

Moldando a luz: a física por trás dos feixes ópticos

Shaping light: the physics behind optical beams

J. P. Amaral¹, C. H. M. Lima²

¹EEFM Prefeito Antônio Conserva Feitosa, Juazeiro do Norte, CE, Brasil.

²Universidade Federal do Acre, 22290-180, Rio Branco, AC, Brasil.

Recebido em 11 de setembro de 2021. Revisado em 17 de outubro de 2021. Aceito em 20 de outubro de 2021.

O surgimento do laser foi um marco para o avanço tecnológico e científico. Por isso há vários artigos descrevendo o processo histórico e suas aplicações, porém, sabendo que os feixes lasers têm perfil espacial gaussiano no plano transversal à propagação, nota-se que a literatura sobre luz estrutura com outras distribuições espaciais ainda é pouco divulgada. Com o intuito de contribuir para sanar esta carência, o presente trabalho pretende mostrar a natureza dos feixes ópticos respeitando o marco histórico de cada feixe e descrevendo matematicamente suas características, iniciando com feixes gaussianos passando por modos Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss em seguida terminamos com feixes Bessel.

Palavras-chave: Modos ópticos paraxiais, modos ópticos não paraxiais, luz modulada, feixes laser.

The emergence of the laser was a milestone for technological and scientific advancement. Therefore, there are several articles describing the historical process and its applications, however, knowing that laser beams have a Gaussian spatial profile in the plane transverse to propagation, it is noted that the literature on light structures with other spatial distributions is still little known. In order to contribute to remedy this lack, the present work intends to show the nature of the optical beams respecting the historical landmark of each beam and mathematically describing its characteristics, starting with Gaussian beams passing through Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss modes and ending with Bessel bundles.

Keywords: Paraxial optical modes, non-paraxial optical modes, modulated light, beams laser.

1. Introdução

A humanidade sempre teve interesse em se perguntar de onde vêm os brilhos das estrelas o porquê a luz solar é tão importante para as plantas, podemos afirmar que a luz sempre teve um papel fundamental para a vida dos seres humanos. Na busca de compreender a natureza ao seu redor, filósofos lutaram através das eras para explicar exatamente o que é a luz e o porquê de seu comportamento [1].

Em (c. 582 A.C.-c. 497 A.C.) os gregos acreditavam que a luz vinha das coisas visíveis e que nossos olhos recebiam as pequenas partículas de luz. O filósofo Empedocles afirmava que a luz vinha de objetos luminosos, mas que os feixes de luz também saíam de nossos olhos [2].

O matemático grego Euclides (c. 325 A.C.-c. 265 A.C.) já afirmava que os olhos emitiam feixes de luz e que isso dava a sensação de visão. O primeiro pensador a construir um experimento para tentar descobrir características da natureza da luz foi Ibn Al-Haitham (965–1040) [3].

René Descartes (1596–1650) caracterizava a luz em relação a variação da pressão em um meio elástico que era denominado de éter que preencha todo espaço. Galileu Galilei (1564–1642) desenvolveu o método científico e assim tornou possível uma investigação própria das propriedades da luz. A lei da refração só foi descoberta em 1621 pelo matemático holandês Willebrord Snell (1580–1626) [1].

No ano de 1666, Sir Isaac Newton mostrou que a luz branca é feita de um espectro contínuo de cores e mostrou experimentalmente esta afirmação passando um feixe de luz do sol por um prisma, decompondo-o nas suas cores constituintes.

Embora acreditasse que a luz fosse formada por partículas, foi o primeiro cientista a observar o fenômeno físico que ficou conhecido como “anéis de Newton”, que são explicados pela teoria ondulatória da luz.

O criador da fenda dupla, Thomas Young, mostrou em 1802 que dois feixes de luz passando por fendas nas proximidades podem ser mutuamente excludentes em certos pontos, um fenômeno característico de ondas. Outra evidência que apoia a teoria ondulatória da luz veio do trabalho teórico de James Clerk Maxwell (1831–1879).

Ele acoplou os trabalhos de Karl Gauss (1777–1855), André Ampère (1775–1836) e Michael Faraday (1791–1867), que eram considerados separados e independentes, unificando os fenômenos da eletrostática, magnetismo e corrente de eletricidade na forma de quatro equações diferenciais, conhecidas como equações de Maxwell [4].

* Endereço de correspondência: joao.amaral@prof.ce.gov.br

No início do século XX, Max Planck (1858–1947) fez uma descoberta que pareceu ser incompatível com a teoria ondulatória da luz, ao analisar a radiação de corpo negro, ele propôs que as cargas elétricas oscilantes tivessem energias discretas múltiplas de hf , onde h é uma constante universal e f a frequência de oscilação [5].

Essa ideia de quantização, contrária a Física clássica, era difícil de se aceitar. Albert Einstein em 1905 explicou o efeito fotoelétrico estendendo esse conceito à própria luz, dizendo que fótons carregando energia hf se comportam como partículas e podem retirar elétrons de uma superfície metálica, algo que uma onda não pode fazer.

Essa dualidade de comportamento levou Luis de Broglie (1892–1987) em 1924 a propor em sua tese de doutorado a ideia de que a matéria também teria propriedades de ondulatória e corpuscular.

Fundado em 1921 por Niels Bohr (1885–1962), o Instituto de Física Teórica em Copenhagem obteve várias cooperações com diversos cientistas e em conjunta colaboração ele enunciaram resultados de seus estudos que ficou conhecido com: a interpretação de Copenhagem da Mecânica Quântica [5].

O primeiro trabalho a descrever uma medida experimental do momento angular da luz foi feito por Richard A. Beth em 1936. Porém, até então, os efeitos dessa interação eram estudados principalmente na matéria. Isso mudou com a invenção do Maser em 1953 e do Laser em 1960. Com o desenvolvimento da tecnologia através do laser, foi possível gerar luz que também possuía momento angular orbital.

Em 1977 H. Je Kimble (1949) demonstrou a primeira fonte de luz que precisaria de uma descrição quântica: um único átomo que emitia um único fóton por vez.

Observando que existem bons trabalhos publicados escritos em língua portuguesa sobre o processo histórico do laser e aplicações na área de astronomia/física e em outras áreas como: saúde e educação [6, 7] mas existem poucos trabalhos dando o ênfase a natureza física dos feixes, este trabalhos propõe fazer uma revisão dos principais tipos de feixes ópticos e descrever seu formalismo matemático e aplicações. Este artigo é, portanto, dirigido aos interessados em uma compreensão mais aprofundada sobre feixes de luz.

2. Equação Escalar de Helmholtz e os Feixes Ópticos

Para obtermos a equação diferencial que descreve a propagação de um feixe óptico tomamos como ponto de partida as equações de James Clerk Maxwell, obtidas por ele em 1865 [8]. Considerando a propagação da luz no espaço livre (vácuo), estas equações são dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1d)$$

com ϵ_0 e μ_0 sendo a permissividade e a permeabilidade do vácuo, respectivamente.

Utilizando as Equação (1a) e Equação (1c), é uma tarefa simples mostrar que o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Deste modo, podemos inferir que o campo elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, é uma onda que se propaga com uma velocidade dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Uma manipulação das Equação (1b) e Equação (1d) levam a uma equação similar a Equação (2), mas em termos da campo indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. No entanto, do ponto de vista das magnitudes, o campo elétrico é muito mais evidente que o magnético, uma vez que $E = cB$. Portanto é comum representar um campo de luz apenas por $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Uma maneira usual de estudar a luz é começar considerando campos de ondas com uma única frequência (campo monocromático) linearmente polarizados, de modo que o campo elétrico possa ser expresso na forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}], \quad (3)$$

onde ω é a frequência de oscilação. A substituição da Equação (3) na Equação (2) leva à equação que descreve a propagação de luz monocromática, a qual é chamada de equação vetorial de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (4)$$

em que $k = \omega/c$ é o módulo do vetor de onda e $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é um vetor complexo que descreve a distribuição espacial do campo.

Por motivos que ficarão claros posteriormente, vamos considerar campos de luz linearmente polarizados. Isso implica que escreveremos o campo complexo da Equação (4) como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}E(\mathbf{r}), \quad (5)$$

\mathbf{a} é um vetor constante que determina a direção em que a luz está polarizada, enquanto que a função escalar $E(\mathbf{r})$ é o que chamamos de amplitude complexa do campo elétrico. Substituindo a Equação (5) na Equação (4), obtém-se a seguinte expressão

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0, \quad (6)$$

a qual é chamada de equação escalar de Helmholtz. Deste modo, nota-se que, mesmo sabendo que a luz possui

natureza vetorial, pode-se fazer um tratamento escalar da mesma. De maneira genérica, o campo $E(\mathbf{r})$ pode ser escrito em termos de duas funções reais da seguinte forma [9]

$$E(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}, \quad (7)$$

em que as funções reais $u(\mathbf{r})$ e $\phi(\mathbf{r})$ são a amplitude e o ângulo de fase da amplitude complexa $E(\mathbf{r})$. Nota-se de imediato que $u^2(\mathbf{r}) = |E(\mathbf{r})|^2$.

A intensidade óptica, $I(\mathbf{r}, t)$, é definida como sendo a potência óptica por unidade de área, a qual é proporcional à média temporal da função de onda ao quadrado [9]:

$$I(\mathbf{r}, t) = 2\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle_t. \quad (8)$$

Tal média temporal é tomada para intervalo de tempo muito grande comparado com o período óptico, mas curto para qualquer outro tempo de interesse. Além disso, é simples mostrar que

$$2\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) = |E(\mathbf{r})|^2 [1 + \cos[2(\phi(\mathbf{r}) - \omega t)]].$$

Isso implica que a intensidade óptica também pode ser expressa como:

$$I(\mathbf{r}, t) = |E(\mathbf{r})|^2.$$

Portanto, nota-se que o módulo da amplitude complexa está diretamente relacionada a intensidade óptica, a qual é uma quantidade fisicamente mensurável, pois do ponto de vista experimental, um dispositivo como uma câmera CCD detecta intensidade.

A partir deste ponto, pode-se afirmar que a Equação (6) descreve a propagação de ondas monocromáticas. Esta equação é o ponto de partida para a análise dos feixes de luz [10]. A evolução espacial da amplitude complexa $E(\mathbf{r})$ pode ser descrita pelas partes transversal (x, y) e longitudinal z . O primeiro termo da Equação (6) descreve o efeito da difração ao longo da propagação. Além disso, é sugestivo pensar que $U(\mathbf{r})$ representa apenas feixes de luz difratantes ao longo da propagação. No entanto, é importante salientar que há duas maneiras de resolver a Equação (6): via aproximação paraxial ou de maneira exata.

Teoricamente, as soluções obtidas com a aproximação paraxial dão origem aos feixes paraxiais os quais estão sujeitos aos efeitos da difração. Já a solução exata da equação de Helmholtz, sob condições especiais, dão origem aos feixes que não sentem os efeitos difrativos. Isto é, o perfil transversal da intensidade de tais feixes, nestas condições, é invariante ao longo da propagação de uma distância infinita.

Embora a equação de Helmholtz possa ser separável em 11 sistemas de coordenadas, a separabilidade nas partes transversa e longitudinal só é possível em coordenadas cartesianas, cilíndricas circulares, cilíndricas parabólicas e cilíndricas elípticas [11]. A solução da Equação (6) em tais sistemas de coordenadas nos lavam

aos feixes ópticos Gaussiano, Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss, Bessel [12], Elípticos [13], parabólicos [14], e etc.

Nas seções seguintes, abordar-se-á os quatro primeiros feixes citados. As soluções que dão origem aos feixes Gaussiano, Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss surgem da equação paraxial de Helmholtz, quando que os feixes Bessel, Elíptico e parabólico são soluções exatas da Equação (6).

Uma vez que estamos tratando de feixes ópticos, para efeito de modelagem, nos interessa campos luminosos com alta direcionalidade, ou seja, campos que se propagam ao longo de um único eixo. Uma maneira de representar isso é tomar a propagação de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ como sendo ao longo do eixo z . Deste modo, pode-se escrever o campo como

$$E(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{-ikz}. \quad (9)$$

Um campo da forma da Equação (9) é conceituado como onda paraxial, a qual é definida como sendo uma onda plana que se propaga ao longo do eixo z e que a amplitude da mesma varia lentamente com a posição \mathbf{r} .

A variação do envelope $U(\mathbf{r})$ e sua derivada com a posição z deve ser lenta dentro da distância de um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$, de modo que a onda mantém sua natureza de ondas planas [9]. A equação paraxial de Helmholtz surge quando substituímos a Equação (9) na Equação (6):

$$[\nabla_t^2 U(\mathbf{r})]e^{-ikz} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[U(\mathbf{r})e^{-ikz}] + k^2 U(\mathbf{r})e^{-ikz} = 0, \quad (10)$$

mas

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}[U(\mathbf{r})e^{-ikz}] = \left[\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} - k^2 U(\mathbf{r}) \right] e^{-ikz}, \quad (11)$$

deste modo, substituindo a Equação (11) na Equação (10), obtém-se que

$$\nabla_t^2 U(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Assumir uma variação lenta de $U(\mathbf{r})$ em relação a z significa que, dentro de uma distância $\Delta z = \lambda$, a mudança $\Delta U(\mathbf{r})$ é muito pequena quando comparada ao próprio $U(\mathbf{r})$, isto é, $\Delta U \ll U$ [9]. Deste modo, tem-se que

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \ll kU(\mathbf{r}), \quad (13)$$

e conseqüentemente

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial z^2} \ll k^2 U(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Com essa aproximação, pode-se negligenciar o segundo termo da Equação (12) em comparação com o terceiro termo da mesma equação, de maneira que a Equação (12) se reduz a

$$\nabla_t^2 A(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

em que $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o laplaciano transversal. A Equação (15) é conhecida como equação paraxial de Helmholtz.

3. Feixe Gaussiano

Em 1966, Kogelnik *et al.* sugeriram que os feixes laser são semelhantes em muitos aspectos às ondas planas, no entanto, suas distribuições de intensidade não são uniformes, mas estão concentradas perto do eixo de propagação e suas frentes de fase são ligeiramente curvas [15]. Em outras palavras, um feixe deste tipo se caracteriza por ter sua potência concentrada principalmente dentro de um pequeno cilindro que envolve seu eixo.

Além disso, a distribuição da intensidade em qualquer plano transversal é uma função gaussiana centrada em torno do eixo de propagação do mesmo. A largura desta função é mínima na cintura do feixe e aumenta gradualmente à medida que a distância da cintura aumenta em ambas as direções. As frentes de onda são aproximadamente planas perto da cintura do feixe, gradualmente se curvam à medida que a distância da cintura aumenta e, por fim, tornam-se aproximadamente esféricas longe da cintura [9]. Um feixe com as características citadas acima é denominado de feixe gaussiano.

O feixe gaussiano é uma solução importante da equação paraxial de Helmholtz (EPH), pois este é a saída típica dos ressonadores ópticos e, além disso, é a base da grande maioria dos experimentos com laser. Em coordenadas cartesianas a equação paraxial de Helmholtz toma a seguinte forma

$$\nabla_t^2 U(x, y, z) - 2ik \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

em que o laplaciano transversal é escrito como $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Deste modo, o que se tem de fazer é encontrar uma expressão para $U(x, y, z)$ que satisfaça a Equação (16). Contudo, como o objetivo é chegar a uma expressão que obedeça aos requisitos de um feixe Gaussiano, uma maneira usual para isso é procurar soluções para a equação paraxial de Helmholtz que estão relacionadas a ondas planas, mas cuja a distribuição transversal de amplitude varia de alguma forma ao longo da direção de propagação. Tal solução pode ser expressa da seguinte forma

$$U(x, y, z) = A(x, y, z)e^{-ikz}. \quad (17)$$

em que $A(x, y, z)$ é uma amplitude que também satisfaz a Equação (16). Neste caso, tem-se que procurar uma forma funcional para $A(x, y, z)$ que seja fisicamente aceitável. E uma solução teste que pode ser usada [16] é:

$$A(x, y, z) = E_0 \exp \left[-i \left(k \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} + P(z) \right) \right], \quad (18)$$

em que $P(z)$ representa um deslocamento de fase, enquanto que $q(z)$ é conhecido como parâmetro do feixe. É uma tarefa simples perceber que quando atuamos o laplaciano transversal na amplitude $A(x, y, z)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 A(x, y, z) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A(x, y, z) \\ &= - \left[2i \frac{k}{q(z)} + \frac{k^2}{q^2(z)} (x^2 + y^2) \right] A. \end{aligned} \quad (19)$$

Proximo passo é tomar a derivada segunda de $A(x, y, z)$ com relação a z , de modo que

$$-2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \left[-2k \left(\frac{dP(z)}{dz} - \frac{k}{2q^2(z)} \frac{dq(z)}{dz} (x^2 + y^2) \right) \right] A. \quad (20)$$

Substituindo as Equações (19) e (20) na Equação (16), chega-se a

$$-2k \left(\frac{dP(z)}{dz} + \frac{i}{q(z)} \right) - \frac{k^2}{q^2(z)} \left(1 - \frac{dq(z)}{dz} \right) (x^2 + y^2) = 0. \quad (21)$$

A Equação (21) deve ser verdadeira para todos os valores de x e y , logo, os coeficientes de diferentes potências de x e y devem ser iguais a zero, portanto

$$\frac{dq(z)}{dz} = 1, \quad (22)$$

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{i}{q(z)}. \quad (23)$$

Por integração direta, nota-se imediatamente que

$$q(z) = q_0 + z, \quad (24)$$

em que q_0 é uma constante de integração.

A partir desse momento, é importante notar que q_0 não pode assumir valor real, pois caso contrário, teria-se

$$A(x, y, z) \propto \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right] \exp [-iP(z)],$$

de modo que $I(x, y, z) = |A(x, y, z)|^2 = 1$, ou seja, o que ocasionaria uma intensidade óptica constante ao longo de toda propagação, uma vez que $P(z)$ não depende das coordenadas x e y . Esta situação não é fisicamente aceitável e portanto não descreve as condições proposta para o feixe. Para contornar este problema, assume-se que $q(z)$ seja complexo, porém, z deve continuar sendo real [16]. Deste modo, assumindo que $q_0 = iz_R$, pode-se escrever

$$q(z) = z + iz_R, \quad (25)$$

onde z_R é uma constante a qual terá seu significado explicitado posteriormente. Além disso, é conveniente escrever

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2},$$

de modo que

$$A(x, y, z) \propto \exp \left[-\frac{kz_R(x^2 + y^2)}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp \left[-i \frac{kz(x^2 + y^2)}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \times \exp[-iP(z)]. \tag{26}$$

Agora, busca-se uma solução para $P(z)$:

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{i}{z + iz_R},$$

Por integração direta, tem-se

$$\begin{aligned} iP(z) &= \int_0^z \frac{dz'}{z' + iz_R} \\ &= \ln(z' + iz_R)|_0^z \\ &= \ln \left[1 - i \left(\frac{z}{z_R} \right) \right]. \end{aligned} \tag{27}$$

É de fácil entendimento que o número complexo $1 - iz/z_R$ pode ser escrito em termos de sua amplitude e fase como se segue

$$1 - i \left(\frac{z}{z_R} \right) = \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{1/2} \exp \left[-i \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) \right],$$

e como consequência disso, tem-se que

$$\begin{aligned} \exp[-iP(z)] &= \exp \left\{ -\ln \left[1 - i \left(\frac{z}{z_R} \right) \right] \right\} \\ &= \left[1 - i \left(\frac{z}{z_R} \right) \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{-1/2} \exp \left[i \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) \right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Portanto, agora a amplitude $A(x, y, z)$ pode ser como

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \frac{E_0}{[1 + (z/z_R)^2]^{1/2}} \exp \left[-\frac{kz_R r^2}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \\ &\times \exp \left[-i \frac{kz(x^2 + y^2)}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp[i\zeta(z)]. \end{aligned} \tag{29}$$

O ângulo de fase

$$\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_R) \tag{30}$$

é conhecido como fase Gouy. Além disso, é comum definir a cintura do feixe ao longo da propagação como sendo

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}, \tag{31}$$

em que w_0 é o menor tamanho da cintura do feixe. Por conveniência, costuma-se localizar w_0 em $z = 0$.

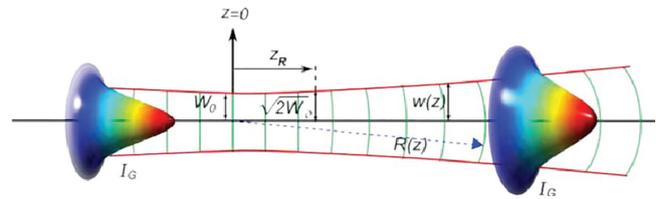


Figura 1: Ilustração da propagação do feixe Gaussiano, a qual evidencia a mudança da cintura do feixe e do raio de curvatura das frentes de onda ao longo da propagação do eixo z , Rosales Guzmán, 2015, pg. 14, [17].

Desta maneira, define-se que $z_R = w_0^2 k/2$, o qual é conhecido como comprimento Rayleigh. z_R é a distância de propagação a qual o feixe gaussiano se propaga como uma onda plana. $k = 2\pi/\lambda$ é o módulo do vetor de onda e λ é o comprimento de onda da luz. Outra definição importante é o raio de curvatura do feixe:

$$R(z) = z \sqrt{1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2}. \tag{32}$$

A partir dessas definições, a Equação (17) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \\ &\times \exp \left[-i \frac{r^2}{2R(z)} - ikz + i\zeta(z) \right], \end{aligned} \tag{33}$$

essa expressão representa o feixe gaussiano com as características expostas no início dessa seção. A intensidade óptica desse feixe é dada por

$$I(x, y, z) = E_0^2 \frac{w_0^2}{w^2(z)} \exp \left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2(z)} \right]. \tag{34}$$

O comportamento dos parâmetros $w(z)$ e $R(z)$ do feixe Gaussiano ao longo da propagação está ilustrado na Figura 1.

Sabe-se que à medida que a luz se propaga, difrata naturalmente. Portanto, o alargamento da cintura do feixe ao longo da propagação é uma consequência natural ocasionada por efeito da difração da luz.

4. Modos Hermite-Gauss

Na seção anterior foi derivado uma solução para a equação paraxial de Helmholtz a partir de características física observáveis do feixe gaussiano em um sistema de coordenadas cartesiano. Porém, no contexto de potenciais aplicações, outros tipos de soluções podem ser obtidas. Estas soluções são chamadas de "modos de propagação" e cada distribuição arbitrária de luz monocromática pode ser expandida em termos desses modos [15].

A solução da equação paraxial de Helmholtz depende do tipo de sistemas de coordenadas do sistema físico em

estudo. Por exemplo, para produzir modos ópticos para serem transmitidos por um guia de onda retangular, deve-se trabalhar com coordenadas cartesianas; no caso de querer propagar um feixe óptico por um guia de seção circular, é necessário trabalhar com coordenadas cilíndricas [12], há configurações físicas que podem requerer que a equação de Helmholtz seja resolvida em coordenadas elípticas [13] ou parabólicas [14].

Com o intuito de obter feixes ópticos com distribuição de intensidade diferente do modo gaussiano, Kogelnik *et al.* [15], em 1966, obtiveram soluções para a equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Eles mostram que para um sistema com geometria retangular (x, y, z) , pode-se tentar uma solução para Equação (16) da forma:

$$U(x, y, z) = g\left(\frac{x}{w}\right) h\left(\frac{y}{w}\right) A_G(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (35)$$

tal solução dá origem a uma família de funções conhecidas como modos Hermite-Gauss. Esses feixes formam um conjunto completo e ortogonal de funções. Salienta-se que g é função de x e z , assim como h é função de y e z . Além disso, A_G é o feixe gaussiano escalonado por sua cintura $2w(z)$, por seu raio de curvatura $R(z)$ e por seu ângulo de fase Gouy $\zeta(z)$. Nota-se, portanto, que os parâmetros de escala dos modos Hermite-Gauss são os mesmos do feixe gaussiano desde que g e h sejam reais.

Lançando mão do método de solução de equação diferencial por separação de variáveis, uma tarefa simples, unicamente operacional, verificar que quando a Equação (35) é substituída na Equação (16), obtêm-se equações para g e h do tipo:

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0, \quad (36)$$

ou seja, uma equação diferencial para os polinômios de Hermite H_m da ordem m , cuja solução pode assumir a seguinte forma [18]:

$$H_m = (-1)^m \exp(x^2) \frac{d^m}{dx^m} \exp(-x^2). \quad (37)$$

É importante enfatizar que a Equação (16) é satisfeita se

$$H_{mn} = g \cdot h = H_m\left(\sqrt{2} \cdot \frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2} \cdot \frac{y}{w}\right), \quad (38)$$

onde m e n são os índices que indicam a ordem de um dado modo transversal. Além disso, a partir da Equação (37) podemos calcular alguns dos primeiros polinômios de Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned} \quad (39)$$

Portanto, a solução em modos para os feixes Hermite-Gauss pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} U_{mn}(x, y, z) &= A_{mn} \frac{w_0}{w(z)} H_{mn}(x, y, z) \\ &\times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \exp(-ikz) \\ &\times \exp\left[-ik\frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i(m+n+1)\zeta(z)\right], \end{aligned} \quad (40)$$

onde A_{mn} é uma constante de normalização. De acordo com a Equação (9), a intensidade óptica para os modos Hermite-Gauss é dada por:

$$\begin{aligned} I_{mn}(x, y, z) &= |A_{mn}|^2 \frac{w_0^2}{w^2(z)} H_{mn}^2(x, y, z) \\ &\times \exp\left[-2\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \end{aligned} \quad (41)$$

Os padrões de intensidade para vários modos Hermite-Gauss são mostrados na Figura 2. Estes padrões consistem na exibição do perfil transversal, (x, y) , de feixes de várias ordens. Tais distribuições de intensidade são obtidas numericamente a partir da Equação (41) no plano $z = 0$.

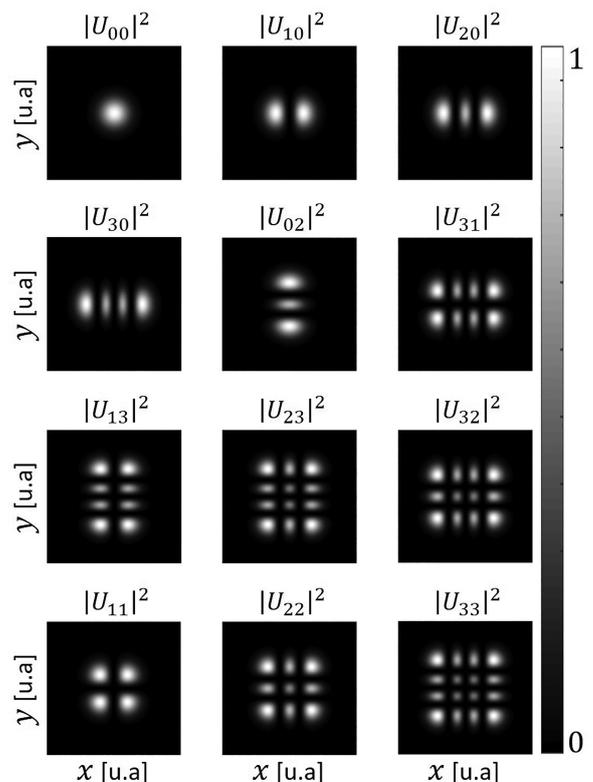


Figura 2: Padrões de intensidade para diversos modos Hermite-Gauss. Cada modo está especificado por sua intensidade $I_{mn} = |U_{mn}|^2$. Entenda como plano transversal uma seção transversal do feixe. Como este se propaga na direção z , o plano é o (x, y) .

A partir da Figura 2 é fácil notar que o modo Hermite-Gauss fundamental, U_{00} , consiste no feixe gaussiano. Veremos mais adiante que isso também é um fato para quando resolvemos a EPH em coordenadas cilíndricas. Dessa maneira é comum encontrar o feixe gaussiano sendo denominado como modo fundamental de propagação.

5. Modos Laguerre-Gauss

Kogelnik *et al.* [15] também proporam resolver a equação paraxial de Helmholtz (EPH) em coordenadas cilíndricas. Resolver a EPH nesse sistema de coordenadas nos a um conjunto completo de soluções conhecidas como modos ou feixes Laguerre-Gauss. Para um sistema com uma geometria cilíndrica (ρ, ϕ, z) , a equação paraxial em questão toma a seguinte forma em coordenadas cilíndricas:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z}\right) U(\rho, \phi, z) = 0. \tag{42}$$

Enfatiza-se que o sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) é transformado no sistema cilíndrico (ρ, ϕ, z) a partir de $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, em que ρ é a coordenada radial e ϕ é o ângulo azimutal.

A solução teste proposta que deve satisfazer Equação (42) tem a seguinte forma [15]:

$$U = g \left(\frac{\rho}{w(z)}\right) \exp \left[-i \left(P + \frac{k\rho^2}{2q(z)} + m\phi\right)\right]. \tag{43}$$

Como resultado da substituição da Equação (43) na Equação (42), verifica-se que a Equação (42) é satisfeita quando:

$$g = \left(\sqrt{2} \frac{\rho}{w(z)}\right)^m \mathbb{L}_p^{|m|} \left(\frac{2\rho}{w^2(z)}\right) \tag{44}$$

em que $\mathbb{L}_p^m(\cdot)$ é o polinômio de Laguerre generalizado que é dado por

$$\mathbb{L}_m^l(x) = \left(\frac{x^{-l} e^x}{m!}\right) \frac{\partial^m}{\partial x^m} (x^{l+m} e^{-x}),$$

e p e m são os números do modo radial e azimutal (ou angular). $\mathbb{L}_p^m(x)$ satisfaz a equação diferencial de Laguerre [19]:

$$x \frac{d^2 \mathbb{L}_p^m}{dx^2} + (m+1-x) \frac{d \mathbb{L}_p^m}{dx} + p \mathbb{L}_p^m = 0. \tag{45}$$

Para efeito de ilustração, a partir da Equação (45), calculamos alguns polinômios de Laguerre:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_0^m(x) &= 1, \\ \mathbb{L}_1^m(x) &= m+1-x, \\ \mathbb{L}_2^m(x) &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - (m+2)x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned} \tag{46}$$

É importante enfatizar que $\mathbb{L}_0^m(x) = 1$ para qualquer valor de m .

O exposto até o momento nos leva à seguinte forma funcional para a Equação (43):

$$\begin{aligned} U_{m,p}(\rho, \phi, z) &= A_{m,p} \left(\frac{w_0}{w(z)}\right) \left(\sqrt{2} \cdot \frac{\rho}{w(z)}\right)^{|m|} \\ &\times \mathbb{L}_p^{|m|} \left(\frac{2\rho}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \\ &\times \exp(-im\phi) \exp(-ikz) \\ &\times \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i(|m| + 2p + 1)\zeta(z)\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Se observarmos a Equação (43), notaremos que ela carrega a fase do feixe gaussiano. Por isso, os parâmetros de escala $w(z)$, $R(z)$ e $\zeta(z)$ são os mesmos obtidos na seção 3, por isso, diz-se que os modos Laguerre-Gauss têm modulação gaussiana. $A_{m,p}$ é uma constante de normalização. Para maior compreensão, construímos a Figura (3), a qual exibe os padrões de intensidade gerado a partir da Equação (47).

Novamente, ao observarmos a Figura (3), notamos que o modo Laguerre-Gauss fundamental, $U_{0,0}(\rho, \phi, z)$, é o feixe Gaussiano.

Diz-se que os modos Laguerre-Gauss é um conjunto completo de soluções da equação paraxial de Helmholtz

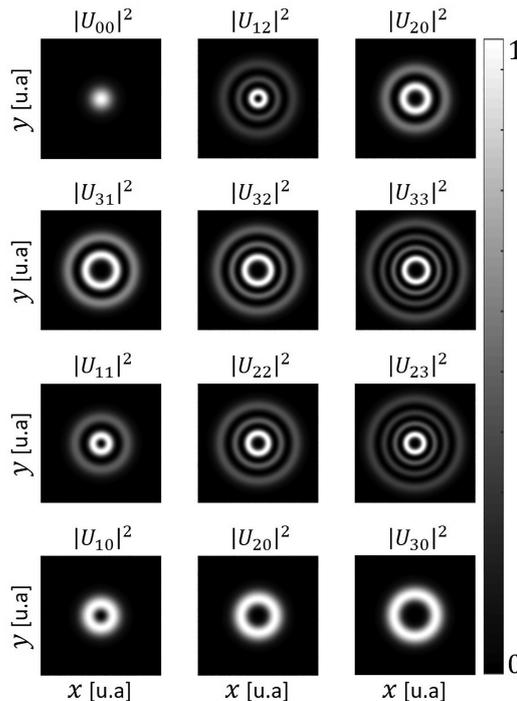


Figura 3: Representação do padrão de intensidade, $I_{mn} = |U_{mn}|^2$, para modos Laguerre-Gauss de diferentes m e p no plano transversal. Cada modo é identificado pelo par de índices (m, p) .

devido estes obedecerem à relação de ortonormalidade em ambas as variáveis, ρ e ϕ . Ou seja,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty U_{m,p}(\rho, \phi, z) [U_{n,l}(\rho, \phi, z)]^* \rho d\rho = \delta_{m,n} \delta_{p,l} \quad (48)$$

Por isso que o número de anéis de um determinado modo está associado ao índice radial p . O índice m está contido no termo de fase azimutal $\exp(-im\phi)$, a qual dá origem a $|m|$ frentes de onda helicoidais entrelaçadas, as quais têm iguais superfícies de fase [10].

Para casos mais específicos, como por exemplo demonstrar a conservação do momento angular orbital (MAO) de um feixe de luz passando por uma abertura [20], usar a ortogonalidade dos modos azimutais para misturar e separar diferentes estados de MAO da luz [21] ou com o intuito de realizar micromanipulação com a luz [22], é interessante trabalhar apenas com os modos Laguerre-Gauss azimutais $U_{m,0}(\rho, \phi, z) = U_m(\rho, \phi, z)$, dessa maneira, a Equação (47) é reduzida a

$$\begin{aligned} U_m(\rho, \phi, z) &= A_m \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) \left(\sqrt{2} \cdot \frac{\rho}{w(z)} \right)^{|m|} \\ &\times \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp(-im\phi) \exp(-ikz) \\ &\times \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i(|m| + 1)\zeta(z)\right). \end{aligned} \quad (49)$$

de modo que a expressão para a intensidade óptica desses modos é dada por

$$\begin{aligned} I_m(\rho, \phi, z) &= A_m^2 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \left(\sqrt{2} \cdot \frac{\rho}{w(z)} \right)^{2|m|} \\ &\times \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right). \end{aligned} \quad (50)$$

A presença do termo de fase azimutal $\exp(-im\phi)$ na Equação (49) faz com que o estudo dos modos Laguerre-Gauss sejam de bastante interesse científico, pois em 1992, Allen *et al.* mostraram que os feixes Laguerre-Gauss (LG) possuem momento angular orbital bem definido de $m\hbar$ por fóton e que este momento angular é independente dos estados de polarização da luz em questão [23].

O trabalho de Allen *et al.* juntamente com o fato de os modos Laguerre-Gauss serem espacialmente ortogonais faz surgir o interesse na utilização desses feixes para implementar sistemas de comunicação óptica com maior capacidade de transmissão de informação [24], pois esta classe de feixes permite a propagação de uma multiplexação espacial de diferentes estados azimutais, bem como a separação eficientemente dos mesmos.

Uma vez que feixes de luz com estrutura de fase azimutal $\exp(-im\phi)$ podem transferir torque a um dado sistema iluminado. As frentes de onda desses feixes têm

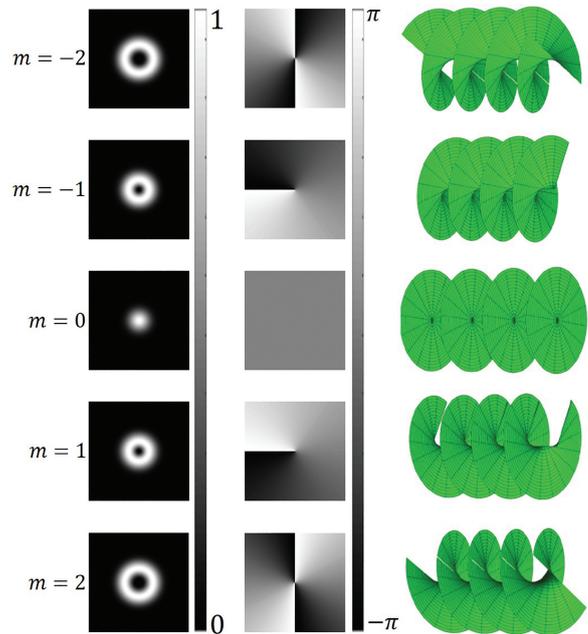


Figura 4: Ilustração dos padrões de intensidade, fase no plano transversal e das frentes de ondas helicoidais (figura inspirada no trabalho de M Padgett, J Courtial, L Allen [25] e no trabalho de Esteban Gomez López [26]).

uma estrutura helicoidal ao longo do eixo de propagação. Afim de deixar claro a influência do termo de fase azimutal, ilustra-se na Figura (4) como o perfil de intensidade transversal e a fase azimutal de diferentes modos LG mudam com o valor de m , além disso, também observamos o comportamento do vetor de Poynting para tais modos.

Diferentemente das ondas com superfície de fase plana, como é caso do feixe Gaussiano, feixes com superfície de fase helicoidal implica que, mesmo no espaço livre, as frentes de onda não são perpendiculares à direção de propagação do feixe e, portanto, o vetor de Poynting não é paralelo à direção de propagação [27]. Deste modo, é intuitivo pensar que o vetor de Poynting tem uma componente azimutal e outra radial à medida que se propaga, como de fato acontece [27]. A componente azimutal é a responsável pelo surgimento do momento angular orbital, enquanto que a componente radial contribui para a divergência do feixe observada ao ser propagado [28].

Os modos Laguerre-Gauss também são conhecidos como vórtices óptico, pois, para $m \neq 0$, estes modos possuem uma singularidade de fase. Mas o que seria uma singularidade de fase em um feixe de luz? De forma bem grosseira, Gregory (2016) define que: a singularidade de fase em uma onda pode ser pensada como um ponto "sem direção" em um campo de onda [29]. Uma maneira mais formal de definir uma singularidade de fase em uma onda luminosa é lançando mão do fato de que um campo de ondas monocromático escalar complexo $U(\mathbf{r})$ pode ser decomposto em suas partes real e imaginária ou ser

escrito em sua forma polar:

$$U(\mathbf{r}) = U_R(\mathbf{r}) + iU_I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|e^{i\psi(\mathbf{r})}. \quad (51)$$

Além disso, sabe-se que a amplitude, $|U(\mathbf{r})|$, e o ângulo de fase, $\psi(\mathbf{r})$, deste campo é dado por

$$\begin{aligned} |U(\mathbf{r})| &= \sqrt{U_R^2(\mathbf{r}) + U_I^2(\mathbf{r})}, \\ \psi(\mathbf{r}) &= \tan^{-1} \left(\frac{U_I(\mathbf{r})}{U_R(\mathbf{r})} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

É fácil notar que se a amplitude do campo se anula em algum ponto do espaço que o contém, $|U(\mathbf{r})| = 0$, isso implica necessariamente que neste mesmo ponto $U_R(\mathbf{r}) = U_I(\mathbf{r}) = 0$, e como consequência disso, tem-se

$$\psi(\mathbf{r}) = \tan^{-1} \left(\frac{0}{0} \right). \quad (53)$$

De fato, no ponto em que a amplitude do campo se anula, sua fase é singular. Consequentemente, sabendo que o feixe Laguerre-Gauss consiste em um padrão de amplitude anelar, a qual se anula em seu centro, isso acarreta o surgimento de uma singularidade de fase ou defeito topológico no centro do feixe. Por isso, geralmente, passa-se a chamar m de carga topológica (CT), a qual representa o tamanho da singularidade, pois quanto maior o valor absoluto de m , maior será o tamanho do anel e isso pode ser evidenciado observando na Figura (4).

No entorno da singularidade, a fase do feixe Laguerre-Gauss aumenta ou diminui em múltiplos inteiros de 2π . Ou seja, quando $m = 1$, a fase varia de 0 a 2π uma vez. Para $m = 2$, a fase varia de 0 a 2π duas vezes e assim sucessivamente, tal comportamento pode ser observado na Figura (4). Além disso, pode-se constatar que, ao propagar o feixe a uma determinada distância, a singularidade de fase se mantém, e portanto, a carga topológica, que representa seu tamanho, se conserva.

A partir da Figura (5), fica evidente o efeito da difração da luz ao longo da propagação, pois, como já citado anteriormente, este efeito surge naturalmente na equação de Helmholtz. A Figura 5(a) mostra o perfil lateral da propagação de um modo LG de CT $m = 2$. Vemos que à medida que tal modo se propaga ocorre

uma divergência. O alargamento da cintura do feixe ao durante sua propagação também pode ser associado à contribuição radial do vetor de Poynting [27].

Já nas Figuras 5(b) e (c), é mostrado os padrões de fase no plano onde o feixe tem menor cintura e depois deste ser propagado no espaço livre de uma distância z arbitrária. Comparando essas duas figuras, facilmente se constata que a singularidade correspondente a $m = 2$ se mantém. Neste caso, diz-se que a CT se conserva.

6. Feixes Bessel

Na seção anterior, os modos Laguerre-Gauss (LG) surgiram a partir da solução da EPH em coordenadas cilíndricas. Viu-se que a difração é um fenômeno natural na propagação desses modos. Porém, a solução exata da equação de Helmholtz (EH), Equação (6), dá origem a uma família de feixes que tem sua distribuição de intensidade constante ao longo da propagação. Tais soluções são conhecidas como feixes não difrativos.

Em 1987, Durnin *et al.* foram os responsáveis por obterem a primeira uma família de feixes não difrativos, os quais foram nomeados de feixes ou modos Bessel [12, 30]. É importante salientar que naquela época ainda não tinha sido demonstrado que a luz carregava momento angular orbital e muito menos que os próprios feixes Bessel possuem tal característica.

Para encontrar a expressão analítica que representará a família de feixes Bessel, o ponto de partida é resolver a EH, Equação (6), em coordenadas cilíndricas [31], a qual é dada por

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0. \quad (54)$$

O fato de a solução procurada deva ser não difrativa sugere que a distribuição de intensidade óptica do campo de luz ao longo da propagação seja constante, ou seja, $I(\rho, \phi, 0) = I(\rho, \phi, z > 0)$. Desse modo, uma solução para a Equação (54) deve ter a seguinte forma

$$U(\rho, \phi, z) = A(\rho, \phi) \exp(i\beta z), \quad (55)$$

onde β é uma constante a ser especificada. Além disso, assumindo separação de variáveis, pode-se escrever $A(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$, de modo que a Equação (55) toma a forma:

$$U(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi) \exp(i\beta z). \quad (56)$$

Agora, substituindo a Equação (56) na Equação (54) e dividindo o resultado disso por $R(\rho)\Phi(\phi) \exp(i\beta z)$, obtém-se a seguinte expressão

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \alpha^2 = 0, \quad (57)$$

em que $\alpha^2 = k^2 - \beta^2$. Multiplicando ambos os lados da Equação (57) por ρ^2 , pode-se reescrevê-la como:

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}. \quad (58)$$

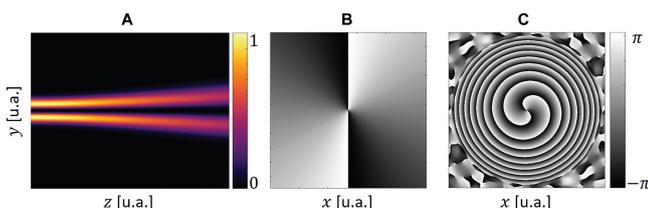


Figura 5: Ilustração da perfil de propagação de um modo LG com $m = 2$. (a) visão lateral da intensidade do feixe; (b) padrão de fase no plano da menor cintura do LG; e (c) padrão de fase após o feixe ter sido propagado de uma distância abitrária z .

Uma vez que o lado esquerdo da Equação (58) depende somente de ρ e o lado direito depende apenas de ϕ , é fácil perceber que para a igualdade ser válida é necessário que os dois lados sejam igual a uma constante m^2 . Isso implica que:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \Phi. \quad (59)$$

Uma forma simplificada de expressar a solução da Equação (59) é dada por:

$$\Phi(\phi) = \exp(-im\phi). \quad (60)$$

A função $\Phi(\phi)$ é periódica e deve se repetir a cada intervalo de 2π , logo, $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, o que implica que m deve ser inteiro ou igual a zero, ou seja, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

O próximo passo é encontrar a solução radial, $R(\rho)$, da equação diferencial, para isso, o lado direito da Equação (58) deve ser igual a m^2 . Multiplicando toda a equação por $R(\rho)$, fica-se com:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + (\alpha^2 \rho^2 - m^2) R = 0. \quad (61)$$

Desenvolvendo a derivada no primeiro termo do lado esquerdo da Equação (61) e dividindo tudo por ρ^2 , tem-se:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (62)$$

A Equação (62) é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem m . Suas soluções são funções de Bessel [31], $J_m(\alpha\rho)$, de ordem m . Finalmente, a amplitude complexa da onda, Equação (56), pode ser escrita da seguinte forma:

$$U_m(\rho, \phi, z) = A_m J_m(\alpha\rho) \exp(-im\phi) \exp(i\beta z), \quad (63)$$

onde A_m é uma constante, J_m é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem m , α e β são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda, onde $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. A intensidade óptica para os feixes Bessel é dada por:

$$I(\rho, \phi, z) = |A_m|^2 J_m^2(\alpha\rho). \quad (64)$$

O modo Bessel fundamental, basta tomar $m = 0$ na Equação (64). É fácil perceber que a Equação (64) possui simetria circular variando com ρ e invariante em z , o que lhe confere a característica de um feixe não difrativo. É importante enfatizar que a presença do termo de fase $e^{-im\phi}$ nos modos Bessel, indica que estes feixes também carregam momento angular orbital.

O comportamento não difrativo dos feixes Bessel fica evidente ao observarmos seu perfil lateral de intensidade de sua propagação, como mostra a Figura (6). A propagação consiste no modo Bessel de ordem $m = 4$.

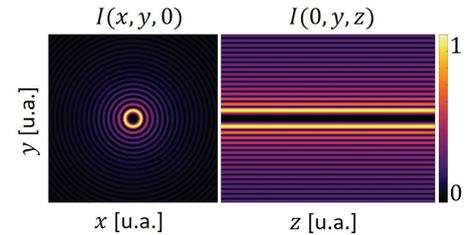


Figura 6: Distribuição de intensidade e perfil da propagação de um feixe Bessel de ordem $m = 4$.

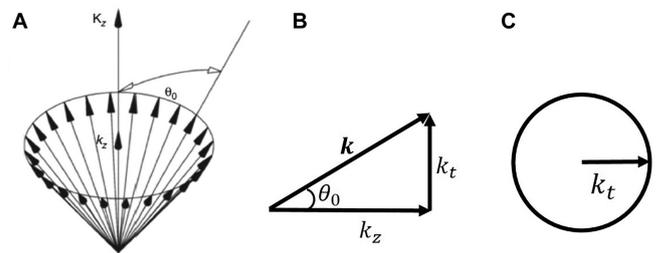


Figura 7: Representação geométrica dos vetores de onda para uma superposição de ondas planas. a) Disposições dos vetores de onda \mathbf{k} sobre a superfície de um cone; b) decomposição do vetor \mathbf{k} em suas partes transversa, k_t , e longitudinal, k_z ; c) a base do cone compreende uma circunferência de raio k_t .

Na Figura (6) da esquerda é mostrado o padrão de intensidade no plano transversal no ponto $z = 0$. Na Figura (6) da direita, tem-se a visão lateral do perfil da propagação, ao longo do eixo z , da intensidade óptica.

Sabe-se que um campo óptico pode ser representado por uma superposição de ondas planas [32], tal fato constitui uma maneira alternativa de se obter soluções que representam feixes não difratantes.

Para um campo constituído por uma superposição de ondas planas, à medida que este se propaga, as ondas planas interferem umas com as outras construtiva e destrutivamente, sendo que este processo de interferências dependem da fase relativa adquirida por cada onda plana na direção de propagação [32]. No entanto, há superposições em que a fase de cada onda plana muda de forma idêntica, todos os feixes não difrativos têm essa característica.

Neste cenário, os feixes Bessel são vistos como um conjunto de ondas planas de igual amplitude com iguais componentes longitudinais do vetor de onda, k_z . Intuitivamente, pode-se imaginar que tais superposições de ondas formam um cone de luz em que o eixo do cone corresponde à direção de propagação de um dado feixe Bessel. Nesta abordagem, admite-se que os vetores de onda \mathbf{k} residem na superfície do cone. Além disso, considera-se que estes vetores podem ser decompostos em componentes transversal, k_t , e longitudinal, k_z , em que $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_t^2 + k_z^2}$. A Figura (7) mostra esquematicamente as disposições das componentes dos vetores de onda.

Uma alteração nas amplitudes das ondas planas pode gerar feixes elípticos [13] e parabólicos [14]. Além disso, existem outras soluções que não se propagam em linha reta, como o feixe Airy [33].

Do ponto de vista quantitativo, inicia-se escrevendo a equação de Helmholtz como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)U(x, y, z) = 0. \quad (65)$$

Por conveniência, escolhamos o eixo z como a direção de propagação. Deste modo, é fácil verificar que a onda plana a seguir é solução da Equação (65)

$$U_0(x, y, z) = \exp[ik_z z - ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)], \quad (66)$$

desde que a relação $k^2 = k_t^2 + k_z^2$ seja satisfeita. Onde k_z é o componente longitudinal do vetor de onda e k_t corresponde à componente transversal. A variável ϕ é o ângulo polar do plano transversal onde reside k_t . Se quisermos obter um feixe não difrativo, como o feixe Bessel, por exemplo, precisa-se de uma superposição de múltiplas ondas planas. Esta superposição pode ser descrita usando a integral de Whittaker [32]:

$$U(x, y, z) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi \quad (67)$$

a qual é solução da equação de Helmholtz. De fato,

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0,$$

$$(\nabla_t^2 - k_z^2 + k^2) e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0.$$

Como $k_t^2 = k^2 - k_z^2$, então

$$e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) (\nabla_t^2 + k_t^2) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0,$$

$$e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) [-k_t^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + k_t^2] \times e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0. \quad (68)$$

Uma vez que $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, está provado que a integral de Whittaker satisfaz a equação de Helmholtz. Além disso, a função complexa $A(\phi)$ define a fase e a amplitude das diferentes ondas planas que compõem o feixe não difrativo.

Deste modo, percebe-se que um feixe não difrativo é dado por uma superposição de múltiplas ondas planas tendo vetor de onda transversal, k_t , restrito em um círculo. Hernández-Figueroa *et al.* afirmam que qualquer função complexa $A(\phi)$ define um feixe não difrativo. Entretanto, a integral de Whittaker só pode ser expressa analiticamente para alguns casos particulares de $A(\phi)$ [32]. Um destes casos ocorre quando $A(\phi) = e^{-im\phi}$, de modo que

$$U(x, y, z) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi. \quad (69)$$

A relação entre as coordenadas cartesianas e cilíndricas, para o plano transversal, é expressa como $x = \rho \cos \phi'$ e $y = \rho \sin \phi'$, o que nos permite expressar a Equação (69) como:

$$U(\rho, \phi, z) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{ik_t \rho (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')} d\phi$$

$$= e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{ik_t \rho \cos(\phi - \phi')} d\phi.$$

Fazendo uma mudança de variável, em que $\theta = \phi - \phi'$, tem-se que

$$U(\rho, \phi, z) = e^{ik_z z} e^{-im\phi'} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} e^{ik_t \rho \cos \theta} d\theta. \quad (70)$$

Sabendo que a função Bessel de primeiro tipo de ordem m é dada por [34]:

$$J_n(x) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} e^{ix \cos \theta} d\theta. \quad (71)$$

Isso implica que

$$U_m(\rho, \phi, z) = A_m J_m(k_t \rho) e^{-im\phi} e^{ik_z z}. \quad (72)$$

em que A_m é uma constante. Observe que, comparando as Equação (63) e Equação (72), constata-se facilmente que $\alpha = k_t$ e $\beta = k_z$.

A Equação (72) nos diz, novamente, que a intensidade óptica dos modos Bessel é dada por

$$I_m(\rho, \phi, z) = |A_m|^2 |J_m(k_t \rho)|^2. \quad (73)$$

A partir da Equação (73), notamos mais uma vez que a intensidade do feixe Bessel não depende da coordenada z . Na Figura 8 mostramos os padrões de intensidade e de fase no plano transversal, (x, y) , em um dado ponto z .

Em 2019, Amaral, João P *et al.* obtiveram de maneira teórica e experimental feixes não difrativos com geometrias diferentes da circular [35]. Eles manipularam $A(\phi)$ com o intuito de transferir a informação de uma dada geometria ao espectro angular a partir da parametrizações de curvas simples.

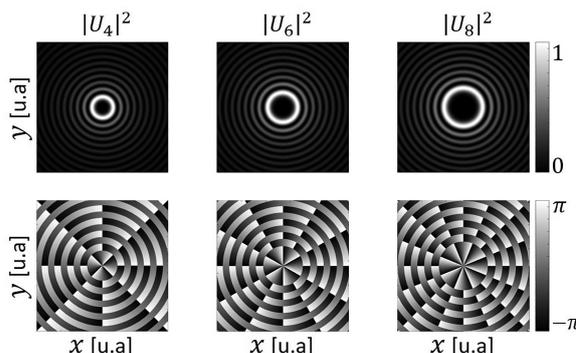


Figura 8: Distribuição de intensidade e fase no plano transversal para algumas ordens do feixe Bessel.

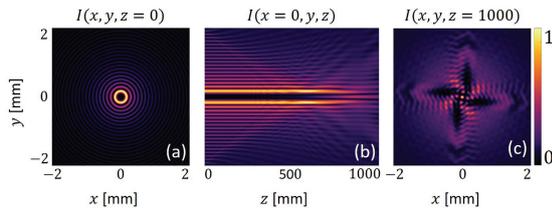


Figura 9: Distribuição de intensidade e fase no plano transversal para algumas ordens do feixe Bessel.

Teoricamente, como vimos na Figura 6, os feixes Bessel podem ser propagados, livres dos efeitos da difração, de uma distância infinita. Uma vez que foi suposto que um dado modo é composto de uma superposição de múltiplas ondas planas, para que este se propague infinitamente sem difratar, cada onda plana componente deve ser vista como tendo extensão espacial infinita. Devido a isto, diz-se que o feixe tem energia infinita.

Na prática, os modos Bessel, bem como qualquer outro, são gerados sobre uma região finita. Logo, seu comportamento não difrativo se dá para uma distância finita do eixo z . A Figura 9(a) mostra o padrão de intensidade do feixe Bessel no plano $z = 0$ para uma carga topológica $m = 4$. Já a Figura 9(b) mostra o perfil lateral da intensidade ao longo da propagação, enquanto que a Figura 9(c) exibe o padrão de intensidade do feixe depois de ser propagado de uma distância $z = 1000$ mm.

A propagação do feixe mostrado na Figura 9(b) se deu via método do espectro angular [36], o que equivale a geração de um campo óptico limitado por uma abertura quadrada finita. Tal abertura foi simulada para ter lado $L = 4$ mm e o campo a partir dela foi propagado de uma distância de $z = 1000$ mm. A propagação foi realizada numericamente com o intuito de simular o que acontece na prática de laboratório. Deste modo, a partir da Figura 9(b), percebe-se que o feixe se propaga livre dos efeitos difrativos por uma distância de aproximadamente 700 mm, a partir desse ponto o feixe começa a colapsar e em 1000 mm está paraticamente todo deformado.

A importância de estudar modos não difrativos se justifica no fato de que estes tipos de feixes têm uma grande gama de possíveis aplicações. No cenário da comunicação óptica, principalmente, eles surgem como uma alternativa relevante de canal de envio de informação, pois podem ser projetados para propagar grandes distâncias sem sentir efeitos apreciáveis da difração e serem bastante resistentes a flutuações atmosféricas [37].

Além disso, Arlt *et al.*, em 2001, mostraram uma técnica de micromanipulação óptica para mover partículas de tamanho micrométrico com feixe Bessel [38]. Já em 1990, Lu *et al.* propõem um método de geração de imagens médicas usando feixes não paraxiais em vez de gaussiano [39]. Soma-se a essas, potenciais aplicações em metrologia [40] e microscopia [41], além da utilização desses feixes em óptica quântica e não linear [42].

7. Conclusão

Neste trabalho, somado a uma revisão histórica sobre a óptica e o entendimento da luz até a invenção da luz laser, analisamos detalhadamente o modo laser fundamental gaussiano, além de mostrar como obter outros modos de luz com distribuição espacial e propriedades diferentes daquelas do feixe Gaussiano.

Apresentamos uma análise matemática detalhada de diversas soluções da equação de Helmholtz que levam à forma funcional para os modos lasers Gaussiano, Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss e Bessel. Além disso, mostramos que para obter soluções diferentes do modo gaussiano, além da forma da solução teste para satisfazer a equação de Helmholtz, o sistema de coordenadas utilizado também é importante.

A partir de nossa análise, concluímos que cada feixe tem características distintas entre si, mas podem partilhar parâmetros físicos semelhantes. Por exemplo, vimos que os feixes Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss partilham os mesmos parâmetros $W(z)$, $R(z)$ e $\zeta(z)$ do feixe Gaussiano.

Uma comparação entre um feixe paraxial (Laguerre-Gauss) e um feixe não paraxial (Bessel) permite concluir que, do ponto de vista experimental, os modos Laguerre-Gauss se propagam mais que os modos Bessel. Isso faz dos feixes paraxiais objeto de estudo mais importantes que os feixes não difrativos quando o intuito da pesquisa é o transporte de informação.

No estudo dos modos Laguerre-Gauss e Bessel, mostramos que estes feixes se comportam como vórtices devido possuírem uma singularidade de fase, o que ocasiona o transporte de momento angular orbital pelos mesmos. A propriedade momento angular orbital não é verificada nos modos Gaussiano e Hermite-Gauss.

Referências

- [1] A. Montwill e A. Breslin, *Let there be light: the story of light from atoms to galaxies* (Imperial College Press, London, 2013).
- [2] M.S. Zubairy, em: *Optics in Our Time* (Springer, Cham, 2016), p. 3.
- [3] V. Bagnato e S. Pratavieira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37**, 4206 (2015).
- [4] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics* (Wiley, New York, 1999).
- [5] K.S. Krane, *Modern physics* (John Wiley & Sons, Hoboken, 2019).
- [6] C.P. Silva e O. Freire, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **39**, e1502 (2017).
- [7] R. Ambrósio Júnior, *Revista Brasileira de Oftalmologia* **70**, 207 (2011).
- [8] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light* (Pergamon Press, Oxford, 1970), 4ª ed.
- [9] B.E.A. Saleh e M.C. Teich, *Fundamentals of photonics* (Wiley, New York, 1991).

- [10] D.L. Andrews e M. Babiker, *The angular momentum of light* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012).
- [11] Z. Bouchal, Czechoslovak Journal of Physics **53**, 537 (2003).
- [12] J. Durnin, J.J. Miceli Jr. e J.H. Eberly, Physical Review Letters **58**, 1499 (1987).
- [13] S. Chávez-Cerda, J.C. Gutiérrez-Vega e G.H.C. New, Optics Letters **26**, 1803 (2001).
- [14] M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega e S. Chávez-Cerda, Optics Letters **29**, 44 (2004).
- [15] H. Kogelnik e T. Li, Applied Optics **5**, 1550 (1966).
- [16] E.J. Galvez, *Gaussian beams* (Colgate University, New York, 2009).
- [17] C.G. Rosales Guzmán, *Photonic applications based on the use of structured light*. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona (2015).
- [18] F. Qi e B.N. Guo, Georgian Mathematical Journal **29** (2021).
- [19] G. Arfken e H.H. Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física* (Elsevier, Rio de Janeiro, 2007).
- [20] J.C. Rocha, J.P. Amaral, E.J.S. Fonseca e A.J. Jesus-Silva, JOSA B **36**, 2114 (2019).
- [21] D.O. Bezerra, J.P. Amaral, E.J.S. Fonseca, C.R. Alves e A.J. Jesus-Silva, Scientific Reports **10**, 2533 (2020).
- [22] D.G. Grier, Nature **424**, 810 (2003).
- [23] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R. Spreeuw e J. Woerdman, Physical Review A **45**, 8185 (1992).
- [24] J. Wang, J.Y. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur *et al.*, Nature Photonics **6**, 488 (2012).
- [25] M. Padgett, J. Courtial e L. Allen, Physics Today **57**, 35 (2004).
- [26] E. Gómez Lopez, *Estudio de flujo transversal de energía como función de la carga topológica en vórtices ópticos*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de Mexico (2016).
- [27] M.J. Padgett e L. Allen, Optics Communications **121**, 36 (1995).
- [28] L. Allen e M. Padgett Miles, em: *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum*, editado por J.P. Torres e L. Torner (Wiley-VCH, Weinheim, 2011), p. 1.
- [29] G.J. Gbur, *Singular optics* (CRC Press, Boca Raton, 2016).
- [30] J. Durnin, JOSA A **4**, 651 (1987).
- [31] H.J. Weber e G.B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicists, ISE* (Academic Press, San Diego, 2003).
- [32] H.E. Hernández-Figueroa, M. Zamboni-Rached e E. Recami (eds), *Non-diffracting waves* (Wiley-VCH, Weinheim, 2013).
- [33] N.K. Efremidis, Z. Chen, M. Segev e D. Christodoulides, Optica **6**, 686 (2019).
- [34] E. Wolf, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **253**, 349 (1959).
- [35] J.P. Amaral, J.C.A. Rocha, E.J.S. Fonseca e A.J. Jesus-Silva, Optics Express **58**, 3659 (2019).
- [36] K. Matsushima e T. Shimobaba, Optics Express **17**, 19662 (2017).
- [37] T. Shiina, K. Yoshida, M. Ito e Y. Okamura, Optics Communications **279**, 159 (2007).
- [38] J. Arlt, V. Garcés-Chávez, W. Sibbett e K. Dholakia, Optics Communications **197**, 239 (2001).
- [39] J.Y. Lu e J.F. Greenleaf, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control **37**, 438 (1990).
- [40] X. Zhang, B. Zhao e Z. Li, Journal of Optics A: Pure and Applied Optics **6**, 121 (2003).
- [41] F.O. Fahrbach, P. Simon e A. Rohrbach, Nature Photonics **4**, 780 (2010).
- [42] M. McLaren, T. Mhlanga, M.J. Padgett, F.S. Roux e A. Forbes, Nature Communications **5**, 3248 (2014).