad (29)$$

onde levamos a integração em  $z$  em uma integração em  $p_z$  e introduzimos as quantidades  $\Delta p = p_1 - p_2$ ,  $p_o = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$  e  $\Delta E(p_z) = E(p_z, m_1) - E(p_z, m_2)$ .

Obtemos um termo de oscilação limitado por uma função exponencial de  $(a \Delta p)^2$  em qualquer instante de tempo. Sob esta condição, nunca observaríamos um autoestado de sabor *puro*. Além do mais, as oscilações são consideravelmente suprimidas se  $a \Delta p > 1$ . A condição necessária para que as oscilações sejam mensuráveis corresponde a  $a \Delta p \ll 1$ . Tal vínculo pode também ser expresso em termos de  $\delta p \gg \Delta p$  onde  $\delta p$  é a incerteza do momento da partícula. O *overlap* entre as distribuições de momentos é de fato relevante somente quando  $\delta p \gg \Delta p$ . Conseqüentemente, sem perda de generalidade, podemos assumir

$$\text{INT}(t) = \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_o) \exp[-i \Delta E(p_z) t] \right]. \quad (30)$$

Na literatura, esta equação é freqüentemente encontrada quando se assume dois autoestados de massa representados por pacotes de ondas descritos pela mesma distribuição de momentos centrada em torno de um valor médio  $p_o$ . Tal hipótese simplificadora também garante a criação *instantânea* de um autoestado *puro* de sabor  $\nu_\alpha$  em  $t = 0$  [30], logo, optamos por utilizar tal simplificação nas seções subseqüentes.

### 3.1. Aproximação analítica

De maneira a obter  $\phi_s(z, t)$  resolvendo analiticamente a integral da Eq. (27), nós primeiramente reescrevemos a energia  $E(p_z, m_s)$  como

$$E(p_z, m_s) = E_s \left[ 1 + \frac{p_z^2 - p_o^2}{E_s^2} \right]^{\frac{1}{2}} = E_s [1 + \sigma_s (\sigma_s + 2v_s)]^{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

onde  $E_s = (m_s^2 + p_o^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $v_s = \frac{p_o}{E_s}$  e  $\sigma_s = \frac{p_z - p_o}{E_s}$  passa a ser uma nova variável de integração. Se assumirmos uma distribuição de momentos altamente centrada, isto é,  $(a E_s)^{-1} \sim \sigma_s \ll 1$ , a energia  $E(p_z, m_s)$  pode ser expandida em uma série de potências de  $\sigma_s$ . Entretanto, a integral na Eq. (27) pode ser *analiticamente* calculada somente se considerarmos termos até a ordem  $\sigma_s^2$  na expansão em série.

Neste caso, a energia  $E(p_z, m_s)$  se torna

$$E(p_z, m_s) = E_s \left[ 1 + \sigma_s v_s + \frac{\sigma_s^2}{2} (1 - v_s^2) \right] + \mathcal{O}(\sigma_s^3) \approx E_s + p_o \sigma_s + \frac{m_s^2}{2E_s} \sigma_s^2. \quad (32)$$

Ao substituirmos (32) na Eq. (27) e reescrevermos a integração em  $p_z$  em uma integração em  $\sigma_s$ , nós obtemos a forma explícita da evolução temporal do pacote de ondas

$$\begin{aligned} \phi_s(z, t) &\approx (2\pi a^2)^{\frac{1}{4}} \exp[-i(E_s t - p_o z)] \times \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_s}{2\pi} E_s \exp\left[-\frac{a^2 E_s^2 \sigma_s^2}{4}\right] \exp\left[-i(p_o t - E_s z)\sigma_s - i\frac{m_s^2 t}{2E_s} \sigma_s^2\right] \\ &= \left(\frac{2}{\pi a_s^2(t)}\right)^{\frac{1}{4}} \exp[-i(E_s t - p_o z)] \exp\left[-\frac{(z - v_s t)^2}{a_s^2(t)} - i\theta_s(t, z)\right], \end{aligned} \quad (33)$$

onde

$$a_s(t) = a \left(1 + \frac{4m_s^4}{a^4 E_s^6} t^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \theta_s(t, z) = \left\{ \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2m_s^2 t}{a^2 E_s^3} \right] - \frac{2m_s^2 t}{a^2 E_s^3} \frac{(z - v_s t)^2}{a_s^2(t)} \right\}.$$

As quantidades dependentes do tempo  $a_s(t)$  e  $\theta_s(t, z)$  contêm todas as informações fisicamente relevantes que chegam com o termo de segunda ordem na expansão em série de potências (32). O *spreading* do pacote de ondas pode ser imediatamente descrito quando interpretamos  $a_s(t)$  como uma largura média dependente do tempo, ou seja, a localização espacial da partícula é efetivamente dada por  $a_s(t)$  que aumenta durante a evolução temporal. No regime de propagação não-relativístico (NR),  $a_s(t)$  é dada por [35]

$$a_s^{NR}(t) = a \left( 1 + \frac{4}{a^4 m_s^2} t^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Para tempos  $t \gg a^2 m_s$ , a largura efetiva do pacote de ondas  $a_s^{NR}(t)$  se torna muito maior do que a largura inicial  $a$ . De maneira oposta, o *spreading* do pacote de ondas no regime de propagação ultra-relativístico (UR) é expresso em termos de

$$a_s^{UR}(t) = a \left( 1 + \frac{4m_s^4}{a^4 p_o^6} t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx a \quad (35)$$

O *spreading* no regime UR é irrelevante se considerarmos a mesma escala de tempo  $T$  para ambos os casos NR e UR, isto é,  $a_s^{UR}(T) \ll a_s^{NR}(T)$ . Para entendermos melhor tal colocação, na Fig. 1 nós ilustramos a dependência temporal de  $a_s(t)$  onde assumimos uma partícula com um valor definido de massa  $m_s$ . Ao calcularmos o quadrado do módulo da função de onda de um autoestado de massa,

$$|\phi_s(z, t)|^2 \approx \left( \frac{2}{\pi a_s^2(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{2(z - v_s t)^2}{a_s^2(t)} \right], \quad (36)$$

podemos ilustrar o *spreading* do pacote de ondas em ambos os regimes NR e UR na Fig. 2, que está em correspondência com a Fig. 1.

Assim, confirmamos que o *spreading* do pacote de ondas é de fato irrelevante para partículas no regime UR.

Retornando a Eq. (33), podemos interpretar um outro efeito de segunda ordem através da observação do comportamento temporal da fase  $\theta_s(t, z)$ . Devido à localização do pacote de ondas, nós assumimos que a amplitude da função de onda é relevante somente no intervalo  $|v_s t - z| \leq a_s(t)$ . Cada ponto espacial  $z$  evolui no tempo de uma maneira diferente. Se, por exemplo, observamos a propagação de um ponto

espacial  $z = v_s t$ , a função crescente  $\theta_s(t, v_s t)$  assume valores limitados pelo intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Por outro lado, para qualquer ponto espacial dado pela expressão  $z = v_s t + K a_s(t)$ ,  $0 < |K| \leq 1$ , a fase  $\theta_s(t, z)$  não tem um limite inferior. Nós mostraremos na seção seguinte que a presença de uma fase dependente do tempo pode modificar o caráter oscilatório da fórmula de conversão de sabores. De toda forma, a fase  $\theta_s(t, z)$  acaba por não influenciar propagação de um autoestado de massa *livre* como observamos de imediato através da Eq. (36).

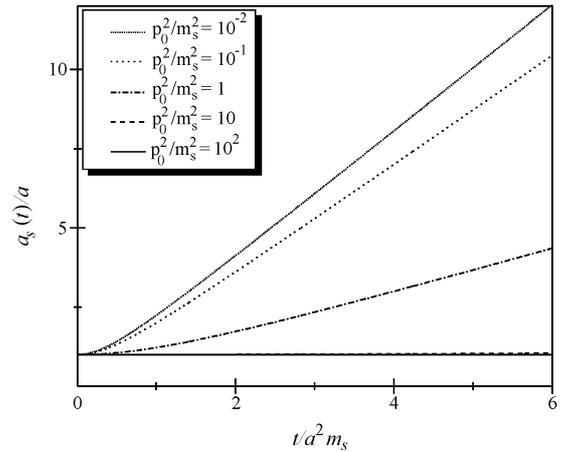


Figura 1 - A dependência temporal da largura do pacote de ondas para diferentes valores da razão  $m_s/p_o$ . Ao considerarmos uma massa fixa  $m_s$ , podemos comparar os regimes de propagação não-relativístico ( $p_o \ll m_s$ ) e ultra-relativístico ( $p_o \gg m_s$ ). Observamos que o *spreading* é de fato relevante na primeira situação. No limite ultra-relativístico ( $m_s = 0$ ), a largura do pacote de ondas não se modifica durante a propagação espaço-temporal.

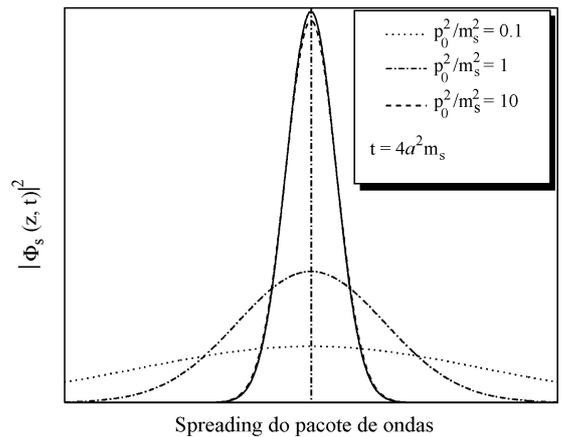


Figura 2 - *Spreading* do pacote de ondas no caso de regimes não-relativísticos e ultra-relativísticos descrito no tempo  $t = 4a^2 m_s$  em correspondência com Fig. 1. A linha sólida representa a forma do pacote de ondas no instante  $t = 0$ . No caso ultra-relativístico, expresso em termos de  $\frac{p_o^2}{m_s^2} = 10$ , o *spreading* é de fato irrelevante.

### 3.2. Probabilidade de oscilação

Após termos quantificado analiticamente as correções de segunda ordem dos pacotes de onda que representam autoestados de massa que evoluem no tempo, obteremos agora o termo de interferência  $INT(t)$  de modo a escrever de forma explícita uma expressão para a probabilidade de conversão de sabores. Ao resolver-

mos a integral (30) com a aproximação (31) e executarmos algumas manipulações matemáticas, teremos

$$INT(t) = AM(t) \times OSC(t), \quad (37)$$

onde fatorizamos o comportamento de amortização do termo de interferência através de

$$AM(t) = (1 + SP^2(t))^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2 (1 + SP^2(t))} \right] \quad (38)$$

ao mesmo tempo em que isolamos o caráter de oscilação temporal da fórmula de conversão de sabores dado por

$$\begin{aligned} OSC(t) &= Re \{ \exp [-i\Delta E t - i\Theta(t)] \} \\ &= \cos [\Delta E t + \Theta(t)]. \end{aligned} \quad (39)$$

As quantidades dependentes do tempo  $SP(t)$  e  $\Theta(t)$  são dadas respectivamente por

$$SP(t) = \frac{t}{a^2} \Delta \left( \frac{m^2}{E^3} \right) = \rho \frac{\Delta v t}{a^2 p_o} = -\rho \frac{\Delta E t}{a^2 \bar{E}^2} \quad (40)$$

e

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \left\{ \frac{1}{2} \arctan [SP(t)] - \right. \\ &\quad \left. \frac{a^2 p_o^2}{2\rho^2} \frac{SP^3(t)}{[1 + SP^2(t)]} \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \left[ 3 + \left( \frac{\Delta E}{\bar{E}} \right)^2 \right] \frac{p_o^2}{\bar{E}^2} \quad e \\ \bar{E} &= \sqrt{E_1 E_2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Observamos que  $SP(t)$  introduz as correções de segunda ordem e, conseqüentemente, parametriza os efeitos adicionais devidos ao *spreading* do pacote de ondas na probabilidade de oscilação de sabores. Se  $\Delta E \ll \bar{E}$ , o parâmetro  $\rho$  é limitado pelo intervalo  $[1, -2]$  e assume o valor zero quando  $\frac{p_o^2}{\bar{E}^2} \approx \frac{1}{3}$ . Desta forma, ao considerarmos valores continuamente crescentes do momento  $p_o$ , de regimes NR até regimes UR, e ao mesmo tempo fixarmos o valor de  $\frac{\Delta E}{a^2 \bar{E}^2}$ , as derivadas temporais de  $SP(t)$  e de  $\Theta(t)$  terão seus sinais invertidos quando  $\frac{p_o^2}{\bar{E}^2}$  atinge o valor de  $\frac{1}{3}$ . Ao mesmo tempo, o *slippage* entre os pacotes de ondas é quantificado pelo comportamento amortizante de  $AM(t)$ . Para compararmos  $AM(t)$  com a função correspondente sem as correções de segunda ordem (ou seja, sem os efeitos de *spreading*),

$$AM_{(SS)}(t) = \exp \left[ -\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2} \right], \quad (43)$$

substituímos  $SP(t)$  dado pela expressão (40) na Eq. (38) e obtemos a razão

$$\frac{AM(t)}{AM_{(SS)}(t)} = \left[ 1 + \rho^2 \left( \frac{\Delta E t}{a^2 \bar{E}^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ \frac{\rho^2 p_o^2 (\Delta E t)^4}{2 a^6 \bar{E}^8 \left[ 1 + \rho^2 \left( \frac{\Delta E t}{a^2 \bar{E}^2} \right)^2 \right]} \right]. \quad (44)$$

O limite NR é obtido quando fazemos  $\rho^2 = 1$  e  $p_o = 0$  na Eq. (44). Da mesma maneira, o limite UR

é obtido quando fazemos  $\rho^2 = 4$  e  $p_o = \bar{E}^3$ . De fato, a influência mínima devido às correções de se-

<sup>3</sup>Paradoxalmente, as correções de segunda ordem parecem ser mais influentes em uma propagação UR, o que contradiria os resultados obtidos na subseção anterior. Contudo, tal comparação não é conveniente uma vez que não fixamos os valores das massas neste caso. Quando fixamos os valores das massas, as correções de segunda ordem se tornam muito mais relevantes para regimes NR de propagação.

gunda ordem ocorrem quando  $\frac{p_o^2}{E^2} \approx \frac{1}{3}$  ( $\rho \approx 0$ ). De toda maneira, sob condições de *slippage mínimo*, isto é, para  $t \approx 0$ , nós sempre teremos  $\frac{AM(t)}{AM_{WS}(t)} \approx 1$ . Na figura Fig. 3 nós graficamos a razão dada pela Eq. (44) para diferentes regimes de propagação escolhendo arbitrariamente  $a\bar{E} = 10$ . No regime assintótico  $SP(t)$  estende efetivamente a interferência entre os pacotes de ondas uma vez que

$$\frac{AM(t)}{AM_{WS}(t)} \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{a\bar{E}}{(\rho \Delta E t)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ \frac{p_o^2 (\Delta E t)^2}{2 a^2 \bar{E}^4} \right] \gg 1, \quad (45)$$

mas, neste caso, as oscilações já foram quase completamente destruídas pelas características de  $AM(t)$ <sup>4</sup>.

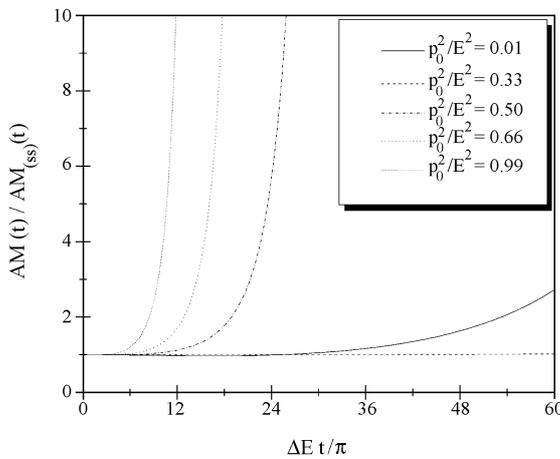


Figura 3 - Comparação entre os comportamentos de amortização da probabilidade de oscilação considerando os casos *com* ( $AM(t)$ ) e *sem* ( $AM_{(SS)}(t)$ ) correções de segunda ordem. As correções de segunda ordem podem ser, de fato, efetivas, tanto em regimes não-relativísticos, como em regimes (ultra)relativísticos de propagação, contudo, são destruídas muito mais rapidamente no último caso. Se  $\frac{p_o^2}{E^2} \approx \frac{1}{3}$ , as correções de segunda ordem são mínimas.

A função oscilante  $OSC(t)$  do termo de interferência  $INT(t)$  difere do termo de oscilação *standard*,  $\cos[\Delta E t]$ , pela presença de uma fase adicional  $\Theta(t)$  a qual é essencialmente uma correção de segunda ordem. As modificações introduzidas pela fase adicional  $\Theta(t)$  são apresentadas para diferentes regimes de propagação na Fig. 4 onde comparamos  $OSC(t)$  com o termo *standard* de oscilação dado por  $\cos[\Delta E t]$ . Para estudarmos a fase  $\Theta(t)$  é conveniente definirmos um tempo  $t_o > 0$  para o qual esta função atinge seu valor de zero, isto é,  $\Theta(t_o) = 0$ . Se  $t \leq t_o$ , o módulo da fase  $\Theta(t)$  atinge um limite superior quando

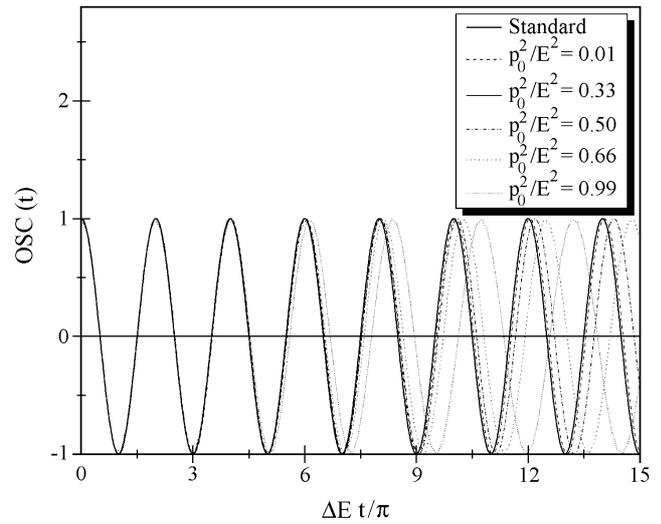


Figura 4 - O comportamento temporal de  $OSC(t)$  comparado com o comportamento de oscilação *standard* obtido com ondas planas,  $\cos[\Delta E t]$ , para diferentes regimes de propagação. A fase adicional  $\Theta(t)$  modifica a característica de oscilação após um certo tempo de propagação. Novamente observamos que as modificações em relação ao comportamento *standard* são mínimas quando  $\frac{p_o^2}{E^2} \approx \frac{1}{3}$ .

$$|\Delta E t| = a^2 \bar{E}^2 \sqrt{\frac{\sqrt{\left(3 - \frac{\rho^2}{a^2 p_o^2}\right)^2 + 4 \frac{\rho^2}{a^2 p_o^2}} - \left(3 - \frac{\rho^2}{a^2 p_o^2}\right)}{2\rho^2}}, \quad (46)$$

conseqüentemente, o máximo de  $|\Theta(t)|$  depende, não somente do regime de propagação (valor de  $p_o$ ), mas também da largura  $a$  do pacote de ondas. De qualquer maneira, os valores assumidos por  $|\Theta(t)|$  estão restritos ao intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Se  $t > t_o$ , a fase  $\Theta(t)$  não tem um limite oposto e sua dependência temporal é essencialmente dada pelo segundo termo da Eq. (41). Con-

tudo, é importante notarmos que para  $t > t_o$  o caráter oscilante é gradualmente destruído por  $AM(t)$ . Sendo assim, um novo limite *efetivo* assumido por  $\Theta(t)$  é determinado pelo comportamento amortizante de  $AM(t)$ . Para ilustrarmos este ponto, nós graficamos ambas as curvas que representam  $AM(t)$  e  $\Theta(t)$  na Fig. 5 utilizando os mesmos parâmetros empregados no estudo

<sup>4</sup>Veja a Fig. 5 logo mais a seguir.

de  $AM(t)$ . A fase se modifica lentamente em um regime NR. Em um regime UR, a fase  $\Theta(t)$  atinge rapidamente seu limite inferior quando  $\frac{p_0^2}{E^2} > \frac{1}{3}$  e,

pois de um tempo  $t_o$ , a mesma continua a se modificar de maneira aproximadamente linear no tempo. Entretanto, efetivamente, as oscilações desaparecem rapidamente após  $t_o$ .

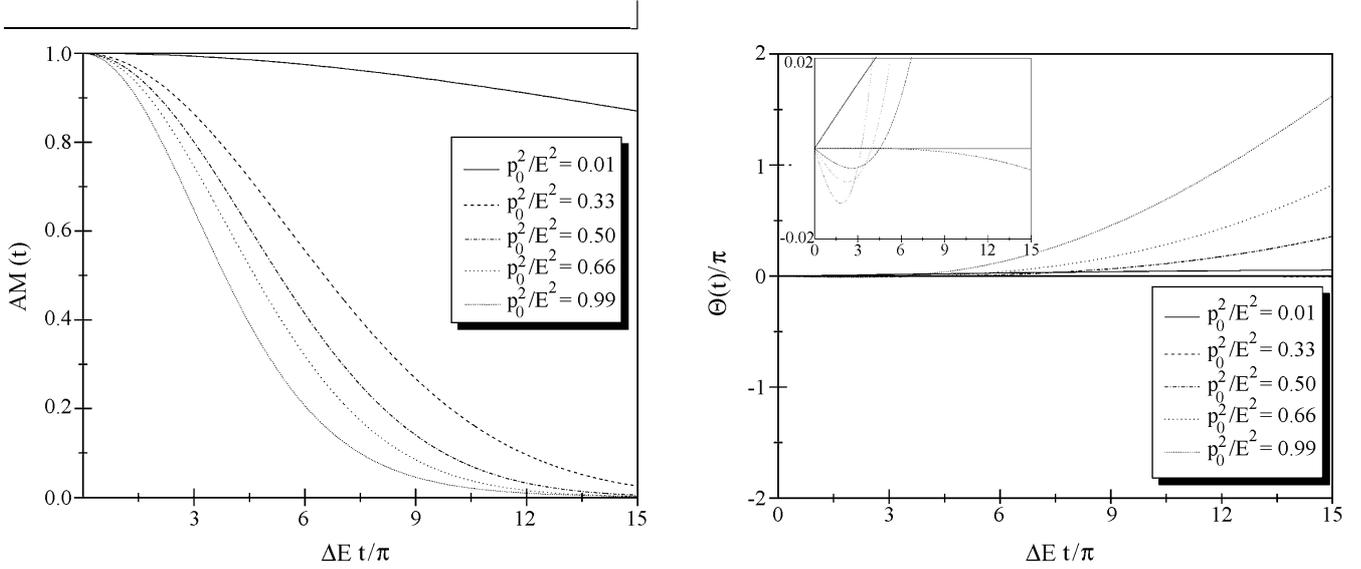


Figura 5 - O comportamento temporal da fase  $\Theta(t)$ . Os valores assumidos por  $\Theta(t)$  são *efetivos* somente enquanto o termo de interferência não é completamente amortizado. Na figura superior, podemos observar o comportamento de  $AM(t)$  o qual determina efetivamente os valores limites assumidos por  $\Theta(t)$  em cada um dos regimes de propagação. Para regimes relativísticos com  $\frac{p_0^2}{E^2} > \frac{1}{3}$ , a função  $\Theta(t)$  atinge rapidamente seu limite inferior como podemos observar no pequeno retângulo da figura inferior. Nós utilizamos arbitrariamente  $a\bar{E} = 10$  para obtermos os gráficos acima.

Ao superpormos os efeitos de  $AM(t)$  sobre o caráter de oscilação descrito por  $OSC(t)$  expresso na

Fig. 5, nós imediatamente obtemos a probabilidade de oscilação de sabores dada explicitamente por

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - (1 + SP^2(t))^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2(1 + SP^2(t))} \right] \cos [\Delta E t + \Theta(t)] \right\}. \quad (47)$$

Obviamente, quanto maior é o valor de  $a\bar{E}$ , menores serão os efeitos devidos à localização do pacote de ondas. Se  $a\bar{E}$  assume um valor suficientemente elevado de modo a que as correções de segunda ordem da Eq. (31) não fossem con-

sideradas, poderíamos calcular a probabilidade de oscilação levando em conta somente o termo dominante de primeira ordem que parametriza o efeito de *slippage*, ou seja, teríamos

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2} \right] \cos [\Delta E t] \right\}. \quad (48)$$

Sob condições de *slippage mínimo*, no caso em que  $t \approx 0$ , a expressão acima reproduz o mesmo resultado obtido no formalismo com ondas planas,

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{(\Delta v t)^2}{2a^2} \right] \cos[\Delta E t] \right\} \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{1 - \cos[\Delta E t]\}, \quad (49)$$

uma vez que assumimos  $a\bar{E} \gg 1$ .

#### 4. Análise com diferentes formas de pacotes de ondas

Neste momento, nós verificaremos em quais circunstâncias a forma do pacote de ondas pode alterar a probabilidade de oscilação de sabores. Para descrevermos a evolução temporal de um pacote de ondas, nós consideramos agora uma função *Quadrada* e uma função *Seno* (*suavemente amortizada*) ao invés de uma função *Gaussiana*. Ainda a pouco, notamos que é substancialmente simples desenvolver um estudo analítico com uma função *Gaussiana* uma vez que a transformada de Fourier da mesma no espaço de momentos é também uma função *Gaussiana*. Ao contrário, o estudo com as funções *Quadrada* e *Seno* restringe os cálculos à consideração de somente as

correções de primeira ordem na Eq. (32), ou seja, teremos

$$E(p_z, m_s) \approx E_s + p_o \sigma_s \quad (50)$$

que permite apenas calcular o termo dominante do efeito de *slippage*.

A análise subsequente resulta em uma boa aproximação para o regime de propagação onde  $p_o > m_{1,2}$ . Para simplificarmos esta discussão, nós adotaremos a seguinte definição para o estado inicial,

$$\phi_s^{(i)}(z, 0) = F^{(i)}(z) \exp[ip_o z], \quad (51)$$

onde  $i = G, Q, S$  correspondem respectivamente às funções *Gaussiana*, *Quadrada* e *Seno*.

A evolução temporal de um pacote de ondas será expressa em termos de  $\varphi^{(i)}(p_z - p_o)$ , a transformada de Fourier de  $\phi_s^{(i)}(z, 0)$ , e a probabilidade de oscilações seria imediatamente calculada através da expressão (23).

Da maneira como calculamos na seção anterior, no caso de uma função *Gaussiana*, teríamos

$$F^{(G)}(z) = \left(\frac{2}{\pi a_G^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{z^2}{a_G^2}\right] \quad \text{e} \\ \varphi^{(G)}(p_z - p_o) = (2\pi a_G^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{a_G^2(p_z - p_o)^2}{4}\right]. \quad (52)$$

Neste caso, o pacote de ondas teria a forma

$$\phi_s^{(G)}(z, t) \approx \left(\frac{2}{\pi a_G^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp[-i(E_s t - p_o z)] \exp\left[\frac{(z - v_s t)^2}{a_G^2}\right] \quad (53)$$

e a probabilidade de oscilação seria reproduzida pela Eq. (48).

De fato, tais resultados poderiam ser imediatamente obtidos se impuséssemos que  $a_s(t) = a$  e  $\theta_s(t, z) = 0$  na Eq. (33).

No caso de uma função *Quadrada*, nós teríamos

$$F^{(Q)}(z) = \begin{cases} a_Q^{-\frac{1}{2}} & z \in \left[-\frac{a_Q}{2}, \frac{a_Q}{2}\right] \\ 0 & z \notin \left[-\frac{a_Q}{2}, \frac{a_Q}{2}\right] \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi^{(Q)}(p_z - p_o) = \frac{2 a_Q^{\frac{1}{2}}}{a_Q(p_z - p_o)} \sin\left[\frac{a_Q(p_z - p_o)}{2}\right].$$

Neste caso, o pacote de ondas teria a forma

$$\phi_s^{(Q)}(z, t) \approx \begin{cases} a_Q^{-\frac{1}{2}} \exp[-i(E_s t - p_o z)] & z \in \left[v_s t - \frac{a_Q}{2}, v_s t + \frac{a_Q}{2}\right] \\ 0 & z \notin \left[v_s t - \frac{a_Q}{2}, v_s t + \frac{a_Q}{2}\right] \end{cases} \quad (54)$$

e a probabilidade de oscilação seria dada por

$$P^{(Q)}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \begin{cases} \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\Delta v t}{a_Q} \right] \cos [\Delta E t] \right\} & t \leq \frac{a_Q}{\Delta v} \\ 0 & t > \frac{a_Q}{\Delta v} \end{cases} \quad (55)$$

Finalmente, no caso de uma função *Seno*, nós teríamos

$$F^{(S)}(z) = \left( \frac{a_S}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin [z a_S^{-1}]}{z} \quad \text{e} \quad \varphi^{(S)}(p_z - p_o) = \begin{cases} (a_S \pi)^{\frac{1}{2}} & a_S (p_z - p_o) \in [-1, 1] \\ 0 & a_S (p_z - p_o) \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

Neste caso, o pacote de ondas teria a forma

$$\phi_s^{(S)}(z, t) \approx \left( \frac{a_S}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp [-i (E_s t - p_o z)] \frac{\sin [a_S^{-1} (z - v_s t)]}{(z - v_s t)} \quad (56)$$

e a probabilidade de oscilação seria dada por

$$P^{(S)}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a_S}{\Delta v t} \right) \sin \left[ \frac{\Delta v t}{a_S} \right] \cos [\Delta E t] \right\}. \quad (57)$$

Os resultados acima merecem alguns comentários. Primeiramente, nós observamos que todas as três formas dos pacotes de ondas fornecem o mesmo com-

portamento oscilante. Em uma análise simplificada, independentemente do regime de propagação e sem a introdução de qualquer parâmetro numérico, nós podemos comparar o comportamento de amortização de cada uma das probabilidades de oscilação em termos de uma variável em comum  $x(t) = \frac{\Delta v t}{a_{(G)}}$ . Se definimos os coeficientes  $\alpha_Q = \frac{a_G}{a_Q}$  e  $\alpha_S = \frac{a_G}{a_S}$  e recorremos à definição de  $AM(t)$ , nós podemos escrever

$$AM^{(G)}(t) = \exp \left[ -\frac{x^2(t)}{2} \right], \quad AM^{(Q)}(t) = \begin{cases} 1 - \alpha_Q x(t) & \alpha_Q x(t) \leq 1 \\ 0 & \alpha_Q x(t) > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad AM^{(S)}(t) = \frac{\sin [\alpha_S x(t)]}{\alpha_S x(t)} \quad (58)$$

Sob condições de *slippage mínimo*, isto é, quando  $x(t) \ll 1$ ,  $AM^{(G)}(t)$  e  $AM^{(S)}(t)$  apresentam uma dependência quadrática no tempo. Particularmente, se fazemos  $\alpha_S = \sqrt{3}$ , nós temos

$$AM^{(G)}(t) = AM^{(S)}(t) \approx 1 - \frac{x^2(t)}{2}, \quad (59)$$

ou seja, sob condições de *slippage mínimo*, as funções *Gaussiana* e *Seno* reproduzem exatamente a mesma característica de amortização da probabilidade de oscilação. Para resumirmos os resultados acima, nós ilustramos as probabilidades de oscilação para as três diferentes formas dos pacotes de ondas na Fig. 6 onde adotamos  $\alpha_Q = 1$  e  $\alpha_S = \sqrt{3}$ . Predomi-

nantemente para a função *Seno*, haverá sempre um caráter oscilante remanescente durante a propagação da partícula. Ao contrário, a função  $AM(t)^{(Q)}(t)$  desaparece linearmente e o caráter oscilante correspondente tende a zero muito mais rapidamente. O caráter oscilante cessa subitamente quando  $x(t) = \frac{1}{\alpha_S}$ . Os pacotes de ondas descritos por uma função *Seno* apresentam ainda um outro caráter peculiar. A probabilidade de oscilação assim produzida tem o comportamento oscilatório completamente suprimido a cada zero da função  $\sin [x(t)]$  mas retornam a oscilar após o mesmo. Após cada um desses zeros, função  $\sin [x(t)]$  muda o seu próprio sinal e, conseqüentemente, os pontos de máximo se transformam em pontos de mínimo, e vice-

versa, conforme é possível observar na Fig. 6. Para finalizar, nós ilustramos as propriedades até aqui discutidas na Fig. 7 onde observamos o efeito de *slippage* correspondente a cada uma das três diferentes formas de pacotes de ondas.

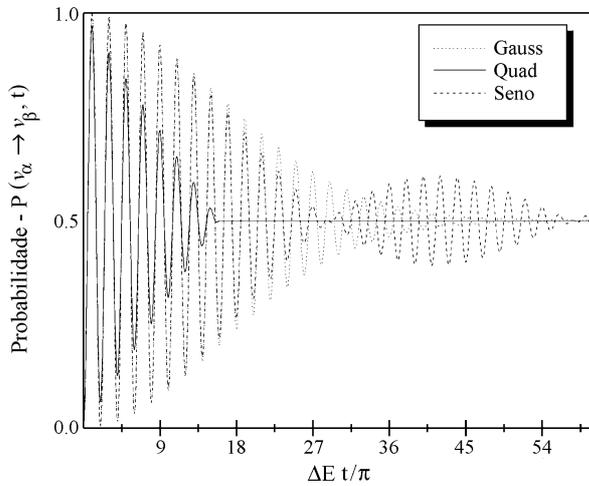


Figura 6 - As probabilidades de conversão de sabores para pacotes de ondas descritos pelas funções *Gaussiana*, *Quadrada* e *Seno* levando-se em conta as correções de primeira ordem em um cálculo analítico de  $INT(t)$ . Ao assumirmos  $a_G = a_Q = \frac{1}{\sqrt{3}}a_S$ , a função *Gaussiana* e a função *Seno* delineiam pacotes de ondas com exatamente a mesma dependência quadrática no tempo sob condições de *slippage mínimo* enquanto que a função *Quadrada* leva a um comportamento completamente diferente onde a característica de oscilação da probabilidade desaparece muito mais rapidamente.

### 5. Conclusões

Neste texto, após fazermos uma breve introdução sobre o *status* em que se encontra o estudo dos fenômenos quânticos de oscilação, nós calculamos analiticamente as correções de segunda ordem para a fórmula de conversão de sabores no caso em que autoestados de massa são descritos por pacotes de onda *Gaussianos*. Sob a condição particular de uma distribuição de momentos altamente centrada, nós obtivemos a expressão explícita para a evolução temporal dos autoestados de massa onde pudemos identificar o *spreading* do pacote de ondas. para os regimes (ultra)relativístico e não-relativístico de propagação. Em particular, nós ainda observamos que o *spreading* é de fato um efeito de segunda ordem praticamente irrelevante para partículas se propagando em regime (ultra)relativístico. Além disso, nós verificamos a presença de uma fase dependente do tempo adicional à fase *standard* do termo oscilante da fórmula de conversão de sabores. Esta fase adicional apresenta uma dependência temporal que modifica o caráter os-

cilante de uma maneira peculiar. Tais modificações são menos relevantes quando  $p_o^2 \approx \frac{1}{3}E^2$  e mais relevantes para regimes não-relativísticos de propagação. De toda maneira, as mesmas são completamente irrelevantes para regimes ultra-relativísticos uma vez que o comportamento amortizante do termo de interferência suprime significativamente o comportamento oscilante da fórmula de probabilidades.

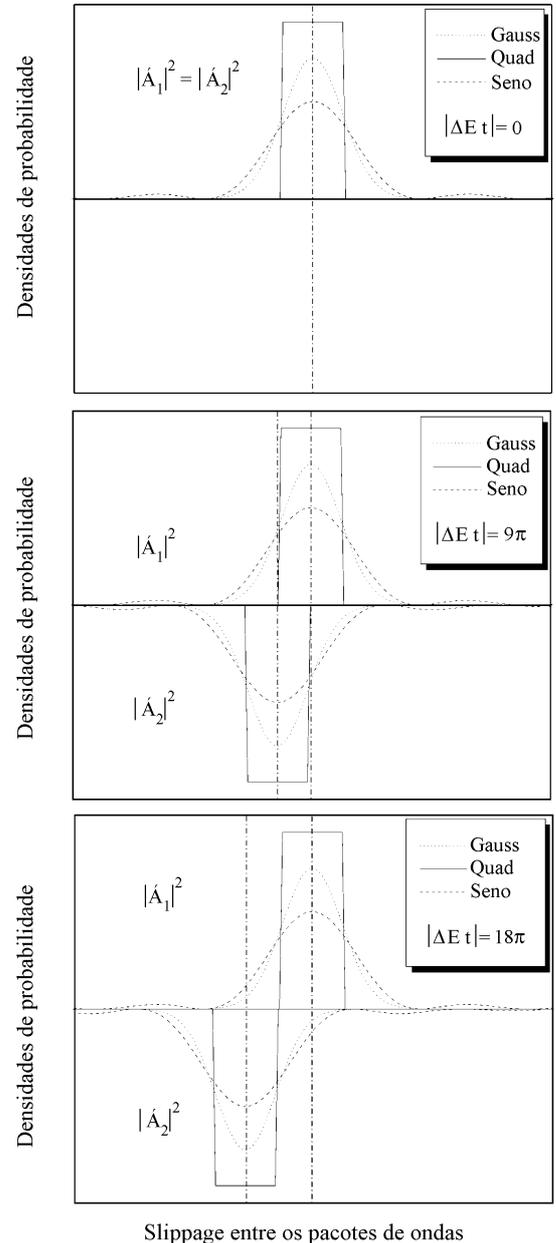


Figura 7 - O *slippage* entre pacotes de ondas para as três formas de pacotes de ondas: *Gaussiana*, *Quadrada* e *Seno*. Podemos observar que a interferência entre as funções *Quadradas* é abruptamente interrompida num determinado instante, enquanto que as outras duas formas de pacotes de ondas prolongam a interferência por um período de tempo maior. Isto complementa a explicação do comportamento oscilante ilustrado na Fig. 6.

Sabemos, porém, que tais resultados são fortemente influenciados pelo uso de pacotes de ondas *Gaussianos* na descrição dos autoestados de massa. De maneira a verificarmos como a forma do pacote de ondas poderia modificar a característica amortizante da probabilidade de oscilação de sabores, nós analisamos o *slippage* entre os pacotes de ondas associados a cada autoestado de massa considerando também uma função *Quadrada* e uma função *Seno*. Com o uso de uma aproximação analítica de primeira ordem, através de uma simples comparação entre os comportamentos de amortização da probabilidade de oscilação, nós ilustramos que, sob as condições de *slippage mínimo*, a função *Seno* e a função *Gaussiana* proporcionam resultados semelhantes, já a função *Quadrada* faz com que as oscilações desapareçam mais rapidamente.

Para finalizarmos, nós enfatizamos que, apesar de ser mais preciso e, eventualmente, fornecer resultados exatos, um tratamento numérico do problema de oscilações não nos permitiria observar determinados detalhes físicos que aparecem somente com o estudo analítico. Portanto, concluímos que o estudo analítico desenvolvido neste texto complementa e esclarece diversos aspectos que de longa data já foram introduzidos no estudo dos fenômenos quânticos de oscilação e se apresenta como um excelente exercício teórico para aqueles que se dispõem a iniciar o estudo do fenômeno de oscilação de sabores.

## Agradecimentos

Este trabalho foi possível graças ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

## Referências

- [1] M. Gell-Mann and A. Pais, Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
- [2] A. Pais and O. Piccioni, Phys. Rev. **100**, 1487 (1955).
- [3] V.L. Fitch, P.A. Piroué and R.B. Perkins, Nuovo Cimento **22**, 1160 (1961).
- [4] R.H. Good *et al.*, Phys. Rev. **124**, 1223 (1961).
- [5] P.K. Kabir, *The CP Puzzle*, (Academic Press, New York, 1968), and references therein.
- [6] H. Albrecht *et al.*, Phys. Lett. **B 192**, 245 (1987).
- [7] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **B 6**, 429 (1957).
- [8] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1972).
- [9] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **B 26**, 984 (1968).
- [10] V.N. Gribov and B. Pontecorvo, Phys. Lett. **B 28**, 493 (1969).
- [11] Q.R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002).
- [12] K. Egushi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
- [13] S. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. **B 537**, 179 (2002).
- [14] J.N. Bahcall, M.C. Gonzalez-Garcia and C. Pena-Garay, JHEP. **0207**, 054 (2002).
- [15] K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. **D 66**, 010001 (2002), in [PDG Collaboration] Review of Particle Physics in *Solar Neutrinos* by K. Nakamura.
- [16] M. Guzzo *et al.*, Nucl. Phys. **B 629**, 479 (2002).
- [17] J. Barranco, O.G. Miranda, T.I. Rashba, V.B. Semikoz and J.W.F. Valle, Phys. Rev. **D 66**, 093009 (2002).
- [18] H.J. Lipkin, Phys. Lett. **B 348**, 604 (1995).
- [19] M. Zralek, Acta Phys. Polon. **B 29**, 3925 (1998).
- [20] M. Beuthe, Phys. Rep. **375**, 105 (2003).
- [21] W.M. Alberico and S.M. Bilenky, *arXiv:hep-ph/0306239*.
- [22] M.C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, *arXiv:hep-ph/0202058*.
- [23] C. Giunti and C.W. Kim, Phys. Rev. **D 58**, 017301 (1998).
- [24] B. Kayser, F. Gibrat-Debu and F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [25] K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. **D 66**, 010001 (2002), in [PDG Collaboration] Review of Particle Physics in *Neutrino Physics as Explored by Flavor Change* by B. Kayser.
- [26] B. Kayser, Phys. Rev. **D 24**, 110 (1981).
- [27] C. Giunti, C.W. Kim and U.W. Lee, Phys. Rev. **D 44**, 3635 (1991).
- [28] J. Rich, Phys. Rev. **D 48**, 4318 (1993).
- [29] C. Giunti, C.W. Kim, J.W. Lee and U.W., Phys. Rev. **D 48**, 4310 (1993).
- [30] S. De Leo, C.C. Nishi and P. Rotelli, Int. J. Mod. Phys. **A 19**, 677 (2004).
- [31] Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Tsai and T. Yamazaki, Prog. Theor. Phys. **105**, 471 (2001).
- [32] C. Giunti, JHEP **0211**, 017 (2002).
- [33] C.W. Kim and A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics* (Harwood Academic Publishers, Chur, 1993).

- [34] K. Zuber, Phys. Rep. **305**, 295 (1998).
- [35] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics* (John Wiley & Sons, Paris, 1977), v. I.
- [36] C. Giunti, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2363 (2001).