

# Generalização para o desvio angular em um prisma de base triangular em meios externos distintos

Generalization for the angular deviation of a prism with a triangular base in different external media

L. Motta<sup>1</sup>, V.H.G.S. Ferreira<sup>1</sup>, B.K. Mikami<sup>1</sup>, A.C.F. Santos<sup>\*2</sup>

<sup>1</sup>Colégio Brigadeiro Newton Braga, Diretoria de Ensino da Aeronáutica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>2</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 28 de março de 2023. Aceito em 29 de maio de 2023.

Neste artigo, nos propomos a estabelecer uma função generalizada para o desvio angular em um prisma de base triangular imerso em meios externos distintos. Após a obtenção de tal função, faremos a demonstração das condições de desvio mínimo. Além disso, faremos uma análise detalhada da função, inclusive das condições necessárias para que não haja reflexão total nas interfaces; condições essas que se relacionam ao domínio de tal função. Destaquemos que certos aspectos de simetria existentes no caso particular de meios externos idênticos não são verdadeiros para o caso geral; aspectos estes que, combinando o princípio físico da reversibilidade e princípio matemático de não-contradição, permitem a obtenção dos ângulos relacionados ao desvio mínimo sem o uso de cálculo diferencial.

**Palavras-chave:** Desvio angular, prisma, base.

In this paper, we propose to establish a generalized function for the angular deviation in a prism with a triangular base immersed in different external media. After obtaining such a function, we demonstrate the minimum deviation conditions. In addition, we make a detailed analysis of the function, including the necessary conditions so that there is no total reflection in the interfaces, these conditions that relate to the domain of such a function. In addition, we point out that certain aspects of symmetry existing in the particular case of identical external means are not true for the general case; aspects that, combining the physical principle of reversibility and the mathematical principle of non-contradiction, allow obtaining the angles related to the minimum deviation without the use of differential calculus.

**Keywords:** Angular deviation, prism, base.

## 1. Introdução

No artigo intitulado “*Demonstração algébrica das condições de ocorrência do desvio mínimo em um prisma de base triangular*” [1] é relatada uma lacuna de tal demonstração, tanto em livros-textos de física voltados ao ensino médio quanto aos destinados à graduação. No que tange à parte experimental, de modo geral temos um único meio externo circundante-menos refringente que o prisma, corriqueiramente, o ar atmosférico [2–4]; e é sob tal condição especial que é desenvolvida a teoria e são propostos os exercícios nos livros-textos, sendo também, nesta particularidade, que foi feita a demonstração no artigo [1] anteriormente citado.

Do ponto de vista experimental e teórico (principalmente), o prisma estar envolvido em um meio material único é um caso especial. Podemos considerar que o caso mais geral – os meios de incidência na primeira interface, o meio de emergência na segunda interface e o material do prisma possuem índices de refração diferentes entre

si-foi abordado na questão a seguir, proposta no vestibular do renomado Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) [5] (Fig. 1):

“*Um prisma de vidro, de índice de refração  $n = \sqrt{2}$ , tem por seção normal um triângulo retângulo isósceles  $ABC$  no plano vertical. O volume de seção transversal  $ABD$  é mantido cheio de um líquido de índice de refração  $n' = \sqrt{3}$ . Um raio incide normalmente à face transparente da parede vertical  $BD$  e atravessa o líquido.*”

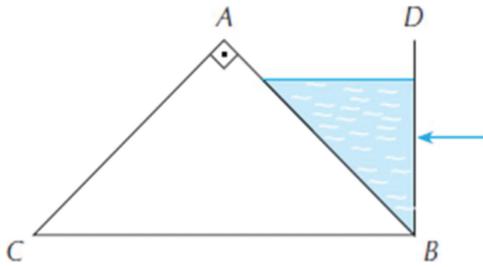
Considere as seguintes afirmações:

- I. O raio luminoso não penetrará no prisma.*
- II. O ângulo de refração na face  $AB$  é de  $45^\circ$ .*
- III. O raio emerge do prisma pela face  $AC$  com ângulo de refração de  $45^\circ$ .*
- IV. O raio emergente definitivo é paralelo ao raio incidente em  $BD$ .*

Das afirmativas mencionadas, é (são) correta(s):

- a) apenas I.*
- b) apenas I e IV.*
- c) apenas II e III.*
- d) apenas III e IV.*
- e) II, III e IV.*

\*Endereço de correspondência: [toni@if.ufrj.br](mailto:toni@if.ufrj.br)



**Figura 1:** Raio de luz incidindo sobre um volume contendo um líquido em contato com um prisma. Fonte: Vestibular do Instituto Tecnológica de Aeronáutica, Concurso de Admissão de 1996.

Neste artigo, nos propomos a estabelecer uma função generalizada para o desvio angular em um prisma de base triangular. No contexto da óptica citamos, a título de exemplo, o caso das lentes esféricas como “equações” generalizadas semelhantes a esta que propomos no presente artigo.

Após a obtenção de tal função, faremos a demonstração das condições de desvio mínimo utilizando cálculo diferencial, acessível aos alunos de graduação. Além disso, faremos uma análise detalhada da função, inclusive das condições necessárias para que não haja reflexão total nas interfaces; condições essas que se relacionam ao domínio de tal função.

Destaquemos que certos aspectos de simetria existentes no caso particular de meios externos idênticos não são verdadeiros para o caso geral; aspectos estes que, combinando o princípio físico da reversibilidade e princípio matemático de não-contradição (demonstração por absurdo), permitem a obtenção dos ângulos relacionados ao desvio mínimo (em módulo) sem o uso de cálculo diferencial.

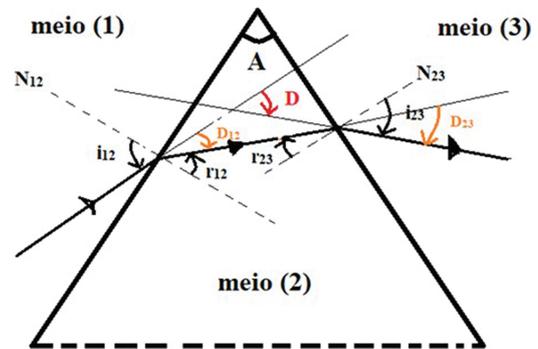
Uma vez que a análise da situação geral, conforme propomos neste artigo, não se dá de forma imediata a partir do caso particular – demandando certo trabalho no uso de cálculo diferencial, álgebra e trigonometria –, cremos que o presente artigo pode ser de grande valia a professores e estudantes que, porventura, necessitem realizar tal investigação. Com o intuito de simplificar a consulta, estabeleceremos no corpo do artigo as principais equações e resultados, deixando as demonstrações detalhadas das relações que julgamos mais importantes para o apêndice.

## 2. Argumentação Teórica

### 2.1. Principais relações (equações/funções) geométricas e físicas

Consideremos o prisma de base triangular e ângulo de abertura  $A$ , conforme a Fig. 2.

Considere  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), os índices de refração dos meios 1, 2 e 3, respectivamente, conforme ilustrado na Fig. 2. Na condição particular citada anteriormente



**Figura 2:** Esquema dos desvios nas faces adjacentes de um prisma de base triangular. Vide texto para detalhes. Na figura,  $N_{12}$  representa a normal entre os meios 1 e 2,  $N_{23}$  representa a normal entre os meios 2 e 3,  $i_{12}$  o ângulo de incidência no meio 1,  $r_{12}$  o ângulo de refração no meio 2,  $r_{23}$  o ângulo de incidência no meio 2 e  $i_{23}$ , o ângulo de refração no meio 3,  $D_{12}$  o desvio na interface dos meios 1 e 2,  $D_{23}$  o desvio na interface dos meios 2 e 3 e  $D$  o desvio total.

( $n_1 = n_3 < n_2$ ). de acordo com a Fig. 2 é possível verificarmos que temos sempre um desvio angular no sentido horário, sendo então, nos livros textos, analisado o valor desse ângulo. Porém, no caso geral, o desvio angular em cada interface e o desvio total podem se dar tanto no sentido horário quanto no anti-horário. sendo assim, buscaremos as expressões algébricas dos desvios, para que a interpretação dos valores obtidos se dê de acordo com a convenção estabelecida.

Geometricamente é possível verificar que o desvio total sofrido pela luz ao atravessar o prisma é igual à soma algébrica (levando-se em conta tanto os valores dos ângulos quanto o sentido horário ou anti-horário, aos quais convencionamos sinais positivos ou negativos) dos desvios parciais sofridos em cada interface. Assim sendo, analisamos o desvio parcial em cada interface, para então obtermos a expressão do desvio total. Tomando o sentido anti-horário como positivo, vem:

#### • GEOMÉTRICAS

$$\text{Desvio na interface 1 - 2: } D_{12} = r_{12} - i_{12} \quad (1)$$

$$\text{Desvio na interface 2 - 3: } D_{23} = r_{23} - i_{23} \quad (2)$$

$$A = r_{12} + r_{23} \quad (3)$$

$$\text{Desvio Total: } D = A - (i_{12} + i_{23}) \quad (4)$$

#### • FÍSICAS

Lei de Snell aplicada à refração na interface

$$1 - 2: n_1 \sin i_{12} = n_2 \sin r_{12} \quad (5)$$

Lei de Snell aplicada à refração na interface

$$2 - 3: n_2 \sin r_{23} = n_3 \sin i_{23} \quad (6)$$

A título de exemplificação, utilizaremos os dados numéricos da questão do ITA, anteriormente citada:  $n_1 = \sqrt{3}$ ,  $n_2 = \sqrt{2}$ ,  $n_3 = 1$  (aproximadamente);  $A = 90^\circ$ ,  $i_{12} = 45^\circ$ .

**INTERFACE 1-2**

Da lei de Snell aplicada à refração 1-2:  $\sqrt{3} \cdot \text{sen } 45^\circ = \sqrt{2} \text{sen } r_{12} \Rightarrow r_{12} = 60^\circ$ .

O desvio na interface 1-2 vale  $D_{12} = r_{12} - i_{12} = 60^\circ - 45^\circ \Rightarrow D_{12} = +15^\circ$ . (ou seja, de 15 graus no sentido anti-horário.).

**INTERFACE 2-3**

Para o cálculo do ângulo de incidência  $r_{23}$ , utilizaremos a relação  $A = r_{12} + r_{23}$ . No caso,  $90^\circ = 60^\circ + r_{23} \Rightarrow r_{23} = 30^\circ$ .

Da lei de Snell aplicada à refração 2-3:  $\sqrt{2} \cdot \text{sen } 30^\circ = 1 \cdot \text{sen } i_{23} \Rightarrow i_{23} = 45^\circ$

O desvio na interface 2-3 vale  $D_{23} = r_{23} - i_{23} = 30^\circ - 45^\circ \Rightarrow D_{23} = -15^\circ$  (ou seja, de 15 graus no sentido horário.).

**DESVIO TOTAL**

$$D = D_{12} + D_{23} = (+15^\circ) + (-15^\circ) \Rightarrow d = 0^\circ$$

**2.2. Funções do desvio angular**

**2.2.1. Estudo analítico do desvio total (d) em função do ângulo de incidência ( $i_{12}$ )**

Essa função é a mais “natural”, uma vez que experimentalmente o que se controla é o “ângulo de entrada”  $i_{12}$ .

$$D = A - i_{12} - \text{arc sen}\{n_{23}\text{sen}[A - \text{arc sen}(n_{12}\text{sen } i_{12})]\} \tag{7}$$

Notemos que a função é algebricamente bastante complicada, envolvendo funções compostas/trigonômicas inversas.

Se tivermos interessados somente no **módulo do desvio** angular, toma-se então o módulo da função descrita pela equação (7).

**3. Análise do Domínio da Função**

Para que não ocorra reflexão total numa dada interface, devem ser obedecidas as seguintes condições:

$$\text{Interface 1 - 2: } i_{12} < \text{arc sen}(n_{21}) \text{ (caso } n_1 > n_2) \tag{8}$$

$$\text{Interface 2 - 3: } i_{12} > \text{arc sen}\{n_{21}[\text{sen}[A - \text{arc sen}(n_{32})]]\} \text{ (caso } n_2 > n_3) \tag{9}$$

Exemplificação, com a questão do ITA anteriormente citada:

Da equação VIII:  $i_{12} < 55^\circ$  (aprox.).

Da equação IX:  $i_{12} > 35^\circ$  (aprox.).

O domínio então é:  $35^\circ < i_{12} < 55^\circ$  ou  $0,61 \text{ rad} < i_{12} < 0,96 \text{ rad}$ .

**3.1. Estudo analítico do desvio total (d) em função do ângulo de emergência ( $r_{12}$ )**

$$D = A - \text{arc sen}(n_{21}\text{sen } r_{12}) - \text{arc sen}[n_{23}\text{sen}(A - r_{21})] \tag{10}$$

Notemos que a função do desvio angular em termos de  $r_{12}$  é algebricamente mais simples que em termos de  $i_{12}$ !

Derivando tal expressão e igualando a zero para a pesquisa de minimantes ou maximantes,  $r_{12}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dr_{12}} = 0 - \frac{n_{21}\cos r_{12}}{\sqrt{1 - n_{21}^2\text{sen}^2 r_{12}}} + \frac{n_{23}\cos(A - r_{12})}{\sqrt{1 - n_{23}^2\text{sen}^2(A - r_{12})}} = 0 \\ \frac{n_{21}\cos r_{12}}{\sqrt{1 - n_{21}^2\text{sen}^2 r_{12}}} = \frac{n_{23}\cos(A - r_{12})}{\sqrt{1 - n_{23}^2\text{sen}^2(A - r_{12})}} \tag{11} \end{aligned}$$

Resolvendo a equação trigonométrica:

$$r_{12} = \text{arctg}\left(\frac{1 - \alpha \cos A}{\alpha \text{sen } A}\right) \tag{12}$$

$$\text{onde } \alpha = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2}} \tag{13}$$

Caso  $n_1 = n_3 = n_{\text{externo}}$  (meios externos idênticos),  $\alpha = 1$  e  $\text{tg } r_{12} = \frac{1 - \cos A}{\text{sen } A}$ .

Da trigonometria sabemos que  $\text{tg}(A/2) = \frac{1 - \cos A}{\text{sen } A}$ . logo,  $r_{12} = A/2$ . O que nos leva (Eq. 3) a  $r_{23} = A/2$  e  $i_{12} = i_{23} = \text{arc sen}[n_{\text{prisma}}/n_{\text{externo}}\text{sen}(A/2)]$ . Fica assim demonstrado, então, o caso particular!

O valor (real) de  $\alpha$ , e conseqüentemente um valor de mínimo ou máximo local só existem se os meios externos forem simultaneamente mais refringentes ou menos refringentes que o prisma. Há três situações possíveis: i) meios externos mais refringentes que o prisma. ii) meios externos menos refringentes que o prisma. iii) o índice de refração do prisma tem valor intermediário em relação aos índices dos meios externos.

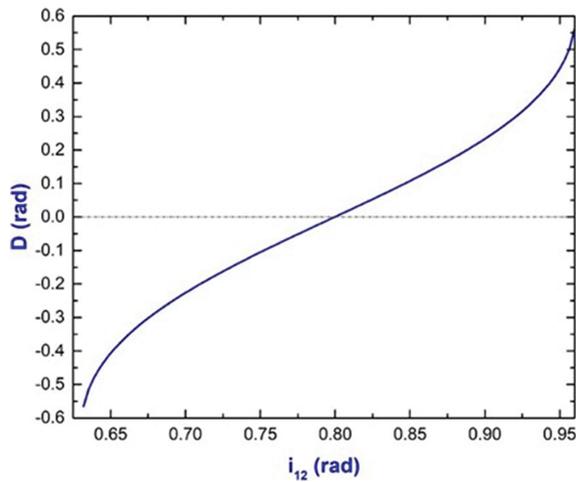
Uma vez que o índice de refração  $n_1$  aparece no numerador da fração e o do meio 3 no denominador na expressão de  $\alpha$ , os valores dos ângulos de incidência ( $i_{12}$ ) e emergência ( $r_{12}$ ) que tornam o desvio mínimo dependem da interface do prisma que o raio incidiu; o que não ocorre no caso particular de meios externos idênticos ( $n_1 = n_3$ ;  $\alpha = 1$ ).

**3.2. Análise gráfica do desvio total (d) em função do ângulo de incidência ( $i_{12}$ )**

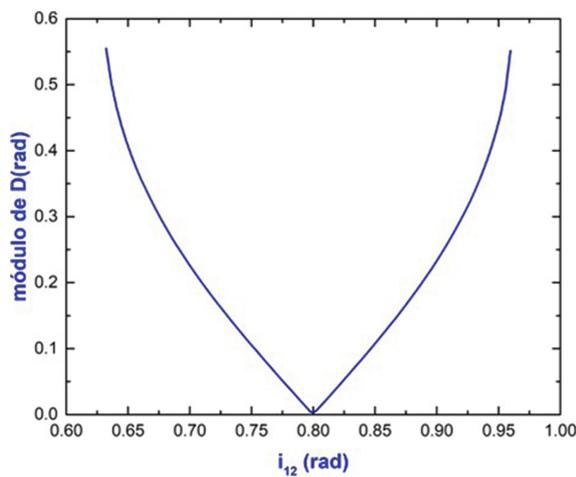
Analisaremos duas situações citadas anteriormente:

**3.2.1. O índice de refração do prisma tem valor intermediário em relação aos índices dos meios externos**

Exemplificando novamente com a questão do ITA:  $n_1 = \sqrt{3}$ ,  $n_2 = \sqrt{2}$ ,  $n_3 = 1$ ,  $A = 90^\circ$ . O gráfico do desvio D (Eq. 10) em função do ângulo de incidência  $i_{12}$  é mostrado na Fig. 3 e o módulo de D na Fig. 4. O foco da análise gráfica é qualitativo. Uma vez que  $\alpha < 0$ , analiticamente a função  $D(i_{12})$  não possui um ponto de mínimo (a 1ª. derivada não se anula). Pela Fig. 3, entre



**Figura 3:** Desvio  $D$  em função do ângulo de incidência entre as interfaces 1 e 2 ( $i_{12}$ ). Veja texto para detalhes.

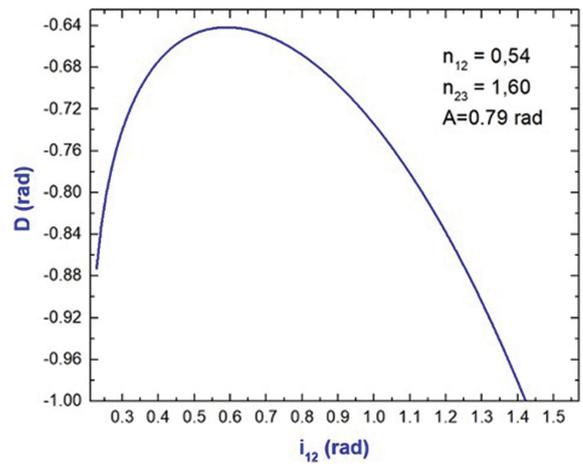


**Figura 4:** Módulo do desvio  $D$  em (vide Fig. 3) função do ângulo de incidência entre as interfaces 1 e 2 ( $i_{12}$ ).

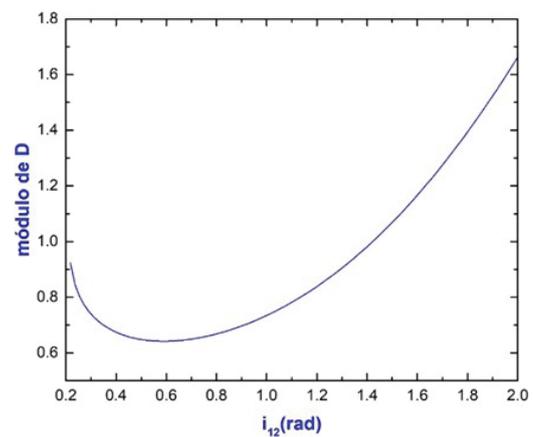
$i_{12} = 0,61$  rad ( $35^\circ$ ) a  $i_{12} = 0,79$  rad ( $45^\circ$ ) a função possui valor negativo, o que indica um desvio no sentido horário. De  $i_{12} = 0,79$  rad ( $45^\circ$ ) a  $i_{12} = 0,96$  rad ( $55^\circ$ ) a função assume um valor positivo, indicando um desvio anti-horário. Os maiores valores dos módulos dos desvios (Fig. 4) se dão nos extremos do domínio, sendo o módulo reduzido a zero em  $i_{12} = 0,79$  rad ( $45^\circ$ ).

### 3.2.2. Meios externos menos refringentes que o prisma

Consideremos, a título de exemplo, um prisma feito de diamante  $n_2 = 2,4$ , imerso na água  $n_1 = 1,3$  ( $n_{12} = n_1/n_2 = 0,54$ ) e na glicerina  $n_3 = 1,5$  ( $n_{23} = n_2/n_3 = 1,60$ ) – valores aproximados. Com ângulo de abertura  $A = 45^\circ = \pi/4 = 0,79$  rad. Seguindo raciocínio idêntico ao aplicado ao caso anterior: O domínio então é:  $12^\circ < i_{12} < 90^\circ$  ou  $0,21$  rad  $< i_{12} < 1,57$  rad.,  $\alpha = 1,08$ ,  $r_{12,maximante} = 17,2^\circ = 0,30$  rad. As Figs. 5 e 6



**Figura 5:** Desvio  $D$  em função do ângulo de incidência entre as interfaces 1 e 2 ( $i_{12}$ ), para  $n_{12} = 0,54$ ;  $n_{23} = 1,60$  e  $A = 0,79$  rad.



**Figura 6:** Módulo do desvio  $D$  em (vide Fig. 5) função do ângulo de incidência entre as interfaces 1 e 2 ( $i_{12}$ ).

mostram o desvio  $D$  e o módulo de  $D$ , respectivamente, em função do ângulo de incidência. Note que, como os índices de refração dos meios externos possuem valores relativamente próximos – que implica em  $\alpha$  próximo de 1 – o valor de  $r_{12,minimante} = 17,2^\circ$  está próximo da metade do ângulo de abertura do prisma ( $A/2 = 22,5^\circ$ ), conforme seria de se esperar. O valor  $r_{12,minimante} = 17,2^\circ = 0,30$  rad nos leva a:  $i_{12,maximante} = 33,1^\circ = 0,58$  rad;  $D_{máximo} = -36,4^\circ = -0,63$  rad. Tomando o limite de  $D$  quando  $i_{12}$  tende a  $12^\circ$ :  $D = -51,5^\circ = -0,90$  rad. Tomando o limite de  $D$  quando  $i_{12}$  tende a  $90^\circ$ :  $D = -64,8^\circ = -1,13$  rad.

## 4. Conclusão

Notemos que o gráfico  $D \times i_{12}$  do desvio em função do ângulo de incidência pode ser obtido teoricamente e não somente experimentalmente; embora a elaboração do gráfico sem o uso de programas computacionais seja

uma tarefa uma tanto árdua, devido à complexidade analítica de tal função. Nesse sentido, é mais simples a pesquisa do valor do valor de  $r_{12}$  que torna o desvio máximo ou mínimo (algebricamente), recaindo em uma equação trigonométrica que, diferente do caso particular de meios externos idênticos, não é possível sua resolução por simples inspeção.

Reforçando alguns aspectos já ditos ao longo do texto, mas que merece ser chamada atenção é que, diferentemente do caso particular: a) o desvio pode se dar tanto no sentido horário quanto no anti-horário (Fig. 6); b) certos aspectos de simetria existentes no caso particular de meios externos idênticos não são verdadeiros para o caso geral; aspectos estes que, combinando o princípio físico da reversibilidade e princípio matemático de não-contradição (demonstração por absurdo), permitem a obtenção dos ângulos relacionados ao desvio mínimo (em módulo) sem o uso de cálculo diferencial.

## Referências

- [1] J.L.P. Ribeiro, Rev. Bras. Ensino Fís. **35**, 4309 (2013).
- [2] N. Farkas, P.N. Henriksen and R.D. Ramsier, Phys. Educ. **41**, 69 (2006).
- [3] F. El-Ghoussein, J.M. Wrobel and M.B. Kruger, Am. J. of Phys. **74**, 888 (2006).
- [4] B.P. Chandra and S.C. Bhaiya, Am. J. of Phys. **51**, 160 (1983).
- [5] <https://www.vestibular.ita.br/>, acessado em 31/05/2023.