

Estimación del tiempo de iluminación solar sobre la tierra mediante un modelo analítico: un escenario fértil para enseñar física

(*Estimation of solar illumination time on the earth by an analytical model: A fertile scenery for to teach physics*)

Paco Talero^{1,3}, Fernanda Santana², César Mora³

¹Grupo Física y Matemática, Departamento de Ciencias Naturales, Universidad Central, Bogotá D.C., Colombia

²Observatorio Astronómico Nacional de Colombia, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia

³Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Recibido em 24/7/2012; Aceito em 21/2/2013; Publicado em 28/5/2013

Se formuló un modelo analítico que permitió estimar el tiempo de iluminación solar sobre la Tierra para cualquier fecha del año y cualquier latitud, el modelo tomó la oblicuidad de la eclíptica constante, los rayos de luz paralelos, la Tierra esférica y el movimiento de la Tierra circular uniforme, también mostró un contexto de la astronomía para enseñar física básica. Se relacionó el movimiento de la Tierra alrededor del Sol con el movimiento del plano de luz proyectado sobre la Tierra, luego se dedujo la zona iluminada para una latitud dada y se calculó el tiempo de iluminación mediante el movimiento circular uniforme de rotación terrestre. El modelo se confrontó con resultados numéricos de la Geoscience Australia Agency hallando como error porcentual máximo 1,6%, el cual se atribuyó principalmente a la discrepancia entre la trayectoria real elíptica y la trayectoria circular tomada en este modelo. Así, sin hacer uso de la trigonometría esférica se obtuvo un modelo analítico que explica de manera muy aproximada el tiempo de iluminación solar en cualquier época del año y para cualquier latitud, el modelo brinda un contexto auténtico para estudiar algunos aspectos de la física básica. **Palabras-clave:** modelo, astronomía, enseñanza de la física, métodos de enseñanza.

We proposed an analytical model for the calculus of illumination time of the Earth for any time of year and any latitude. This model assumes the obliquity of the ecliptic as constant, the light beams as parallels, the Earth as spherical, the movement of translation of Earth as uniform circular. Also, this model showed a context of the astronomy whereby the teachers can teach the basic physics. It was built through a relationship between the movement of translation and of rotation of the wave front light, then we found the illumination zone on the Earth, and the illumination time is estimated in a particular latitude with the uniform circular movement of Earth. The present model was confronted with the numerical results of the Geoscience Australia Agency and it is found a maximum percent error of 1,6%, which was due primarily to the difference between the circular trajectory, in this model, and the real elliptical trajectory. Without the use of spherical trigonometry, it was obtained an analytical model that estimates very close the solar illumination time at any time of the year and at any latitude on Earth. This model provides an authentic context for studying basic aspects of physics.

Keywords: model, astronomy, physics education, teaching methods.

1. Introducción

Recientes investigaciones en enseñanza de la física han venido mostrando que la astronomía trae consigo contextos auténticos de alta motivación en los estudiantes que han permitido desarrollar diversos contenidos físicos a diferentes niveles de formación, tales contextos abarcan tópicos como la Tierra, la escala del sistema solar, la determinación de distancias a los planetas y a las estrellas, la ley de Hubble, la ley de Wien y las curvas de rotación en galaxias espirales, entre otros [1–11]. Así mismo, estos contextos han permitido introducir conte-

nidos físicos tales como dinámica, cinemática y óptica. En Ref. [2] se muestra la experiencia de buscar planetas extrasolares a través de la adquisición de datos propios mediante el control remoto de un telescopio diseñado para tal fin; en Ref. [3] se expone un estudio que revela algunas ideas erróneas sobre la trayectoria de los planetas alrededor del sol; en Refs. [4, 5] se estudia el movimiento planetario a través de experimentos virtuales con base en argumentos físicos elementales e intuitivos que permiten desarrollar discusión sobre la ley de gravitación, la tercera ley de Kepler y métodos numéricos de implementación simple; en Ref. [7] se estudian curvas

¹E-mail: ptalero1@ucentral.edu.co.

de rotación en galaxias espirales; en Ref. [8] se muestra como obtener la excentricidad de la órbita terrestre usando, principalmente, las leyes de Kepler y un instrumento de observación sencillo; en Ref. [9] se repasan algunos métodos geométricos mediante los cuales se estima las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol, así como los diámetros del Sol y la Luna en relación al radio de la Tierra; en Ref. [10] se aprovecha el contexto de la ley de Hubble para promover la habilidad de la interpretación conceptual en gráficas de velocidad contra distancia y en Ref. [11] se muestra como una presentación desde la estadística de fotones de la ley de radiación de cuerpo negro es más eficaz, desde el punto de vista pedagógico, que el tratamiento tradicional que se hace generalmente en los libros de texto.

Dentro del contexto anterior, este trabajo muestra como el fenómeno cotidiano del día y la noche puede usarse para estudiar aspectos básicos de física como factores de conversión, movimiento circular uniforme (MCU) y óptica de rayos. El problema concreto de estudio consiste en responder la pregunta: ¿es posible estimar mediante un modelo analítico basado en conceptos físicos elementales el tiempo de iluminación solar sobre la Tierra para cualquier fecha del año y en cualquier latitud? Para responder esta pregunta se desarrolla un modelo analítico que deja de lado algunos hechos astrofísicos que no son relevantes durante el transcurso de pocos años, así las características del modelo son las siguientes: toma en cuenta la corrección estándar de la refracción de la luz por la atmósfera y el tiempo diario de iluminación debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol; desprecia los efectos tanto de precesión como de nutación; considera la Tierra completamente esférica; asume el movimiento de traslación como un MCU y toma los rayos de luz solar paralelos.

Para la formulación del modelo se establece el sistema de referencia inercial con uno de sus ejes paralelo al eje de rotación de la Tierra (considerado estático respecto a las estrellas fijas) y los demás ejes también anclados a estrellas fijas. Ahora, se establece un vínculo entre el MCU de la Tierra alrededor del Sol y el movimiento del frente de onda plano de luz solar el cual gira sobre la esfera terrestre, luego se delimita la zona de la Tierra iluminada en cualquier fecha del año a una latitud arbitraria y se aplican conceptos de cinemática del MCU de rotación de la Tierra para calcular el tiempo que un punto terrestre estaría iluminado. Mediante las ecuaciones obtenidas es posible conocer de manera muy aproximada el tiempo de iluminación para una fecha particular del año en todo el mundo, conocer la fecha de ocurrencia del Sol de media noche para cualquier latitud y mostrar diagramas de simetría útiles a la hora de interpretar hechos físicos mediante la lectura de gráficos.

El modelo permite realizar análisis gráfico del tiempo de iluminación durante un año para una latitud determinada, estas gráficas permiten realizar una con-

frontación sencilla del modelo con resultados numéricos obtenidos de simulaciones que toman en cuenta los efectos de otros fenómenos astrofísicos en particular de la trayectoria elíptica de la Tierra, al confrontar el modelo con los resultados arrojados en el simulador de la Geoscience Australia Agency se halla un error porcentual máximo en la gráfica mencionada muy cercano a 1,6% error que se atribuye fundamentalmente, y de acuerdo con la tercera ley de Kepler, a la diferencia entre las trayectorias elíptica y circular.

Este trabajo muestra, sin hacer uso de la trigonometría esférica, una manera de pensar físicamente sobre el hecho cotidiano de la noche y el día, a través de un modelo analítico basado fundamentalmente en MCU que a través de sus resultados permite explicar de manera muy aproximada el tiempo de iluminación solar en cualquier época del año y para cualquier latitud, el modelo deja un escenario cautivante dentro de la astronomía para estudiar algunos aspectos básicos de la física como el MCU y la óptica de rayos paralelos.

Este artículo está organizado de manera siguiente: en la sección (2) se deduce el tiempo de iluminación terrestre de acuerdo con lo planteado anteriormente, en la sección (3) se hacen correcciones por traslación y refracción, en la sección (4) se comparan los resultados del modelo con resultados numéricos, en la sección (5) se proponen algunas estrategias didácticas para poner en práctica los resultados de este modelo y en la sección (6) se muestran las conclusiones.

2. Tiempo de iluminación solar sobre la Tierra

Se sabe que debido a la rotación de la Tierra sobre su propio eje esta no posee una geometría que corresponda por completo a una esfera sino más bien a un elipsoide [12–14]. Debido a la geometría elipsoidal de la Tierra y a la interacción gravitacional con la Luna, el Sol y los demás cuerpo celestes que componen el sistema solar el movimiento de traslación y rotación terrestre varía respecto a lo que se espera del estudio de un sistema Sol- Tierra completamente aislado. Sin embargo, estos efectos no se toman en cuenta en este trabajo debido a que sus efectos son despreciables durante el transcurso de un año [13, 15].

A lo anterior se añade que la luz solar se toma con la aproximación de rayos paralelos, esto a causa de que observaciones bien establecidas muestran una desviación del paralelismo de aproximadamente $0,5^\circ$, que es producida por la refracción de la luz al atravesar la atmósfera [16].

En la Fig. 1 se muestra un corte meridional de la Tierra paralelo a los rayos de luz provenientes del Sol para el solsticio de invierno en el hemisferio norte, se observa que el ángulo ϵ formado entre el plano M del frente de onda de la luz solar y el eje de rotación de la Tierra L es la oblicuidad de la eclíptica (ángulo formado por el eje

de rotación de la Tierra y una perpendicular al plano orbital). Esto implica que un observador en la superficie de la Tierra a una latitud ϕ tendrá una trayectoria circular con radio $r = \overline{qs}$, una velocidad angular ω y un periodo de rotación $T = \frac{2\pi}{\omega}$ que corresponden a la velocidad angular y al periodo de rotación terrestre como muestra la Fig. 1. Así mismo, de la Fig. 1 se puede obtener las Ecs.

$$\tan \phi = \frac{h}{r}, \tag{1}$$

donde $r_o = \overline{pq}$ y

$$\tan \epsilon = \frac{r_o}{h}. \tag{2}$$

Al eliminar h de (1) y (2) se obtiene

$$\frac{r_o}{r} = \tan \phi \tan \epsilon. \tag{3}$$

En la Fig. 2 se observa la Tierra aún en solsticio de invierno vista desde el polo norte terrestre (PNT), se observa que la zona iluminada es el arco de circunferencia \widehat{AB} con ángulo θ y radio $r = \overline{Aq}$. Además, la geometría evidenciada que el ángulo θ se puede expresar como $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r_o}{r}$, lo cual permite expresar con ayuda de (3) el ángulo θ a través de la Ec.

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan \phi \tan \epsilon. \tag{4}$$

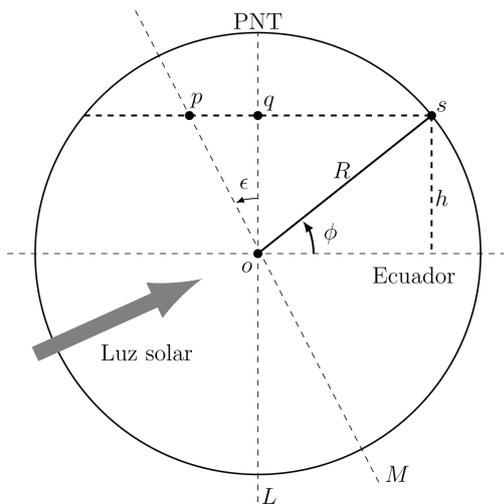


Figura 1 - Corte meridional de la Tierra paralelo a los rayos de luz provenientes del Sol para el solsticio de invierno en el hemisferio norte.

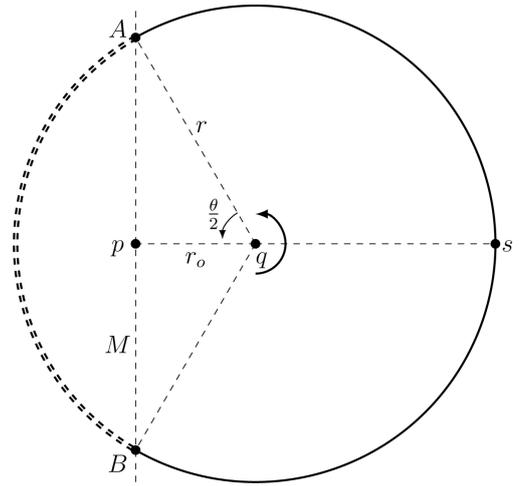


Figura 2 - Corte de la Tierra a latitud ϕ vista desde PNT.

Ahora, si se supone que el plano M no rota significativamente al rededor del punto p durante una revolución terrestre el tiempo de iluminación t_D en el solsticio se puede obtener al calcular el tiempo que un observador sobre la superficie terrestre tarda en barrer el ángulo θ con velocidad angular ω , siendo $\omega = \frac{\theta}{t_D}$. Así se obtiene

$$t_D = \frac{T}{\pi} \cos^{-1}(\tan \phi \tan \epsilon). \tag{5}$$

El tiempo t_N que el observador permanece en la zona no iluminada se puede calcular a partir de (5) y es simplemente $t_N = T - t_D$.

Al tomar como origen de tiempo el solsticio de invierno en el hemisferio norte la traslación de la Tierra alrededor del Sol se ve reflejada en la rotación del plano M alrededor del punto p , ver Fig. 3. Si se considera el movimiento de traslación como un MCU con velocidad angular Ω entonces el plano M girará sobre p barriendo un ángulo Ωt a partir de la posición inicial, como muestra la Fig. 3.

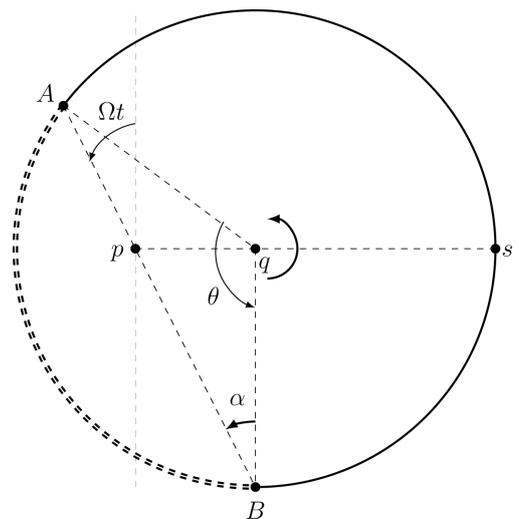


Figura 3 - Posición angular del plano M en tiempo t .

Nótese en la Fig. 3 que el triángulo \widehat{qAB} es isósceles y por lo tanto al usar la suma de ángulos internos se tiene $\theta = \pi - 2\alpha$, al aplicar el teorema del seno al triángulo \widehat{qpB} se encuentra $r \sin \alpha = r_o \cos(\Omega t)$ y usar la Ec. (3) se encuentra

$$t_D = \frac{T}{\pi} \cos^{-1}(\tan \phi \tan \epsilon \cos(\Omega t)). \quad (6)$$

Si se considera la traslación de la Tierra alrededor del Sol como un MCU con $\Omega \ll \omega$, se desprecia la rotación del plano M del frente de onda de la luz solar y también se desprecia la refracción de la luz por la atmósfera la Ec. (6) permite estimar el tiempo de luz solar durante una revolución de la Tierra para cualquier fecha del año y cualquier latitud. Además, aunque (6) está dada en radianes se puede expresar también en grados como

$$t_D = \frac{24h}{180^\circ} \cos^{-1}(u), \quad (7)$$

con

$$u = \tan \phi \tan(27^\circ 27') \cos\left(\frac{360^\circ}{365.25d} t\right), \quad (8)$$

donde t se mide en días (d).

Por otra parte, es de resaltar que la Ec. (6) tiene sentido sólo si se cumple la condición

$$|\tan \phi \tan \epsilon \cos(\Omega t)| \leq 1, \quad (9)$$

para que pueda evaluarse la función arcocoseno. Esta condición demarca la latitud máxima ϕ_{max} que puede ser evaluada en (6) de acuerdo con el tiempo t transcurrido. Así, de acuerdo con (9) se tiene para la máxima latitud la Ec.

$$\phi_{max} = \tan^{-1}\left(\frac{\pm 1}{\tan \epsilon \cos(\Omega t)}\right), \quad (10)$$

que demarca el comienzo de Sol de media noche y la noche polar, esto sin tomar en cuenta el Leve incremento en el tiempo de iluminación debido a refracción de la luz y traslación de la Tierra.

3. Corrección de t_D por traslación y refracción

Durante una revolución de la Tierra sobre su eje el plano M no permanece en reposo, como se supuso, sino que rota un poco alrededor del punto p . En la Fig. 4 se muestra el ángulo de la zona iluminada inicial θ_i , es decir justo cuando un observador sobre la superficie terrestre llega al punto A y se muestra también un ángulo θ_f de la zona iluminada cuando el mismo observador justo alcanza el plano M por su otro extremo en el punto D . De acuerdo con esto el observador barre un ángulo β adicional, que es preciso calcular para determinar el tiempo adicional de iluminación.

En la Fig. 4 se observa la relación entre los ángulos γ , α_i y $\Omega\tau$

$$\gamma + \alpha_i + \Omega\tau = \pi, \quad (11)$$

donde el tiempo τ se refiere al tiempo transcurrido desde que un observador ligado a la Tierra con latitud ϕ coincide con el plano de M en el punto A hasta que nuevamente coincide en el tiempo $t + \tau$, siendo t el tiempo transcurrido desde el solsticio de invierno en el hemisferio norte hasta que observador y plano coinciden en el punto D .

Igualmente en la Fig. 4 se puede observar también que el ángulo β adicional que barre el observador está relacionado con los ángulos γ y α_f mediante

$$\beta + \gamma + \alpha_f = \pi. \quad (12)$$

Además, de los triángulos \widehat{qAB} y \widehat{qCD} se encuentran las relaciones

$$2\alpha_i + \theta_i = \pi, \quad (13)$$

$$2\alpha_f + \theta_f = \pi. \quad (14)$$

Ahora, al combinar las Ecs. (11), (12), (13) y (14) se encuentra

$$\beta = \frac{\theta_f - \theta_i}{2} + \Omega\tau, \quad (15)$$

donde $\theta_i = \theta(t)$ y $\theta_f = \theta(t + \tau)$ con

$$\theta(t) = 2 \cos^{-1}(\tan \phi \tan \epsilon \cos(\Omega t)). \quad (16)$$

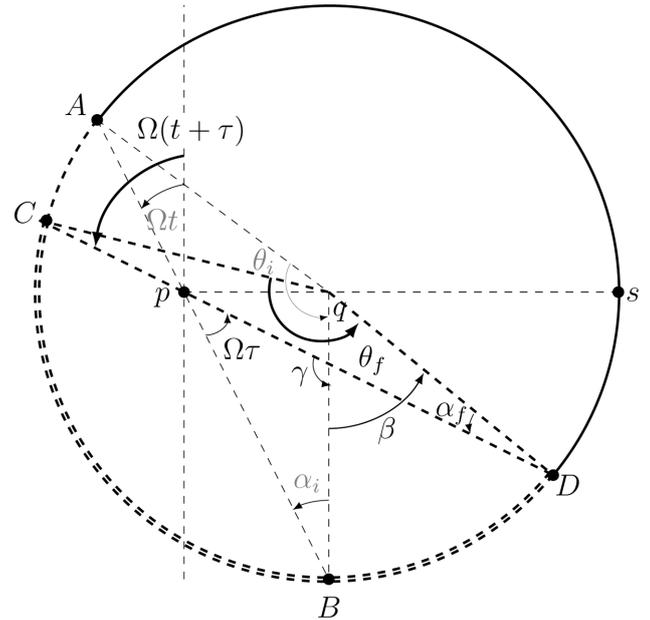


Figura 4 - Zonas iluminadas al principio y al final de una fracción de revolución terrestre.

Cuando la Tierra gira alrededor del Sol la zona iluminada cambia de θ_i a θ_f lo que implica que un observador que coincida con el plano de luz inicialmente en A barre un arco \widehat{AD} y emplea un tiempo τ que se concreta justo cuando el observador alcanza el plano de luz en D . De manera que

$$\theta_i + \beta = \omega\tau, \quad (17)$$

siendo τ el tiempo que el observador está iluminado. Ahora, como t_D el tiempo que el observador está iluminado cuando no se toma en cuenta la pequeña traslación que la Tierra sufre mientras hace una revolución sobre su eje $\Delta t = \tau - \tau_i$ es el tiempo adicional de iluminación que debe soportar el observador si se toma en cuenta esta pequeña traslación.

Para calcular τ se reemplaza la Ec. (15) en (17) y se encuentra

$$\tau = \frac{\theta_f + \theta_i}{2(\omega - \Omega)}. \quad (18)$$

En (18) se espera que $\theta_f \approx \theta_i$ dado que $\Omega \ll \omega$, lo que sugiere hacer una expansión en serie de Taylor de $\theta(\tau)$ alrededor de 0 y tomar la aproximación con los primeros dos términos de la serie, así se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + 2\eta\tau, \quad (19)$$

con

$$\eta = \frac{\Omega \tan \epsilon \tan \phi \sin(\Omega t)}{\sqrt{1 - \tan^2 \epsilon \tan^2 \phi \cos^2(\Omega t)}}, \quad (20)$$

que también cumple la condición (9) y los términos de coseno y seno junto con los ordenes de magnitud garantizan que (20) siempre permanece finito y menor que $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Para encontrar la corrección por traslación Δt se reemplaza la Ec. (19) en (18), obteniendo

$$\tau = \frac{\theta_i}{\omega - \Omega - \eta}, \quad (21)$$

lo que conduce a

$$\Delta t = \frac{(\Omega - \eta) \theta_i}{\omega (\omega - \Omega - \eta)}, \quad (22)$$

que es la corrección por traslación buscada y resulta ser de $\approx 2^m$.

De otro lado, se sabe que cuando los rayos de luz penetran en la atmósfera sufren refracción que aumenta el tiempo de iluminación, así en la Fig. 2 los rayos de luz paralelos a la semirecta \overline{ps} que llegan tanto al punto A como al B convergen un poco hacia el punto q . De esta manera un observador comienza a ser iluminado un poco antes de llegar al punto A y sigue un poco iluminado después de pasar por el punto B . En la literatura suele tomarse la porción de ángulo que barre un observador bajo los efectos de la luz refractada como $\theta_R \approx 9,95 \times 10^{-3}$ rad [14, 17]. De lo anterior se entiende que este fenómeno genera un tiempo adicional de iluminación dado por $\frac{2\theta_R}{\omega}$, que es aproximadamente $4^m 5^s$.

De acuerdo con las anteriores consideraciones la Ec. (6) toman la forma

$$t_D = \Delta t + \frac{T}{\pi} [2\theta_R + \cos^{-1}(\tan \phi \tan \epsilon \cos(\Omega t))]. \quad (23)$$

4. Modelo vs. resultados numéricos

De los datos numéricos ofrecidos por la simulación de la Geoscience Australia Agency puede obtenerse resultados que calculan el tiempo que un observador permanece iluminado durante una revolución de la Tierra. Los aspectos más relevantes para la confrontación del modelo analítico que toma en cuenta el modelo numérico de Geoscience Australia Agency son la trayectoria elíptica de la Tierra alrededor del Sol y la refracción estándar de la luz debida a la atmósfera [17].

El carácter periódico de la Ec. (23) permite establecer el origen de tiempos ya sea en solsticio o en equinoccio sin mayores inconvenientes. Así, en la Fig. (5) se muestra el tiempo de iluminación t_D en minutos como función del tiempo t transcurrido en días desde el comienzo del solsticio de verano de 2009 hasta justo el comienzo del solsticio de verano de 2010, se observa mayor diferencia entre los tiempos obtenidos con la simulación y el modelo analítico alrededor de los primeros días de enero época del año en la cual la Tierra está cerca al perihelio [18]. Por el contrario se observa un buen acuerdo a mediados de junio época del año en que la Tierra está cerca a su afelio [19].

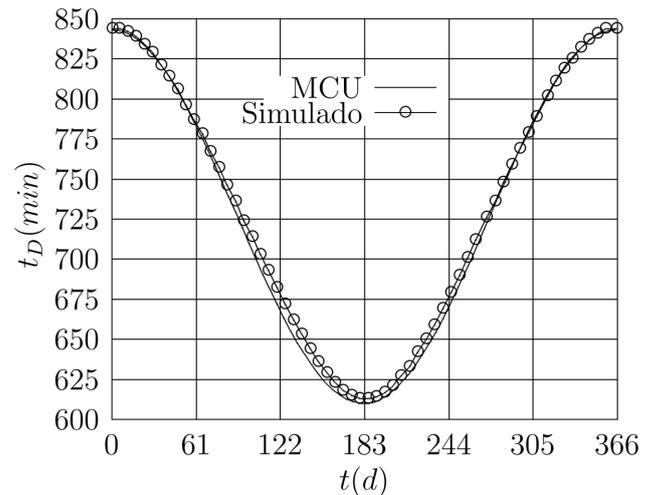


Figura 5 - Modelo analítico con MCU vs simulación para $\phi = 30^\circ$ y $\epsilon = 23.5^\circ$ entre el 21 de junio de 2009 y el 21 de junio de 2010.

La tercera ley de Kepler implica que cuando la Tierra se encuentra en el perihelio su rapidez es mayor que cuando se encuentra en el afelio lo que trae como consecuencia que el tiempo adicional de iluminación por incremento de traslación aumente ya que el plano M de la Fig. 1 se mueve más rápido sobre el punto q y por tanto un observador sobre la Tierra tarda más tiempo en alcanzar el plano de luz solar. Por el contrario cuando la Tierra se encuentra en el afelio el plano M se mueve más lento produciendo que el tiempo adicional de iluminación por traslación sea menor. Consecuentemente en cecanías del perihelio la simulación muestra resultados alejados del modelo analítico de trayectoria

circular que corresponde a unos $\approx 12.5^m$ que trae consigo un error relativo porcentual de $\approx 1.6\%$.

De otro lado la Fig. (6) muestra en el solsticio de invierno el tiempo de iluminación para diferentes latitudes, se observa un muy buen acuerdo entre el modelo simulado y el modelo analítico.

Diversas comparaciones entre el modelo analítico y la simulación arrojan resultados similares. Así, el modelo analítico da cuenta de manera cercana y con un mecanismo físico de explicación al tiempo de iluminación solar en cualquier tiempo del año y en cualquier lugar de la Tierra.

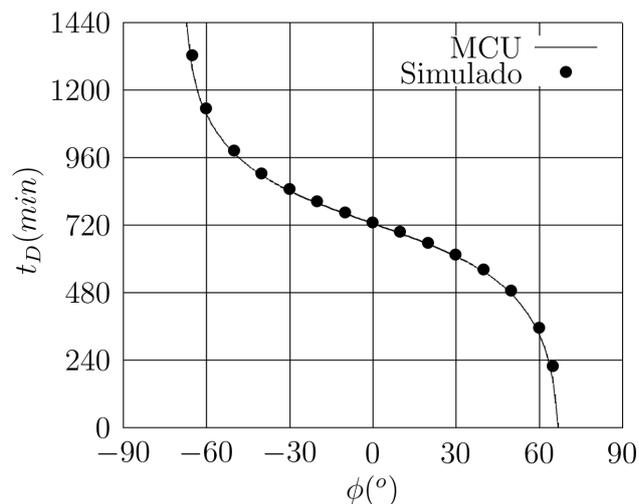


Figura 6 - Modelo analítico con MCU vs modelo numérico para el solsticio de invierno en el hemisferio norte.

5. Algunas sugerencias didácticas

De acuerdo con los resultados obtenidos la Ec. (23) permite estimar el tiempo de iluminación para una fecha particular del año y para un lugar particular en la Tierra caracterizado por su latitud, tomando correcciones por refracción y traslación. Con este resultado es posible atacar problemas de la vida cotidiana tales como la estimación del tiempo de iluminación solar en un país particular; apoyar una explicación física cuantitativa de las estaciones del año; ofrecer un espacio para conceptualizar el MCU ejemplificando a través de los movimientos de traslación y rotación de la Tierra; usar esquemas como el mostrado en la Fig. 3 para plantear una discusión sobre la refracción de la luz por la atmósfera; discutir los fenómenos del Sol de media noche y la noche polar, en tre otros. Así mismo, se pueden plantear situaciones en las cuales dada una fecha particular del año se pregunta por la duración de la iluminación en diferentes países y ofrecer explicación física de las diferencias presentadas.

Resulta particularmente interesante usar el modelo para estimar la fecha de inicio de los días y noches polares, para esto es necesario realizar análisis gráfico de la Ec. (10) que muestra la máxima latitud ϕ_{max} que es

posible evaluar en las Ecs. (5) y (23) como función del tiempo y que a su vez permite estudiar las zonas de la Tierra donde comienza el sol de media noche o la noche polar.

En la Fig. 7 se muestra la evolución de la latitud máxima con el transcurso del año para los hemisferios norte y sur, así por arriba de la línea de puntos oscuros habrá latitudes que están en noche polar para una fecha determinada del año y por debajo de la línea de puntos claros habrá latitudes en las cuales habrá día polar.

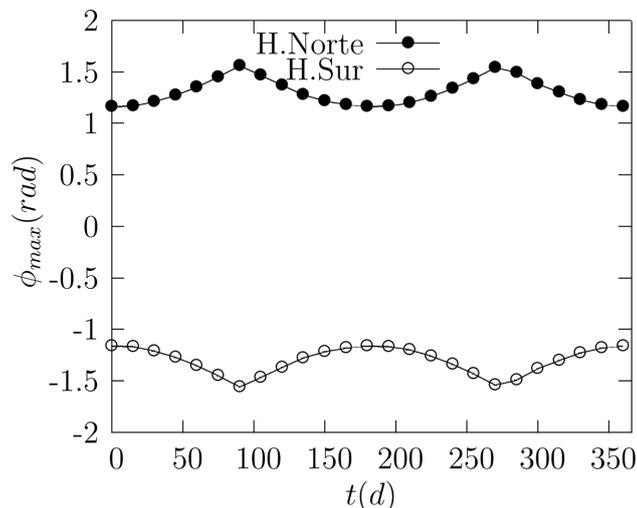


Figura 7 - Latitud para el Sol de media noche y la noche polar con el transcurso del año sin correcciones por refracción ni traslación.

6. Conclusiones

Se demostró que es posible formular un modelo analítico con base en la hipótesis de un MCU de la Tierra alrededor del Sol que permite estimar el tiempo de iluminación para un tiempo cualquiera después del solsticio de invierno en el hemisferio norte a cualquier latitud, que concuerda bien con el modelo numérico de la Geoscience Australia Agency y se realizaron correcciones por traslación y refracción siendo respectivamente de $\approx 2^m$ y de $\approx 4^m 5^s$, el modelo brinda un escenario rico en fenómenos terrestres relacionados con la astronomía que permiten estudiar algunos aspectos de la física básica.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los profesores Fabian Galindo, Giovanni Cardona y Guillermo Avendaño por la lectura y las sugerencias realizadas sobre el manuscrito; al Departamento de Ciencias Naturales de la Universidad Central por el apoyo y el tiempo asignado a la investigación, al observatorio astronómico Nacional de Colombia y al CICATA del IPN de México por su continua colaboración.

Referencias

- [1] C.H. Holbrow and P. Shaffer, Am. J. Phys. **80**, 362 (2012).
- [2] R. Goulda and S. Sunbury, Am. J. Phys. **80**, 445 (2012).
- [3] F. Santana y P. Talero, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 492 (2011).
- [4] F. Santana y P. Talero, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 508 (2011).
- [5] P. Talero *Experimentos Virtuales de Física: Mecánica* (Editorial Universidad Central, Bogotá, D.C., 2009).
- [6] F. Santana *Estudio de la Mecánica Celeste del Viaje a Mate con Experimentos Virtuales* (Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá, D.C., 2011).
- [7] O.D. Pavioni y F.M. Ortega, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 320 (2007).
- [8] O.D. Pavioni y F.M. Ortega, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 320 (2007).
- [9] P. Núñez, S.E. Calderón y S. Gil, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 329 (2009).
- [10] C.S. Wallacea and E. Pratherb, Am. J. Phys. **80**, 324 (2009).
- [11] J.M. Marra and F.P. Wilkinb, Am. J. Phys. **80**, 399 (2009).
- [12] H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen and K.J. Donner *Fundamental Astronomy* (Springer, New York, 2003).
- [13] R.M. Green *Spherical Astronomy* (Cambridge University Press, London, 1985).
- [14] J.G. Portilla *Elementos de Astronomía de Posición* (Editorial Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C., 2001).
- [15] M. Alonso y E.J. Finn *Física Volumen I: Mecánica* (Addison-Wesley Iberoamericana, U.S.A, 1976).
- [16] P.G. Hewitt *Física Conceptual* (Pearson Addison-Wesley, México, 2007).
- [17] <http://www.ga.gov.au/geodesy/astro/sunrise.jsp#intzone>, consultado el 4/18/2013.
- [18] http://ciencia.nasa.gov/science-at-nasa/2001/ast04jan_1/, consultado el 4/18/2013.
- [19] http://ciencia.nasa.gov/science-at-nasa/2002/02jul_aphelion/, consultado el 4/18/2013.