

O significado da mecânica matricial: saltos quânticos, dispersão óptica e o trabalho de Werner Heisenberg de 1925

The meaning of matrix mechanics: quantum jumps, optical dispersion, and Werner Heisenberg's 1925 work

Reinaldo de Melo e Souza^{*1}, Thiago Hartz²

¹Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, Niterói, RJ, Brasil.

²Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 21 de agosto de 2025. Aceito em 21 de agosto de 2025.

Neste artigo, discutimos a primeira formulação da mecânica quântica, proposta por Werner Heisenberg em 1925 e posteriormente denominada mecânica matricial. Enfatizamos os aspectos conceituais, articulando a passagem das teorias existentes até então (em particular, o átomo de Bohr e a teoria óptica da dispersão) ao trabalho de Heisenberg. Argumentamos que a grande novidade trazida por Heisenberg foi adaptar o formalismo recém-desenvolvido para a teoria da dispersão óptica por ele e por Hendrik Kramers, aplicando-o a um processo de emissão. Discutimos o aspecto matricial da proposta de Heisenberg, que foi compreendido em seguida, ainda em 1925, por Max Born e Pascual Jordan. Discutimos também como o chamado quadro de Heisenberg está presente na mecânica matricial. Por fim, refletimos sobre a relevância do trabalho de Heisenberg para o ensino atual de mecânica quântica. Em particular, propomos uma articulação didática entre o projeto teórico do átomo de Bohr e o trabalho de Heisenberg de 1925, motivando assim a mecânica quântica diretamente a partir das transições quânticas presentes no átomo de Bohr.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Mecânica Matricial, Átomo de Bohr, História da Física, Ensino de Mecânica Quântica.

In this article, we discuss the first formulation of quantum mechanics, proposed by Werner Heisenberg in 1925 and later called matrix mechanics. We emphasize the conceptual aspects, articulating the transition from existing theories (in particular, the Bohr atom and the optical theory of dispersion) to Heisenberg's work. We argue that the major innovation brought by Heisenberg was adapting the formalism recently developed for the theory of optical dispersion by him and Hendrik Kramers, applying it to an emission process. We discuss the matrix aspect of Heisenberg's proposal, which was fully understood in 1925 by Max Born and Pascual Jordan. We also discuss how the so-called Heisenberg picture is present in matrix mechanics. Finally, we reflect on the relevance of Heisenberg's work for the current teaching of quantum mechanics. In particular, we propose a didactic articulation between the theoretical project of the Bohr atom and Heisenberg's 1925 work, thus motivating quantum mechanics directly from the quantum transitions of the Bohr atom.

Keywords: Quantum Mechanics, Matrix Mechanics, Bohr Atom, History of Physics, Teaching of Quantum Mechanics.

1. Introdução

A Organização das Nações Unidas proclamou 2025 como o *Ano Internacional da Ciência e da Tecnologia Quânticas*. A comemoração marca o centenário da mecânica quântica. A escolha de 1925 como sendo o marco inicial dessa teoria é uma homenagem ao artigo intitulado “Sobre a reinterpretação teórico-quântica das relações cinemáticas e mecânicas” de Werner Heisenberg, no qual foi proposta a primeira formulação da mecânica quântica [1] (tradução para inglês em [2, pp. 261–276]). Entre 1900 e

1925, foram desenvolvidas diversas propostas de teorias quânticas, termo que denota qualquer formulação teórica que incorpore a constante de Planck, introduzida por Max Planck em 1900. Essas teorias eram bem sucedidas na análise de problemas específicos, sem um formalismo geral consistente. O termo mecânica quântica denota, por sua vez, uma teoria quântica sistemática que possa ser aplicada a qualquer sistema mecânico.

Por que as comunidades de físicos, químicos e historiadores da física escolheram esse trabalho como sendo o divisor de águas entre a teoria quântica antiga e a mecânica quântica? Convidamos o leitor a passar os olhos no artigo de Heisenberg e identificar algo em comum com o que chamamos hoje de mecânica

*Endereço de correspondência: reinaldos@id.uff.br
Editor-Chefe: Marcello Ferreira

quântica. Esse artigo é reconhecidamente hermético e possui passagens que geraram – e ainda geram – acalorados debates sobre o que o autor quis dizer e quais foram suas motivações. Parte da dificuldade do artigo reside no fato de que Heisenberg não dispunha ainda, em julho de 1925, quando enviou seu trabalho para publicação, de ferramentas matemáticas adequadas para avaliar o inteiro conteúdo físico e as implicações de sua proposta, motivo pelo qual somente com o artigo subsequente de Max Born e Pascual Jordan, finalizado dois meses depois, o inteiro significado da teoria veio a ser plenamente compreendido [3].¹ Born e Jordan utilizaram o conceito de matriz, a partir do qual a proposta de Heisenberg foi adequadamente formulada e apreciada, levando à denominação *mecânica matricial*, que ficou então consagrada na comunidade. A introdução de matrizes não permitiu apenas nomear algo deixado implícito por Heisenberg; permitiu também uma profunda ressignificação da teoria, trazendo a dramática revolução conceitual na forma como a teoria quântica pensava as grandezas físicas. Por isso, em contraste, o artigo de Born e Jordan parece, ao leitor contemporâneo, muito mais familiar.

Neste artigo, teremos dois objetivos. Primeiro, explicaremos o motivo pelo qual o artigo de Heisenberg pode ser considerado o trabalho fundador da mecânica quântica. Tendo em vista que esse artigo foi publicado em um período profundamente criativo da história da física, comparar sua proposta com os demais trabalhos de sua época traz, conforme mostraremos, algumas surpresas interessantes, que colocam inúmeras questões sobre a dimensão inaugural desse trabalho. Os cientistas frequentemente imaginam que o início de uma área de pesquisa ocorre de forma disruptiva a partir de uma contribuição seminal. Entretanto, a história é sempre mais complexa. Assim como, por um lado, a mecânica quântica teve que esperar Born e Jordan para ter sua estrutura matricial elucidada, por outro, os precursores de Heisenberg também trouxeram contribuições fundamentais, a tal ponto que podemos nos perguntar se não seria possível localizar neles o início dessa teoria. Os argumentos centrais do artigo de Heisenberg podem ser encontrados, ainda que de forma embrionária, nas obras de outros físicos, em particular Niels Bohr e Hendrik Kramers. Assim, avaliar o que há, de fato, de novo no artigo de Heisenberg é uma tarefa complexa, que está longe de ser plenamente finalizada pelos pesquisadores em história da física. Esperamos que este artigo possa contribuir nesse sentido.

O segundo objetivo será mostrar a relevância do artigo de Heisenberg para o ensino atual de mecânica quântica. Os livros didáticos tipicamente ignoram a formulação original de Heisenberg,² dando a entender que essa formulação, apesar de sua importância histórica, não

deve ser exposta aos físicos em formação. A ênfase desses livros recai, em geral, sobre o aspecto matricial ou operatorial dos observáveis, sem que esse aspecto seja articulado aos moldes de Heisenberg. Defenderemos que a abordagem de Heisenberg permite desenvolver uma interessante intuição acerca do significado da mecânica quântica. Em particular, mostraremos que o modelo atômico de Bohr, conforme ensinado nos textos introdutórios de quântica,³ contém todos os elementos necessários para entender e motivar as passagens e as novidades essenciais do trabalho de Heisenberg, justificando didaticamente a introdução de matrizes nas aulas de mecânica quântica.

Há uma ampla literatura sobre a história da mecânica quântica, que explora diversos aspectos da obra de Heisenberg. Nosso intuito neste artigo não é apresentar uma revisão dessa literatura e tampouco reconstruir todos os elementos da obra desse autor. Assim, aspectos biográficos de Heisenberg, incluindo as motivações pessoais que levaram-no a escrever o artigo de 1925, podem ser encontrados em [8–11]. Análises detalhadas desse trabalho podem ser encontradas em [4, 12–15]. Como fica claro nessas obras, o artigo de 1925, como todo trabalho verdadeiramente inovador, é altamente heterogêneo, misturando pérolas, que viriam a mudar a própria forma de fazer ciência, com discussões e conceitos que ainda remetem à teoria quântica antiga. Inclusive, alguns argumentos apresentados por Heisenberg posteriormente se mostraram incorretos [12, p. 44].

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2, fazemos um apanhado dos principais desenvolvimentos da teoria quântica de 1900 a 1925 que são relevantes para contextualizar o trabalho de Heisenberg. Enfatizamos os aspectos programáticos, buscando delinear as atitudes e os projetos teóricos dos físicos diante dos problemas da teoria quântica naquele período. Na seção 3, discutimos em detalhes a profunda revolução conceitual trazida pelo átomo de Bohr. Conforme mostraremos nas seções seguintes, o trabalho de Heisenberg de 1925 baseia-se, ainda que por vezes tacitamente, nas ideias de Niels Bohr acerca da teoria quântica. Na seção 4, mostramos a busca, empreendida por Heisenberg e outros, por uma teoria quântica que pudesse superar as dificuldades existentes, levando a um formalismo sistemático. Na seção 5, mostramos, de uma perspectiva didática, como, partindo das ideias de Bohr, é possível chegar, de modo natural, na formulação de Heisenberg. Na seção 6, discutimos em detalhes o artigo de Heisenberg de 1925. Na seção 7, mostramos que a abordagem didática apresentada na seção 5 permite compreender diversos aspectos da proposta de Heisenberg exposta na seção 6, levando a resultados que viriam a aparecer apenas no trabalho de Born e Jordan de 1925. Enfatizamos, em particular, como o chamado quadro de Heisenberg se mostra presente na teoria de Heisenberg

¹ Uma tradução parcial desse artigo para a língua inglesa, que omite a última seção, pode ser encontrada em [2, pp. 277–306].

² Uma notável exceção é o livro de Toledo Piza [6].

³ Por exemplo, o livro de física básica de Nussenzveig [7].

quando fraseada em termos de matrizes, como fizeram Born e Jordan. Na seção 8, explicamos por que o oscilador harmônico desempenhou um papel tão central na teoria quântica antiga. Em seguida, explicamos por que não poderia vir dele o surgimento da mecânica matricial, que teve que esperar o desenvolvimento do átomo de Bohr. Por fim, na seção 9, apresentamos nossas conclusões.

2. A Situação da Teoria Quântica de 1900 a 1925

O período de 1900 a 1925 foi um dos mais conturbados e originais da história das ciências, com diferentes tentativas de construir uma teoria quântica que fosse sistemática e pudesse ser aplicada a qualquer sistema mecânico.⁴ Nesta seção, analisaremos esse período, destacando os elementos necessários para contextualizar o trabalho de Heisenberg.

No decorrer do século XIX, como resultado do esforço combinado de inúmeros cientistas, foi realizada a unificação de fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos [19]. Os físicos compreenderam que os campos elétrico e magnético eram manifestações de um mesmo campo, denominado eletromagnético, cuja dinâmica é regida pelas equações de Maxwell. Eles compreenderam também que todo fenômeno luminoso corresponde a oscilações de campos eletromagnéticos, que no caso da luz visível envolve frequências absurdamente altas ($\nu \sim 10^{14}$ Hz) quando comparadas às escalas usuais de frequências mecânicas. Os fenômenos eletromagnéticos desempenharam, na física do século XX, um papel análogo ao que os fenômenos gravitacionais tinham desempenhado na filosofia natural dos séculos XVI e XVII. Das equações de Maxwell e do seu grupo de simetria (conhecido como grupo de Lorentz) teve início a teoria da relatividade de Albert Einstein. Da interação entre luz e matéria veio boa parte da teoria quântica, inclusive o trabalho inaugural de Planck [20, 21] (traduzidos para o português, respectivamente, em [22, 23]).

A questão que se colocava era como estabelecer teoricamente a distribuição espectral da energia eletromagnética emitida por um corpo a uma temperatura T , como por exemplo a luz emitida pelo Sol. As medidas experimentais mostravam que o pico de emissão está em uma frequência ν_P que é uma função crescente da temperatura. Em particular, os esforços teóricos se concentraram inicialmente no estudo da radiação emitida por corpos negros, uma abstração que consiste em supor que o material absorveria totalmente a radiação que incidisse sobre ele. O motivo dos esforços se concentrarem em um cenário tão idealizado se devia ao trabalho seminal de Gustav Kirchhoff, que em 1859 demonstrara, por argumentos termodinâmicos gerais,

que a razão entre a energia emitida e o coeficiente de absorção⁵ para um corpo qualquer em equilíbrio térmico à temperatura T é uma função universal da temperatura e da frequência, a qual denotamos por $f(\nu, T)$.⁶ Para um corpo negro, o coeficiente de absorção é igual a 1 e, portanto, a emissão de radiação por esse corpo é descrita pela própria função universal $f(\nu, T)$.

A existência dessa universalidade e a utilização de argumentos de análise dimensional são suficientes para garantir que a física clássica é incapaz de obter $f(\nu, T)$, conforme foi reconhecido em retrospecto por Arnold Sommerfeld [26, pp. 141–143]. A universalidade impõe que a frequência do pico, ν_P , pode depender apenas de T e de constantes universais. No entanto, na física clássica não há nenhuma constante universal com a dimensão necessária para converter temperatura em frequência. Assim, não pode haver um pico da função f na variável ν . Predições clássicas necessariamente levarão a uma função sem pico, ou seja, uma função f constante ou monotônica da frequência, ambas em desacordo com as observações experimentais. Esse é justamente o caso da lei de Rayleigh-Jeans, obtida por James Jeans em 1905 com base no eletromagnetismo clássico, que prevê um f como função crescente da frequência [27]. Conforme esperado pelo argumento dimensional, a lei de Rayleigh-Jeans se mostrou incapaz de explicar as medidas experimentais.

A distribuição espectral que ajusta satisfatoriamente os dados experimentais foi encontrada por Planck em 1900. Ele modelou o corpo negro como um conjunto de osciladores harmônicos materiais. Cada oscilador vibra em uma frequência ν característica. A aceleração das partículas carregadas eletricamente que compõem cada oscilador constitui a origem física da radiação eletromagnética emitida pelo corpo negro na frequência de vibração do respectivo oscilador. Partindo desse modelo mecânico, Planck mobilizou diversos conceitos de mecânica estatística. A fim de contar os microestados de energia possíveis para os osciladores em uma dada frequência ν , Planck propôs que a energia de cada oscilador pode assumir apenas valores múltiplos da frequência $E = h\nu$. Originalmente, ele esperava que esse procedimento fosse meramente um artifício para a contagem de microestados, sendo possível, ao final, tomar o limite $h \rightarrow 0$ [28, 29]. Contudo, seu trabalho podia reproduzir de forma bem acurada as observações experimentais apenas se $h \approx 6,6 \times 10^{-34}$ J.s, que hoje é conhecida como constante de Planck. Em termos dessa constante, é possível produzir a combinação $k_B T/h$, que possui dimensão de frequência, permitindo obter a frequência do pico. Desse modo, a inclusão da nova constante h resolve o problema dimensional mencionado anteriormente.

⁵ O coeficiente de absorção é definido como a razão, para uma dada frequência, entre a energia absorvida pelo corpo e a energia incidente sobre ele.

⁶ Ver [24, pp. 783–787] e [25].

⁴ Análises históricas desse período pode ser encontrada em [4, 5, 12, 16–18].

A compreensão física da origem do pico veio com o trabalho de Hendrik Lorentz de 1908 [17, 28]. O ponto é que o banho térmico na qual o emissor de radiação está envolto fornece energia da ordem de $k_B T$. Até é possível fornecer mais energia, mas a probabilidade, por ser ponderada pelo peso de Boltzmann, decresce exponencialmente com a energia. Assim, componentes do campo eletromagnético com frequências ν tais que $h\nu \gg k_B T$ praticamente não recebem energia por excitações térmicas. Caso o corpo negro pudesse trocar energia continuamente com o banho térmico, todas as frequências receberiam energia igualmente, pelo princípio de equipartição de energia, e não haveria pico.⁷ Conforme Sommerfeld destacou, a teoria quântica nasceu destruindo o princípio da equipartição de energia: os graus de liberdade devem ser ponderados e não contados.

A partir do trabalho de Planck, surgiram dois questionamentos, que acabaram por delinear duas perspectivas teóricas distintas. (i) Como descrever, a partir de primeiros princípios, a troca de energia entre matéria e radiação? Ao estudar a distribuição de radiação em equilíbrio térmico, Planck analisou a energia do campo eletromagnético, mas não abordou a troca de energia da perspectiva da matéria. (ii) O que a discretização na troca de energia tem a dizer sobre a natureza do campo eletromagnético? O trabalho de Heisenberg virá pelo caminho (i), de modo que faremos apenas comentários muito breves sobre o caminho (ii).

Einstein foi um dos primeiros físicos a seguir o caminho (ii), ao defender que o trabalho de Planck implicava uma discretização da energia do campo eletromagnético. Einstein havia empregado, por volta de 1905, ferramentas de mecânica estatística para defender que o movimento browniano poderia ser compreendido apenas se aceitarmos a natureza discreta da matéria: o movimento estocástico de uma partícula em suspensão em um fluido decorre de colisões com as moléculas que constituem o fluido. No início do século XX, ainda não era consenso entre os físicos que a matéria teria uma estrutura discreta composta por átomos e moléculas, de tal modo que o estudo do movimento browniano foi um dos fenômenos que fizeram essa concepção se tornar consensual. Não é surpreendente que Einstein, após ter defendido a discretização da matéria, fosse também o primeiro a abraçar a ideia de uma radiação discretizada em *quanta* de energia. É razoável supor que a aceitação da existência dos átomos contribuiu, desse modo, para o avanço do caminho (i), ao qual retornamos agora.

⁷ Para sermos mais precisos, destacamos que o campo eletromagnético pode ser escrito como uma superposição de osciladores harmônicos com vetores de onda $\mathbf{k}$ e polarização σ . O número de osciladores com frequência entre ν e $\nu + d\nu$ é dada por $2d^3\mathbf{k} = 8\pi k^2 dk \propto \nu^2 d\nu$, na qual o fator 2 multiplicando $d^3\mathbf{k}$ se refere ao número de graus de liberdade de polarização. Cada oscilador possui, pelo teorema de equipartição de energia, energia média $k_B T$ em contato com o banho térmico e, portanto, a energia média entre $\nu + d\nu$ é proporcional a ν^2 , que corresponde à lei de Rayleigh-Jeans.

Para nossa narrativa, após o *quantum* de energia de Planck, o próximo passo revolucionário na rota que levaria ao artigo de Heisenberg de 1925 foram os trabalhos de Niels Bohr sobre a emissão de radiação por átomos, publicados a partir de 1913 [30, 31]. No início do século XX, havia uma grande quantidade de dados empíricos que demonstravam que cada elemento químico emitia radiação em frequências bem definidas, conhecidas como linhas espectrais. O conjunto de linhas espectrais constituía uma assinatura própria, uma vez que cada elemento químico possuía um conjunto distinto dos demais. Foi com base nas linhas espectrais presentes na radiação vinda do sol que o gás nobre Hélio foi identificado pela primeira vez. A regularidade nas linhas espectrais dos elementos permitiu o desenvolvimento de fórmulas empíricas para as frequências emitidas. Exemplos famosos são as séries de Balmer e de Paschen para o átomo de Hidrogênio. Todas as tentativas clássicas falharam em conceber um modelo de átomo capaz de prever as linhas espectrais e as fórmulas empíricas. Deixaremos para a próxima seção uma análise mais detalhada do caminho que levou Bohr a encontrar uma saída quântica para esse dilema. Nesta seção, comentamos apenas brevemente que a revolução bohriana consistiu na percepção de que o *quantum* de energia emitido no processo de radiação atômico vem de uma transição quântica. Isso difere do contexto clássico, em que o movimento de uma partícula carregada em uma órbita determina a radiação emitida. Na mecânica quântica, a radiação se dá pela transição de uma partícula carregada de uma órbita atômica para outra, o que se convencionou chamar de salto quântico⁸. Embora a linguagem e a notação do trabalho original de Bohr fossem se transformar profundamente ao longo dos anos, o papel central das transições quânticas permanece inquestionável até hoje.

Após os trabalho de Bohr de 1913, a pesquisa sobre a teoria quântica do átomo se dividiu em dois programas de pesquisa razoavelmente independentes: um buscava aprimorar o modelo de Bohr no cálculo das frequências presentes, a fim de obter um melhor acordo entre teoria e experimento no caso de átomos com vários elétrons; o outro buscava modificar e generalizar a abordagem de Bohr, a fim de não apenas prever as frequências emitidas, mas ser também capaz de prever outros aspectos, em particular a intensidade da radiação emitida e sua polarização.

O primeiro programa de pesquisa se valeu da enorme precisão das medidas espectroscópicas disponíveis na época. O modelo de Bohr original contemplava apenas um grau de liberdade, que era o único caso que se sabia quantizar segundo o procedimento de Planck. Isso

⁸ Uma primeira noção de salto quântico apareceu no trabalho de Planck de 1912 em que ele propôs sua segunda teoria da radiação de corpo negro [32]. Nessa teoria, o oscilador harmônico material que compõe o corpo negro teria uma probabilidade de perder instantaneamente toda a sua energia. Para uma apresentação dessa teoria, veja [33, pp. 9–11]. Para uma análise histórica, veja [28, pp. 235–254].

restringia Bohr a uma órbita circular, na qual a única variável é o ângulo descrito durante o movimento.⁹ Assim, esse programa buscou levar em conta novos graus de liberdade, a fim de melhorar o acordo entre teoria e experimento. Um dos sucessos iniciais foi o esquema de quantização de Bohr-Sommerfeld [35], que foi empregado por Heisenberg nas aplicações apresentadas em seu artigo de 1925. Após 1925, esse esquema deixaria de ser usado, dando lugar aos procedimentos de quantização apresentados por Born, Jordan e Paul Dirac, aos quais voltaremos na seção 7.

Se, por um lado, a extensão trazida pela quantização de Bohr-Sommerfeld permitiu que a todos os graus de liberdade de movimento clássicos fossem associadas regras de quantização específicas, por outro lado, esse primeiro programa proveu resultados ainda mais surpreendentes ao permitir que graus de liberdade sem nenhum paralelo clássico emergissem pela primeira vez. Esse foi o caso do spin do elétron, fundamental para compreender a influência nas linhas espectrais de um campo magnético externo aplicado nos átomos, conhecido como efeito Zeeman [36, 37].^{10,11}

O segundo programa de pesquisa, por sua vez, desembocaria diretamente no trabalho de Heisenberg de 1925. Uma das grandes dificuldades para generalizar o trabalho de Bohr estava em sua atitude híbrida em relação à teoria clássica: em certos momentos, ele empregava argumentos clássicos; em outros momentos, ele propunha romper com argumentos clássicos. Isso era decorrente do fato de que a comunidade de físicos ainda não tinha chegado a princípios quânticos bem definidos, conforme mencionamos na seção anterior. O fato das frequências das linhas espectrais apresentarem regularidades tornou possível que leis empíricas fossem derivadas. Isso permitiu que Bohr, em uma das intuições mais frutíferas do século XX, pudesse obter um princípio geral que derivasse essas leis por meio de transições quânticas, conforme discutiremos na próxima seção. Contudo, outras grandezas físicas como a intensidade ou a polarização das linhas espectrais não apresentavam uma regularidade tão marcante. Como estender para elas o sucesso do novo modelo atômico?

Ironicamente, a estratégia que se mostrou mais frutífera se baseava no sucesso da teoria clássica. Bohr observou que há uma região do espectro atômico na

qual as linhas espectrais se tornam muito densas, tendendo, em um certo limite, ao contínuo. Portanto, a teoria quântica deveria, de algum modo, recair na teoria clássica. Dessa forma, era possível, nesse limite, empregar o eletromagnetismo clássico, desaparecendo assim a noção de transição. Em termos de sua teoria, que atribuía números quânticos para as órbitas possíveis, isso significava que no limite de números quânticos grandes (isto é, para órbitas atômicas muito externas) as frequências de transição eram proporcionalmente muito pequenas. Dessa forma, as duas órbitas envolvidas na transição tendiam a ficar infinitesimalmente próximas, podendo ser tratadas como sendo uma única trajetória. As equações de Maxwell eram, então, utilizadas para obter resultados quantitativos precisos e completos para a radiação emitida. Tal procedimento ficou conhecido como *princípio da correspondência*.¹² Ele se tornou um dos principais guias para o desenvolvimento da teoria quântica, enquanto não se dispunha de uma formalismo consistente plenamente desenvolvido. Ainda hoje, de um ponto de vista conceitual, é interessante analisar, em certos casos, o limite de grandes números quânticos, explorando o limite entre a mecânica quântica e a mecânica clássica [46].¹³ Podemos, então, compreender como esse segundo programa levou ao trabalho de Heisenberg de 1925.

Antes, façamos uma breve digressão sobre o eletromagnetismo no século XIX.¹⁴ A percepção de que a luz era uma onda eletromagnética ressignificou diversos aspectos da interação entre luz e matéria. Entre outros exemplos, podemos citar a reflexão e a refração da luz. Embora os ângulos de reflexão e refração fossem conhecidos há muito e houvesse princípios ópticos gerais que permitiam demonstrá-los, como o princípio de Fermat, a unificação do eletromagnetismo e da óptica permitiu que Augustin Fresnel deduzisse a intensidade e a polarização da luz que era refletida e transmitida. A expressão obtida dependia da grandeza que caracteriza os materiais na teoria óptica: seu índice de refração. Conforme observações sobre o arco-íris e a incidência da luz em prismas evidenciavam, o índice de refração é função da frequência da luz incidente, fazendo com que o ângulo de refração varie a depender da cor, de modo que uma luz branca incidente em um material pode dispersar suas diferentes componentes de Fourier. Na óptica, o índice de refração é definido como sendo a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade de

⁹ Esse ponto é discutido de modo bastante interessante por Louis de Broglie [34].

¹⁰ Para uma análise histórica dos desenvolvimentos que levaram ao conceito de spin, ver [12, 38, 39].

¹¹ Vale mencionarmos um desdobramento posterior desse mesmo programa de pesquisa: a observação de uma quebra de degenerescência do átomo de hidrogênio devido ao seu acoplamento com o campo eletromagnético no estado de vácuo. Willis Lamb e Robert Retherford detectaram esse efeito em 1947 empregando espectroscopia de microondas [40]. A primeira explicação teórica, que utiliza o conceito de renormalização de massa, foi apresentada por Hans Bethe no mesmo ano, sendo um dos marcos centrais no desenvolvimento da eletrodinâmica quântica [41, 42].

¹² Uma primeira formulação do princípio da correspondência aparece já nos primeiros trabalhos de Bohr de 1913 e 1914 [30, 43], mas somente foi colocado na forma de um *princípio* por ele entre 1918 e 1923 [31, 44]. Para uma história do princípio da correspondência, ver [4, 5, 45].

¹³ Após o desenvolvimento da mecânica quântica, ficou claro, em retrospectiva, que não eram as equações de Maxwell que deixavam de ser válidas para números quânticos baixos, mas sim a concepção de que o elétron pode ser pensado como um objeto puntiforme em uma trajetória clássica bem definida.

¹⁴ Para uma discussão mais detalhada, ver [19, 47, 48].

propagação da luz no material (entrando aqui a dependência com a frequência). Da perspectiva de constantes fundamentais, a unificação eletromagnetismo-óptica se processa a partir da constatação de que a velocidade da luz no vácuo pode ser escrita em termos de variáveis eletromagnéticas: a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo. Da mesma forma, em um meio material, a velocidade de propagação de uma onda luminosa com uma dada frequência é determinada pela permissividade elétrica e pela permeabilidade magnética do material nessa frequência. Isso permite estabelecer um modelo eletromagnético para a resposta óptica dos materiais ao estabelecer a função índice de refração $n(\omega)$. A chamada teoria da dispersão óptica se propõe a fornecer modelos mecânicos para essas funções resposta dos materiais. O ápice desse projeto foi o chamado modelo de Lorentz. Após a descoberta do elétron, a partir do trabalho de Joseph John Thomson em 1897, Lorentz percebeu que essa nova partícula poderia ser a base para uma compreensão mecânica do fenômeno da dispersão óptica. Um campo eletromagnético incidente em um material produz um deslocamento das cargas com relação à situação de equilíbrio, levando ao surgimento de forças internas que buscam restaurar o equilíbrio. Em outras palavras, Lorentz reconheceu a existência de osciladores harmônicos na resposta eletromagnética dos materiais. O índice de refração podia ser escrito em termos de grandezas mecânicas fundamentais da matéria. A intuição de Lorentz foi tão frutífera que, com mínimas modificações na linguagem e notação, ainda é amplamente usada até os dias de hoje. Tal modelo permite uma compreensão da dispersão de ondas eletromagnéticas [49] e uma boa primeira descrição para a resposta óptica dos materiais [50, 51].

Voltemos agora ao segundo programa, a fim de compreendermos como ele levou ao trabalho de Heisenberg de 1925. No início dos anos 1920, Kramers e outros físicos buscavam uma teoria quântica da dispersão óptica, ou seja, um modelo mecânico para a dispersão óptica baseado na teoria quântica. Em um artigo intitulado “A lei da dispersão e a teoria de Bohr dos espectros”, publicado em 1924, Kramers reobteve, por meio do princípio da correspondência, uma expressão formalmente idêntica à expressão de Lorentz, mas agora em termos de grandezas quânticas [52]. Meses depois, Heisenberg se juntou a Kramers a fim de explorarem os desdobramentos da teoria da dispersão de Kramers, resultando em um longo artigo enviado para publicação em janeiro de 1925 [53].¹⁵ Nesse trabalho, os autores obtiveram uma expressão que hoje é conhecida como fórmula de Kramers-Heisenberg, a partir da qual se obtém a seção de choque quântica para o espalhamento da luz por um elétron em um átomo. Esses trabalhos de Kramers, bem como outros desenvolvimentos da teoria quântica da dispersão óptica conduzidos por Born e

Jordan [54, 55], foram as primeiras referências citadas por Heisenberg em seu artigo de 1925. Heisenberg afirma que esses trabalhos de Kramers, Born e Jordan constituem “as mais importantes primeiras abordagens” (“*die wichtigsten ersten Ansätze*”) [1, p. 880] na direção de construir uma teoria quântica que lidasse somente com quantidades observáveis. Ele argumentará que esse é o caminho pelo qual a teoria quântica deveria seguir, conforme discutiremos na seção 6.¹⁶

Parte das novidades trazidas por Heisenberg em julho de 1925 já pode ser encontrada no artigo de Kramers e Heisenberg de janeiro de 1925. Heisenberg, entretanto, soube isolar, de maneira clara e sucinta, as ideias que, programaticamente, se tornariam os elementos centrais da nova mecânica quântica. Enquanto o trabalho de Heisenberg com Kramers versava sobre o espalhamento da luz, Heisenberg formulou sua proposta diretamente no contexto do problema da emissão. Em linguagem moderna, dizemos que o espalhamento da luz é um processo de segunda ordem, uma vez que sua descrição quântica requer duas transições: a absorção da luz incidente no átomo provocando sua excitação seguida da emissão de luz concomitante ao retorno do átomo para o estado original.¹⁷ A emissão de luz, por sua vez, é um processo de primeira ordem, requerendo apenas uma única transição quântica. Todo o desenvolvimento que levou do trabalho de Bohr, em 1913, até de Kramers com Heisenberg, em 1925, consistiu, na prática, em estender o procedimento de Bohr de um salto quântico para dois saltos quânticos, mediados por uma transição interna. A composição de dois saltos é, na prática, uma composição matricial. Portanto, em retrospecto, podemos identificar na teoria quântica da dispersão óptica de Kramers e Heisenberg, de janeiro de 1925, a primeira multiplicação matricial da teoria quântica, que prenunciou a mecânica matricial, que viria a ser proposta por Heisenberg em julho de 1925 e consolidada por Born e Jordan em setembro do mesmo ano.¹⁸ Argumentaremos, nas próximas seções, que a acrobacia de Heisenberg foi, ironicamente, desfazer a necessidade deste segundo salto e apresentar – ainda que sem reconhecer explicitamente – uma formulação matricial para processos de emissão. Metaforicamente, podemos dizer que Heisenberg, ao retornar ao problema da emissão, realizou, ele próprio, um salto para trás, empurrando assim a mecânica quântica para frente.

Nossa motivação, ao enfatizarmos essa leitura do trabalho de Heisenberg, não é somente histórica, mas também educacional. O caminho percorrido por Heisenberg

¹⁶ As citações dos artigos de Heisenberg, Born e Jordan foram feitas diretamente a partir dos originais [1]. Sempre que a escolha de palavras de Heisenberg nos parece relevante, incluímos o texto original em alemão. A tradução para a língua inglesa (disponível em [2, pp. 261–276]) possui algumas imprecisões, mas pode ser utilizada para consulta.

¹⁷ Essa excitação ocorre por um breve período de tempo, sendo inobservável e, por isso, é denominada virtual. Para uma história das partículas virtuais, ver os artigos [56, 57] e suas referências.

¹⁸ Esse argumento foi defendido por Erik Rüdinger, conforme observa [11, p. 6].

¹⁵ Uma tradução desse artigo para a língua inglesa pode ser encontrada em [2, pp. 223–252].

no processo de desfazer o segundo salto é demasiadamente tortuoso. Mostraremos que é possível chegar aos mesmos resultados por uma rota muito mais direta, partindo do artigo de Bohr de 1913, que lidava justamente com processos de emissão. Acreditamos que o trabalho de Bohr, se adequadamente lido, contém todos os elementos necessários para a construção de uma nova mecânica baseada em matrizes, e foi isso que Heisenberg, Kramers, Born, Jordan e outros perceberam, por um caminho longo e tortuoso. Há, portanto, uma relação umbilical entre a gênese da mecânica matricial e a profunda revolução conceitual trazida por Bohr, motivo pelo qual dedicaremos a próxima seção a essa revolução.

3. Niels Bohr e os Saltos Quânticos

Duas propriedades do espectro de emissão atômica eram observadas experimentalmente:

- (A) Cada elemento emite apenas em certas frequências discretas.¹⁹
- (B) Toda frequência emitida por um átomo é dada pela soma ou pela diferença de outras duas frequências emitidas pelo mesmo átomo.

A propriedade (B) é conhecida como como lei de combinação de Ritz.²⁰ Ela resume em uma afirmação o conteúdo físico das leis empíricas de Balmer e Paschen mencionadas na seção anterior.

A questão central, que se colocava desde o início do século XX, era desenvolver um formalismo teórico capaz de explicar essas duas propriedades das linhas espectrais, bem como determiná-las quantitativamente. Propor um modelo clássico que satisfizesse (A) era relativamente simples. Muitos fenômenos ondulatórios clássicos são discretizados em virtude de condições de contorno impostas na fronteira, como, por exemplo, uma corda vibrante presa em ambos os extremos ou uma onda sonora nas cavidades de diversos instrumentos musicais.

O modelo atômico proposto por Thomson no final do século XIX poderia dar conta da propriedade (A). Nele, elétrons estariam encrustados em um fundo positivo de cargas, motivo pelo qual esse modelo ficou conhecido como modelo do pudim de passas. Poderíamos pensar que o espectro discreto da emissão de radiação advém da vibração harmônica dos elétrons em torno de suas posições de equilíbrio. Contudo, o modelo do pudim de passas não resistiu às partículas alfa que Rutherford jogou sobre ele, sendo incapaz de explicar o padrão de espalhamento observado experimentalmente. Rutherford notou que a maior parte das partículas alfa passava sem qualquer desvio, enquanto algumas poucas eram defletidas significativamente, indicando que o átomo deveria

ser constituído por um núcleo pequeno e carregado positivamente, em torno do qual haveria muito espaço vazio. Assim, as partículas alfa, também carregadas positivamente, poderiam ser retro-espalhadas caso passassem suficientemente próximas de algum núcleo. Porém, na maior parte das vezes as partículas alfa passavam em regiões bem vazias e a repulsão do núcleo era fraco o bastante para não produzir qualquer desvio significativo. Isso levou Rutherford a propor um modelo planetário para a constituição atômica: elétrons orbitavam um núcleo diminuto e positivo, deixando imensas regiões vazias.

Novamente, poderíamos imaginar que as frequências de revolução do elétron em torno do núcleo seriam responsáveis pela discretização do espectro de emissão atômica, potencialmente explicando a propriedade (A). Todavia, o modelo de Rutherford padecia de um problema fundamental: cargas elétricas aceleradas emitem radiação, de modo que o modelo implicaria um átomo instável.²¹ No entanto, independentemente das patologias presentes nos modelos de Thomson e de Rutherford, ambos eram incapazes de explicar a propriedade (B). De fato, embora seja fácil explicar a propriedade (A) com modelos puramente clássicos, ao fazê-lo, na prática, nos afastamos da possibilidade de explicar a propriedade (B). Isso porque classicamente a radiação emitida é determinada pela função movimento da partícula carregada $\mathbf{r}(t)$. Para analisar as frequências produzidas, convém analisar a função posição no espaço de Fourier. A discretização do espectro de emissão sugere movimentos periódicos, como em um oscilador harmônico, no caso do modelo de Thomson, e em um movimento circular uniforme, no caso do modelo de Rutherford. Para um movimento periódico de período T , os modos de Fourier presentes são múltiplos do harmônico fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$, o que nos permite escrever²²

$$\mathbf{r}(t) = \sum_n \tilde{\mathbf{r}}_n e^{in\omega_0 t}, \quad (1)$$

onde n é um número inteiro e $\tilde{\mathbf{r}}_n$ denota o coeficiente de Fourier da função posição associado à frequência $\omega_n = n\omega_0$. Assim, um movimento periódico seria responsável pela produção apenas de linhas espectrais associadas a frequências que são múltiplas de um harmônico fundamental.²³ Podemos, claro, ter diferentes famílias de

²¹ É importante destacar a importância das escalas numéricas envolvidas. Se o tempo de decaimento fosse muito longo, isso não invalidaria o modelo. Ocorre que a radiação por cargas aceleradas era bem entendida desde o final do século XIX e uma estimativa rápida conduz a um tempo de decaimento curtíssimo. Usando o valor de $1\text{ \AA}$ para o raio atômico, o tempo de decaimento obtido é da ordem de 1 nanosegundo, descartando o modelo de Rutherford como um modelo viável para a estrutura atômica.

²² Atualmente, a comunidade de física costuma utilizar a convenção com sinal contrário para decomposições de Fourier com relação à variável temporal, inserindo um sinal negativo no expoente da equação (1). Neste artigo, optamos por seguir a convenção de sinal adotada por Heisenberg.

²³ Como ocorre, por exemplo, em instrumentos musicais de cordas e de sopro.

¹⁹ As frequências de emissão coincidem com as de absorção. Vamos nos referir sempre à emissão, porém a discussão pode ser imediatamente adaptada para a absorção.

²⁰ Essa lei começou a ser sistematicamente empregada por Walter Ritz a partir de 1908 [59, p. 96].

movimentos periódicos possíveis, fazendo com que as linhas espectrais sejam constituídas por múltiplos de um conjunto de frequências $\{\omega_0^{(1)}, \omega_0^{(2)}, \dots\}$, no qual o índice superior indica a família associada a cada frequência fundamental. No entanto, isso seria incapaz de capturar a complexidade presente na propriedade (B), a qual explicita uma conexão entre as famílias de harmônicos.

Bohr percebeu que o processo de emissão só poderia ser explicado, de forma compatível com (B), se envolvesse duas órbitas atômicas. Ou seja, a emissão de radiação por um átomo não deve ser função de uma órbita, deve ser função de *um par de órbitas*. Essa é a essência do átomo de Bohr. Assim, enquanto classicamente a radiação era determinada pela dependência temporal da função movimento, na teoria quântica a frequência passa a ser determinada pela transição de uma órbita para outra, ou seja, de um salto quântico. A fim de implementar essa ideia, Bohr postulou que apenas certas órbitas são permitidas, o que leva imediatamente à discretização das linhas espectrais, dando conta de explicar a propriedade (A).

Para evitar a instabilidade que existia no modelo de Rutherford, Bohr postulou que o elétron em uma dada órbita não perde energia por radiação, em flagrante contraste com as leis do eletromagnetismo. Esse passo, por vezes, é considerado a parte mais polêmica de seu trabalho, ainda que, conforme mencionamos acima, a verdadeira ruptura com a teoria clássica esteja no processo de emissão de radiação por meio de saltos quânticos.²⁴

Dessa forma, pela primeira vez, surgiu um modelo atômico capaz de explicar a propriedade (B). Bohr afirmou que a troca de energia com o campo eletromagnético se dá apenas quando o elétron sofre uma transição de uma órbita para outra. Para o elétron saltar de uma órbita de frequência ω_m para uma mais externa (isto é, mais longe do núcleo) de frequência ω_n , o átomo deve absorver radiação de frequência

$$\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n. \quad (2)$$

Para o processo inverso, ao transitar da órbita de frequência ω_n para a órbita mais interna, de frequência ω_m o átomo deve emitir radiação de frequência $\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$. Para perceber como tal esquema explica a propriedade (B), consideremos, além das órbitas m e n , também uma órbita r de frequência ω_r . Supomos que esta seja a órbita mais externa, de modo que $\omega_r < \omega_n < \omega_m$. Nesse caso, o átomo pode absorver

radiação de frequência $\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$ para ir da órbita m para a órbita n e radiação de frequência $\omega_{nr} = \omega_n - \omega_r$ para ir da órbita n para a órbita r . É possível, também, absorver radiação de frequência $\omega_{mr} = \omega_m - \omega_r$ para ir diretamente da órbita m para a órbita r . Combinando ambas as expressões,

$$\omega_{mr} = \omega_{mn} + \omega_{nr}. \quad (3)$$

Supondo que $\omega_n < \omega_r < \omega_m$, temos $\omega_{mr} = \omega_{mn} - \omega_{rn}$. Portanto, se a linha de frequência ω_{mr} está presente no espectro, ela deve corresponder à soma ou à diferença de outras duas linhas também presentes, que é exatamente o que afirmava a propriedade (B).

É impossível superestimar a importância e o caráter revolucionário da lei de combinação (3). Ela permanece, até hoje, como uma das características centrais da mecânica quântica, sem paralelo algum na física clássica.²⁵ Essa lei é fruto da profunda intuição física de Bohr ao examinar os espectros atômicos. Conforme veremos a seguir, ao explorarmos a rota inaugurada por essa lei aparentemente simples, somos levados à formulação matricial da mecânica quântica.

4. A Busca de Uma Teoria Quântica Sistemática

A teoria proposta por Bohr foi capaz de explicar as propriedades do espectro de emissão atômica, derivando as séries espectrais conhecidas para o átomo de hidrogênio e indicando um caminho para lidar com outros átomos. Restavam, porém, diversos problemas conceituais, tais como a aparente violação do eletromagnetismo e a incapacidade de descrever intensidade e polarização das linhas espectrais. Iniciou-se, assim, a busca por uma teoria quântica capaz de lidar, de modo geral, com qualquer sistema físico, sem recorrer a soluções *ad hoc*. Diante desses problemas, duas atitudes teóricas bastante distintas foram adotadas pela comunidade de físicos.

Um grupo buscou dar prosseguimento ao rompimento com a física clássica, introduzindo novos entes teóricos. Essa foi a atitude de Louis de Broglie, que propôs a ideia de que toda entidade quântica apresentaria aspectos duais entre o que classicamente conhecemos por onda ou por partícula. Essa atitude culminou no trabalho de Erwin Schrödinger, que encontrou a dinâmica satisfeita por esta onda de matéria, que hoje denotamos por ψ e chamamos de função de onda, um conceito sem qualquer paralelo na clássica. A noção de função de onda superou uma das limitações do modelo de Bohr, a saber, a representação do elétron

²⁴ Modernamente não há nenhuma contradição com as equações de Maxwell, que seguem válidas na escala atômica. Não podemos contudo pensar o elétron como uma partícula puntiforme mas sim como uma distribuição contínua de carga distribuída em orbitais atômicos. Ainda que ponto a ponto tenhamos cargas aceleradas, há uma interferência destrutiva do campo de radiação fazendo com que nenhuma radiação seja emitida. Há análogos clássicos diretos para isso. Qualquer corrente estacionária, de formato arbitrário, envolve cargas aceleradas mas não produz radiação alguma.

²⁵ Hoje, é mais comum falarmos em energia do que em frequência. Um estado com energia E evolui temporalmente de forma periódica com frequência satisfazendo $E = \hbar\omega$, onde $\hbar = h/(2\pi)$. Em linguagem atual, dizemos que a troca de energia entre sistemas quânticos se dá pela transição quântica entre diferentes estados de energia.

como uma partícula puntiforme em uma órbita bem definida. Em linguagem moderna, dizemos que temos uma distribuição contínua de carga ou, conforme será interpretado posteriormente por Born, uma distribuição contínua de probabilidade, de forma que o elétron não possui posição bem definida. Assim, não há contraste algum com a teoria eletromagnética. Afinal, na teoria eletromagnética clássica, há distribuições contínuas com cargas aceleradas que não emitem radiação, como as correntes elétricas estacionárias que produzem apenas um campo magnetostático ou cargas oscilando radialmente em uma distribuição esfericamente esférica, cujo campo fora da distribuição de carga é apenas o campo de Coulomb com a carga total colocada no centro de simetria (como pode ser demonstrado diretamente pela lei de Gauss) [58].

Um segundo grupo, do qual Heisenberg foi o principal expoente, buscou reinterpretar, na teoria quântica, as grandezas clássicas já conhecidas, conforme fica claro desde o título de seu artigo de 1925: “Sobre a reinterpretação teórico-quântica das relações cinemáticas e mecânicas”. Assim, passamos agora a uma análise detalhada do trabalho de Heisenberg, primeiro por meio de uma reconstrução didática e posteriormente por meio de uma leitura atenta do artigo de 1925.

5. Uma Apresentação Didática da Mecânica Matricial

Como Heisenberg enfatiza desde o início de seu artigo, devemos buscar uma teoria que diga respeito somente a grandezas físicas observáveis. A posição do elétron e a frequência de cada órbita não são grandezas diretamente observáveis e devem, segundo ele, ser evitadas pela teoria quântica. A frequência da radiação emitida pelo elétron, por sua vez, é uma grandeza observável. Ela aparece na quântica descrita por dois índices, como vimos na seção 3.

Ao lidarmos com frequências, o mais natural é trabalharmos no espaço de Fourier. Classicamente, adaptando a expressão (1) ao caso de uma órbita discreta m , escreveríamos²⁶ a posição como função do tempo na forma

$$x_m(t) = \sum_k \tilde{x}_k^{(m)} e^{ik\omega_0^{(m)}t}. \quad (4)$$

Em outras palavras, temos uma expansão em Fourier para *cada órbita*. Como reinterpretar a posição para que ela tenha sentido dentro da nova mecânica quântica? Se somente as transições são observáveis, devemos abrir

mão de falar em posição ao longo de cada órbita. Em seu lugar, buscaremos escrever a posição como função de um par de órbitas. Dessa forma, passamos a pensar na posição como também associada a uma transição. Assim como para a frequência ω_{mn} foram necessários dois índices para descrever a transição $m \rightarrow n$, será que não podemos pensar também em como a posição conecta diferentes órbitas? Ou seja, não deveria ter a posição também dois índices?²⁷ Claro que essa nova grandeza física pouco se parece com aquilo que chamamos de posição na teoria clássica. Por isso que Heisenberg emprega o termo “reinterpretação” (“*Umdeutung*”) no título de seu artigo.

Representaremos grandezas na quântica por letras maiúsculas, para diferenciá-las das clássicas. Se dois índices são necessários, buscaremos uma notação que reflita esse fato. Assim, denotaremos a posição por X_{mn} , explicitando desde aqui o caráter matricial das grandezas físicas e consumando a reinterpretação proposta por Heisenberg. Essa não foi – conforme mencionamos anteriormente e retornaremos mais adiante – a notação empregada por Heisenberg. Por ora, continuemos nossa análise.

A dependência temporal de cada componente de Fourier do movimento clássico evolui temporalmente com os múltiplos da frequência fundamental determinada pela órbita em questão, como consta na decomposição (4). Da mesma forma, esperamos que X_{mn} evolua no tempo com a frequência dos estados que conecta, que é a única frequência da radiação observada na transição,

$$X_{mn}(t) = X_{mn}(0)e^{i\omega_{mn}t}. \quad (5)$$

Heisenberg afirma que a composição de Fourier para a posição satisfaz a mesma lei de combinação (3). Para tanto, ele analisa em detalhe o comportamento do quadrado da posição, $X^2(t)$. Lembremos que o produto de duas matrizes A e B é dado pela matriz C cujas componentes são $C_{mr} = \sum_n A_{mn}B_{nr}$. Assim, o elemento mr de X^2 é

$$\begin{aligned} X_{mr}^2(t) &= \sum_n X_{mn}(t)X_{nr}(t) \\ &= \sum_n X_{mn}(0)X_{nr}(0)e^{i(\omega_{mn}+\omega_{nr})t} \\ &= \left(\sum_n X_{mn}(0)X_{nr}(0) \right) e^{i\omega_{mr}t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Portanto, ao reconhecermos a posição como uma matriz, temos automaticamente satisfeita a lei de adição dos espectros dada por (3). Esse feito mostra que a combinação encapsulada na expressão (3) nada mais é do

²⁶ Assim como feito por Heisenberg, para não sobrecarregar a notação, descreveremos o movimento com um único grau de liberdade, mas o tratamento é imediatamente generalizável substituindo x pelo vetor posição. O caso não-periódico é obtido ao trocar o somatório por uma integração em $d\omega$. Heisenberg destaca esse ponto em seu artigo, mas isso não afeta de forma significativa nenhum resultado e, portanto, usaremos somente o somatório.

²⁷ Uma ideia que hoje consideramos muito natural, sem nos darmos conta, por vezes, do quanto ela foi revolucionária. Atualmente, representamos essa ideia matematicamente por meio do elemento de matriz $X_{mn} := \langle m|\hat{X}|n\rangle$, onde $\hat{X}$ é denominado operador posição.

que a decomposição de Fourier associada ao produto de matrizes e não ao produto de funções clássicas. Pensando em retrospecto, a lei de combinação (3) é formalmente a regra de produto de matrizes, exceto pelo fato de que ali figura uma soma em vez de um produto. A exponencial faz exatamente o papel de converter a soma em produto. Não teríamos nada parecido se partíssemos da função clássica dada pela decomposição (4). Afinal,

$$x_m^2(t) = \sum_{k,l} \tilde{x}_k^{(m)} \tilde{x}_l^{(m)} e^{i(k+l)\omega_0^{(m)}t}, \quad (7)$$

isto é, a composição de Fourier clássica não mistura órbitas distintas, o que está intimamente ligado ao fato de a teoria clássica do átomo ser incapaz de explicar a propriedade (B) dos espectros atômicos.

Esperamos, com esta seção, ter explicado como é possível ler no trabalho de Bohr a reinterpretação das grandezas cinemáticas proposta por Heisenberg. Na próxima seção, mostraremos que as ideias apresentadas acima estão presentes no artigo de Heisenberg de 1925 em meio a notações, exemplos e interpretações que ofuscaram o conteúdo físico de sua teoria, motivo pelo qual somente com Born e Jordan esse conteúdo foi plenamente apreciado.

6. O Artigo de Heisenberg de 1925

Nesta seção, discutiremos em que medida a explicação didática apresentada acima reproduz os aspectos conceituais e inovadores essenciais do artigo de Heisenberg. O fio condutor do artigo é uma análise da composição espectral para o produto dos objetos matemáticos que representam as grandezas físicas. Heisenberg argumenta que a composição quântica contrasta com a composição clássica. Essa proposta eleva a lei da combinação de Ritz a um novo patamar: não se trata meramente de uma regularidade apresentada pelas linhas espectrais, mas um princípio fundamental que opera na composição de Fourier das próprias grandezas físicas. Isso fica claro nas igualdades que Heisenberg escreve ao final da terceira página de seu trabalho:

$$\nu(m, \alpha) + \nu(m, \beta) = \nu(m, \alpha + \beta) \quad (\text{clássica}) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nu(m, m - \alpha) + \nu(m - \alpha, m - \alpha - \beta) \\ = \nu(m, m - \alpha - \beta) \quad (\text{quântica}) \end{aligned} \quad (9)$$

A composição (7) nada mais é do que um caso particular da composição clássica acima, na qual m indica a órbita e α e β são componentes de Fourier presentes na expansão de Fourier de $x(t)$, como dado na decomposição (4). A composição clássica não mistura órbitas. As frequências que figuram no produto de duas grandezas clássicas, por exemplo em x^2 , é a soma das frequências presentes em cada expansão, mas sempre para o mesmo m . Já a igualdade (6) exemplifica a composição quântica de Heisenberg, onde $m - \alpha = n$ e $m - \alpha - \beta = r$ na nossa notação. Heisenberg afirma que “esse tipo de composição

decorre quase inevitavelmente [a partir] das relações de combinação das frequências” [1, p. 883].

Destacamos também que Heisenberg usa uma linguagem que viria a perder o sentido posteriormente, com o trabalho de Born e Jordan. Quando ele escreve as expressões (8) e (9), fica subentendido que há uma forma diferente de realizar expansões de Fourier na clássica e na quântica, quando isso não é de forma alguma verdade. O que é denominado regra de composição “clássica” na expressão (8) é, na realidade, uma composição dos coeficientes de Fourier para o produto de duas funções que a cada instante do tempo fazem associar, cada uma, um número real. O que é denominado regra de composição “quântica” na expressão (9) é na realidade uma composição dos coeficientes de Fourier para o produto de duas funções que a cada instante do tempo fazem associar, cada uma, uma matriz. Foi isso que Born e Jordan identificaram no artigo de Heisenberg, iniciando uma intensa reflexão que, em poucas semanas, colocaria a teoria quântica na forma como hoje a conhecemos.

A igualdade (5) não é explicitamente escrita por Heisenberg, mas está presente nas entrelinhas de seu artigo. Ele evita ao máximo falar diretamente sobre a posição de uma partícula. Ele se limita a atribuir dois índices à posição no espaço de Fourier. Sabendo que a decomposição de Fourier de uma matriz é uma matriz, não há como escapar do caráter matricial da própria posição, mas esse passo foi dado apenas por Born e Jordan.

Inicialmente, Heisenberg trata apenas da expansão em Fourier do campo eletromagnético, que é observável experimentalmente. Denotando o campo por U (novamente, usamos uma notação unidimensional, assim como Heisenberg, mas a generalização para o caso vetorial é imediata), as duas primeiras equações numeradas do artigo de Heisenberg são²⁸

$$U(m, m - \alpha) e^{i\omega(m, m - \alpha)t} \quad (\text{quântica}), \quad (10)$$

$$U_\alpha(m) e^{i\omega(m)\alpha t} \quad (\text{clássica}). \quad (11)$$

Novamente, onde está escrito clássica deve ser lido a componente de Fourier de uma função que a cada instante de tempo faz associar um número real, que classicamente é como descrevemos o campo eletromagnético (ou, ao menos, cada uma de suas componentes). A rigor, o campo possui também dependência espacial, que aqui está omitida, pois precisamos apenas do campo na posição do elétron. Frisamos, contudo, que nos referimos sempre à decomposição de Fourier relativa à variável temporal e nunca às variáveis espaciais.

²⁸ Heisenberg escreve a parte real das expressões (10) e (11). Isso é desnecessário, tendo em vista que a condição de que o campo seja real pode ser traduzida em condições impostas aos seus coeficientes de Fourier. Ou seja, basta exigir que $U_\alpha(m) = U_\alpha^*(m)$ na expressão (11) e uma relação análoga para a expressão (10). Como isso não afeta nenhum argumento que iremos desenvolver, optamos por não sobrecarregar a notação escrevendo a parte real das expressões (10) e (11).

O campo produzido pelo elétron classicamente na órbita $x(t)$ é obtido a partir da expressão (11), ao somarmos em todos os α possíveis. Como destacamos anteriormente, se o movimento for periódico, α assume valores em todos os números inteiros, uma vez que as frequências possíveis são os múltiplos da frequência fundamental, denotada aqui por $\omega(m)$ (em nossa notação da seção anterior, usamos $\omega_0^{(m)}$). Caso o movimento seja não-periódico, o campo deve ser escrito como uma integral em α (ou seja, uma transformada de Fourier inversa), algo que Heisenberg escreve posteriormente no artigo, porém isso não interfere em nada nos argumentos centrais do trabalho.

A expressão (10) nada mais é do que a versão para o campo de nossa igualdade (5), onde novamente temos $m - \alpha = n$ e $\omega(m, m - \alpha) = \omega_{mn}$. Mais uma vez, não há nada de quântico do ponto de vista matemático na expressão (10). Essa expressão é somente a decomposição de Fourier do elemento de matriz $(m, m - \alpha)$ do campo U . O que é, de fato, quântico é a ideia de que o campo deve ser representado por uma matriz, conforme está implícito no tratamento de Heisenberg ao utilizar dois índices, denotados por m e $m - \alpha$, para descrever o campo.

Se tivermos de escolher a passagem mais representativa do artigo de 1925, destacaríamos justamente a expressão (10), que por essa razão enfatizamos tanto na nossa seção anterior. Embora, do ponto de vista matemático, nossa igualdade (5) seja exatamente a expressão (10), salientamos que em nenhum momento Heisenberg escreveu algo que possa diretamente ser reconhecido como nossa igualdade (5) para a posição. Conforme mencionamos anteriormente, ele evita falar da posição de uma partícula. Para entender essa atitude, analisemos em mais detalhe a forma como ele organiza seu discurso no artigo (as citações a seguir se referem às páginas [1, pp. 879–881]).

Ele afirma, em seu parágrafo de abertura, que sérias objeções podem ser apresentadas a regras formais que se proponham a calcular “grandezas observáveis” (“*beobachtbarer Größen*”), tal como a energia do átomo de hidrogênio, utilizando grandezas que “aparentemente não podem, em princípio, ser observadas” (“*die scheinbar prinzipiell nicht beobachtet werden können*”), tais como a posição de um elétron e o período de sua órbita. Ele afirma que regras desse tipo “aparentemente carecem de um fundamento físico intuitivo (*anschauliche physikalische Fundament*)”, a menos que ainda se queira agarrar à esperança de que essas grandezas, que até agora têm sido inobserváveis, possam posteriormente ser tornadas acessíveis experimentalmente”. Porém, nesse ponto, ele argumenta que essa esperança somente seria justificada se as regras então existentes “fossem internamente consistentes e aplicáveis a uma gama claramente definida de problemas da teoria quântica”, o que não era o caso naquele momento. Apenas o átomo de hidrogênio e o efeito Stark pareciam ser corretamente analisáveis

com as regras existentes, sugerindo que aquela esperança seria infundada.

Confirmando essa expectativa, ele observa, algumas páginas depois, que “na teoria quântica, não foi possível associar [à posição d]o elétron um ponto no espaço como função do tempo por meio de grandezas observáveis”. Em seguida, ele pondera que na teoria quântica continua sendo possível “atribuir a um elétron uma [emissão de] radiação”, ainda que por meio de um processo distinto daquele encontrado na teoria clássica. Em seguida, ele se volta ao problema de emissão de radiação na teoria clássica. Nesse processo clássico, aparecem termos de multipolo que dependem de potências da função horária da posição do corpo puntiforme eletricamente carregado que gera o campo. Ele recorda que, no cálculo da emissão de radiação na teoria clássica, é conveniente escrever a posição em termos de sua decomposição de Fourier. Ele conclui, assim, que “pode-se perguntar como esses termos de ordem superior teriam que se apresentar na teoria quântica”.

Tendo em vista essa atitude geral acerca da teoria quântica e dos seus problemas, ele coloca a seguinte questão: “Dada uma grandeza quântico-teórica que substitui a grandeza clássica $x(t)$, qual grandeza quântico-teórica corresponde a $x^2(t)$?”. Ele enfatiza que essa é uma pergunta de “nada tem a ver com eletrodinâmica”, sendo de “natureza puramente cinemática” (“*rein kinematischer Natur*”), constatação essa que ele faz questão de afirmar que “parece particularmente importante”. Essa ênfase no aspecto cinemático justifica o título do seu artigo. Ele, então, propõe que expressões como x^2 ou x^3 sejam obtidas por meio da regra “quântica” dada por (9). Ao medir o campo eletromagnético e estudarmos as propriedades de sua composição de Fourier, entre as quais se destaca especialmente a lei da adição, podemos inferir algo sobre a decomposição de Fourier de grandezas como x^2 , mesmo sem diretamente falarmos na posição x . É importante enfatizarmos que Heisenberg, em momento algum, discute como o campo é gerado, o que demandaria uma análise dinâmica, possivelmente via equações de Maxwell. Ao enfatizar a distinção entre cinemática e dinâmica, ele se permite separar os dois problemas. A análise cinemática do campo e, portanto, da posição da partícula que gera esse campo é suficiente para enfatizar os aspectos fundamentais da nova teoria.

Empregar a composição de Fourier dada pela expressão (9) em x^2 é, na prática, considerar que x é uma matriz. Neste ponto, devemos examinar mais detalhadamente a sistemática empregada por Heisenberg. Embora, em nenhum momento, ele afirme o que é a posição do elétron em sua teoria, Heisenberg fundamenta todas suas aplicações no uso das equações diferenciais clássicas satisfeitas pela posição. Ou seja, a posição do elétron, *seja lá o que isso venha a significar*, está sujeita à mesma equação dinâmica de sua contraparte clássica. Apesar de ter enfatizado, desde o título do seu artigo, que seu empreendimento seria “cinemático”, ele precisa

de uma equação dinâmica, onde aparecerão grandezas como x^2 e x^3 . Curiosamente, Heisenberg considera aqui a equação dinâmica clássica, ou seja, a segunda lei de Newton para uma lei de força que tem a mesma forma da lei de força clássica. É impossível superdimensionar a importância que este passo teve para o programa matricial. Como pôde Heisenberg tomar um ponto de partida tão questionável? Se a própria noção clássica de posição de elétron era vista com suspeita por Heisenberg, por que tomar sua equação dinâmica como base? Para responder a esse questionamento, convém explicitarmos brevemente o caminho histórico que levou Heisenberg a seu trabalho.

O ponto de partida é o trabalho clássico de Lorentz para a dispersão óptica. Ele considerou que a resposta elétrica do material advém do movimento de elétrons. Por simplicidade, consideremos apenas um elétron, de carga e , massa m e com posição denotada por $\mathbf{r}(t)$. Na presença de um campo elétrico $\mathbf{E}(t)$, a segunda lei de Newton para o elétron é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (12)$$

No espaço de Fourier,²⁹ obtemos

$$\tilde{\mathbf{r}}(\omega) = \frac{e\tilde{\mathbf{E}}(\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (13)$$

Utilizando a expressão do dipolo elétrico, dada por $\tilde{\mathbf{p}}(\omega) = e\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$, obtemos que a constante que quantifica o dipolo induzido no material é dada por

$$\mathcal{K}_{\text{clas}} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (14)$$

Lorentz mostrou que essa constante está ligada diretamente ao índice de refração do material. Em seu trabalho de 1924 sobre a teoria da dispersão óptica, Kramers emprega o princípio da correspondência para estudar o efeito de um campo elétrico oscilante aplicado aos elétrons de um átomo. O principal resultado nesse trabalho foi justamente a reobtenção da fórmula clássica (14), porém ponderada pela taxa de probabilidade do átomo fazer uma transição de frequência ω_0 .³⁰ Em particular, o

²⁹ Se uma função $f(t)$ é escrita em termos de sua transformada de Fourier, $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, então, derivando ambos os lados em relação ao tempo, temos que a transformada de Fourier de $\dot{f}$ é $i\omega\tilde{f}$. Uma das vantagens de trabalharmos no espaço de Fourier é justamente transformar equações diferenciais em equações algébricas.

³⁰ Para sermos mais precisos, temos, em notação atual, que $\mathcal{K}_{\text{class}}$ deve ser substituído por

$$\mathcal{K}_{\text{quant}} = \frac{1}{\hbar} \sum_I \langle 0|d|I \rangle \langle I|d|0 \rangle \left(\frac{1}{\omega + \omega_{I0}} - \frac{1}{\omega - \omega_{I0}} \right),$$

na qual se reconhece diretamente um cálculo de segunda ordem de teoria de perturbação. Uma discussão da expressão acima pode ser encontrada em [60]. O produto $\langle 0|d|I \rangle \langle I|d|0 \rangle$ corresponde fisicamente à transição virtual do elétron para o estado excitado

fato de Kramers reobter a dependência na frequência da forma $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$, que é algo diretamente decorrente da equação diferencial do oscilador harmônico, foi a origem da segurança com que Heisenberg empregou equações dinâmicas diferenciais clássicas para a posição do elétron.

De posse da equação diferencial a ser satisfeita por $x(t)$, Heisenberg revisa brevemente um método matemático bem conhecido para obter soluções de equações desse tipo: expande-se a função $x(t)$ em componentes de Fourier e busca-se uma relação entre suas componentes. No contexto clássico, esse era apenas um dentre muitos outros métodos para lidar com equações diferenciais, mas Heisenberg comenta que “na teoria quântica nós somos presentemente (*vorläufig*) forçados a usar este método [...] por não ser possível definir na teoria quântica uma função que seja diretamente análoga à função” $x_m(t)$ [1, p. 885]. Born e Jordan perceberam que era possível não somente um tratamento quântico para a posição, como também que implicitamente foi o que Heisenberg fez em seu artigo. Desse modo, Born e Jordan mostram que “sobre o fundamento dado por Heisenberg (*auf der von Heisenberg gegebenen Grundlage*), é possível erigir o edifício de uma teoria matemática completa da mecânica quântica (*einer geschlossenen mathematischen Theorie der Quantenmechanik*) em uma analogia surpreendentemente próxima à mecânica clássica, mas preservando ao mesmo tempo as características próprias dos fenômenos quânticos” [3, p. 858]. Bastava, para isso, o reconhecimento de que as grandezas físicas devem ser representadas por matrizes.

Na próxima seção, exploraremos os desdobramentos presentes no trabalho de Born e Jordan. Eles revisitam, de uma forma mais clara e logicamente coesa, os dois exemplos discutidos por Heisenberg (oscilador harmônico e oscilador anarmônico). Heisenberg emprega a quantização dos invariantes adiabáticos ($J = \oint p dx$), seguindo o caminho iniciado pela quantização de Bohr-Sommerfeld (a qual impõe $J = nh$).³¹ Born e Jordan, por sua vez, mostram que isso é equivalente a empregar a relação de comutação $[X, P] = i\hbar$, cuja validade transcende esse exemplo, conforme discutiremos na seção 7. Essa igualdade veio a se estabelecer como um resultado central da teoria quântica, diferente do que ocorre com o procedimento de quantização do invariante adiabático empregado por Heisenberg.

$|I\rangle$ a partir do estado fundamental $|0\rangle$. Matematicamente, esse produto corresponde ao produto dos elementos de matriz d_{0I} e d_{I0} da matriz de dipolo elétrico. Historicamente, embora com uma notação distinta, foi neste tipo de manipulação algébrica que aparece no trabalho de Kramers e Heisenberg de 1925 o que hoje podemos reconhecer como a primeira multiplicação matricial na mecânica quântica.

³¹ Essa quantização foi denominada por Born e Jordan, em 1925, “teoria quântica ‘clássica’” (no original, “*klassischen Quantentheorie*”), enfatizando se tratar de uma teoria quântica que ainda carrega consigo aspectos clássicos, que viriam a ser abandonados a partir de 1925 [3, p. 869].

O grande mérito de Born e Jordan foi terem constatado e reconhecido que, na prática, a primeira seção do artigo de Heisenberg em 1925 fundou uma nova mecânica, pronta para ser aplicada a diversos sistemas físicos. Contudo, o próprio Heisenberg não reconheceu isso, o que limitou a sua escolha de aplicações a serem discutidas. Sem o conhecimento matricial, Heisenberg podia inferir as componentes de Fourier presentes apenas em potências X^n da posição, com n positivo e inteiro, explicando por que foram tratados apenas o oscilador harmônico e o oscilador anarmônico. Ademais, seu tratamento pressupõe movimentos periódicos, nos quais é possível empregar a quantização de J . Heisenberg menciona explicitamente que sua teoria daria conta apenas dos exemplos mais simples, descartando, por exemplo, o átomo de Hidrogênio, uma vez que, nesse problema, lidamos com um potencial $1/X$, para o qual há uma parte do espectro periódica e outra aperiódica (a parte contínua do espectro, associada a estados não ligados). No entanto, o formalismo proposto por Heisenberg já continha o aparato necessário mesmo para esse problema. Em 1926, Pauli usou o formalismo de Heisenberg para obter as energias permitidas para o átomo de Hidrogênio a partir das relações de comutação e do conhecimento das grandezas conservadas no átomo de Hidrogênio (incluindo o vetor de Laplace-Runge-Lenz), antes mesmo da solução do mesmo problema por Schrödinger [61].

7. O Quadro de Heisenberg

Vejamos agora alguns desdobramentos possíveis da abordagem didática que apresentamos na seção 5. Isso nos permitirá estender nosso tratamento para contemplar também alguns dos resultados importantes presentes no artigo de Born e Jordan [3]. Em particular, queremos mostrar que o hoje denominado *quadro de Heisenberg* já se encontra implicitamente presente no artigo de Heisenberg de 1925. Valorizaremos nesta seção o aspecto didático, sem nos preocuparmos em sermos fidedignos aos argumentos originais desses autores.

Nosso ponto de partida será a expressão (5), na qual representamos apenas a componente mn da matriz posição. Como seria possível representar toda a matriz? Para uma matriz 3×3 , por exemplo, é bem simples: fazemos uma tabela com três linhas e três colunas, e na linha m e coluna n colocamos o elemento X_{mn} . Porém, como há infinitas transições possíveis, essa estratégia é inconveniente, uma vez que envolveria matrizes de dimensão infinita.³²

³² Por isso, diversas abordagens ao ensino de física quântica optam por iniciar o ensino de mecânica quântica com sistemas de dois níveis (tais como polarização e *spin* do elétron), justamente para introduzir as ideias centrais da mecânica quântica em termos de matrizes 2×2 , de fácil manipulação [62–64]. Há diversas vantagens pedagógicas nesta escolha, mas também a grande inconveniência de lidar com conceitos abstratos como polarização

Recordemos alguns fatos básicos sobre vetores. Um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tem componentes cartesianas v_1 , v_2 e v_3 . Para os nossos propósitos, é conveniente empregar uma notação na qual $\mathbf{v}$ é representado por uma matriz coluna 3×1 com elementos v_1 , v_2 e v_3 , a qual denotaremos por $\mathbf{v}$ (sem negrito). Nessa representação, $v_j = e_j^T \mathbf{v}$, com e_j^T representando o transposto da matriz e_j dada pela matriz coluna 3×1 que possui elemento 1 na linha j e 0 nas demais linhas. O produto $e_j e_k^T$ é uma matriz 3×3 que possui todos os elementos nulos exceto o elemento na linha j e coluna k , que vale 1. Dessa forma, uma matriz M 3×3 qualquer pode ser representada como $M = \sum_{j,k} M_{jk} e_j e_k^T$.

Para nos aproximarmos ainda mais da notação consagrada na mecânica quântica atual, podemos denotar o unitário e_j pelo *ket* $|j\rangle$ e seu transposto e_j^T pelo *bra* $\langle j|$.³³ Essa notação em termos de *bras* e *kets* foi introduzida por Paul Dirac em 1939, porém ela é tão esclarecedora que convém a adotarmos aqui por razões didáticas, incorrendo em um leve anacronismo [65]. Devemos supor que os elementos $|j\rangle$ formam uma base do espaço vetorial. Denotando por $\hat{X}$ a matriz posição, escrevemos

$$\hat{X}(t) = \sum_{m,n} X_{mn}(t) |m\rangle \langle n|. \quad (15)$$

A partir da expressão (5), obtemos

$$\hat{X}(t) = \sum_{m,n} X_{mn}(0) e^{i\omega_{mn}t} |m\rangle \langle n| \quad (16)$$

ou, alternativamente, utilizando a igualdade (2),

$$\hat{X}(t) = \sum_{m,n} e^{i\omega_m t} |m\rangle X_{mn}(0) \langle n| e^{-i\omega_n t}, \quad (17)$$

Uma vez que a posição deve ser representada por uma matriz, o mesmo deve ocorrer com as demais grandezas físicas, em particular com a energia, que associaremos à matriz $\hat{H}$, denominada matriz hamiltoniana. Vemos, portanto, que a forma pela qual Heisenberg escreve a matriz posição é válida apenas para uma escolha específica de base para o espaço vetorial dos estados, na qual $|m\rangle$ e $|n\rangle$ representam autoestados da hamiltoniana, ou seja, $\hat{H}|m\rangle = E_m|m\rangle$. Pela relação de Planck, a energia no estado m é dada por $E_m = \hbar\omega_m$, de modo que $e^{i\omega_m t}|m\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}E_m t}|m\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|m\rangle$. Os autoestados da Hamiltoniana correspondem ao que, até aqui, vínhamos denominado *órbita*. Podemos escrever a igualdade (17)

e *spin*. A vantagem do caminho que percorremos na seção 5 é que estamos o tempo todo falando na posição de um elétron, embora reinterpretando tal conceito.

³³ Sendo matematicamente mais precisos, temos que e_j é a representação matricial do elemento $|j\rangle$ na base de autoestados da hamiltoniana. Seguindo a convenção adotada na maioria dos livros didáticos de física, identificaremos a representação matricial com o próprio elemento do espaço vetorial.

de forma que independa da base escolhida,

$$\hat{X}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \left(\sum_{m,n} X_{mn}(0) |m\rangle \langle n| \right) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}, \quad (18)$$

ou, mais sucintamente, utilizando a expressão (15),

$$\hat{X}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{X}(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}. \quad (19)$$

As expressões (5) e (19) são, portanto, equivalentes. Ambas ditam a evolução temporal da matriz posição. A expressão (19) tem a vantagem de independar da base escolhida para representar as grandezas físicas.

Não surpreende, portanto, que o artigo de Heisenberg seja tão difícil de ser lido. Não apenas ele inventou a mecânica quântica sem falar em matrizes, como o fez numa base específica, que tampouco é mencionada. É muito surpreendente que apenas ao escrevermos $\hat{X}(t)$ sem fazer menção a uma base específica, como ocorre na expressão (19), aparece explicitamente a constante $\hbar$. Na forma (5), a evolução da posição estava escrita somente em termos das frequências, sem qualquer menção à energia associada ao estado. Portanto, a constante de Planck desempenha no trabalho de Heisenberg um papel coadjuvante, algo notável em se tratando do artigo que inicia a mecânica quântica. De todo modo, a constante de Planck tem, é claro, um papel fundamental na mecânica matricial, o qual só será enfatizado por Born e Jordan. Voltaremos a esse ponto na próxima seção.

Como dissemos anteriormente, Schrödinger seguiu por outro caminho. Em vez de reinterpretar as grandezas clássicas, ele buscou a equação a ser satisfeita pela onda de matéria introduzida por de Broglie. Hoje reconhecemos que ambos os caminhos são equivalentes. A depender do contexto e da aplicação, pode ser mais interessante seguir o caminho de Schrödinger, como fazem muitos livros didáticos de mecânica quântica. Em outros contextos, pode ser mais interessante seguir o caminho da mecânica matricial.

Distinguimos essas formas de abordar a mecânica quântica pelos nomes *quadro de Schrödinger* e *quadro de Heisenberg*. A equação central do quadro de Heisenberg é dada pela expressão (19). Ela está escrita para a matriz posição, mas no lugar de $\hat{X}$ podemos colocar qualquer outra matriz. Para obtermos a forma como a expressão (19) costuma ser escrita, podemos derivá-la no tempo, obtendo a equação

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{X}], \quad (20)$$

onde utilizamos o comutador das matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (21)$$

Atualmente, a expressão (20) é denominada equação de Heisenberg. Os primeiros a escreverem essa equação foram Born e Jordan em 1925, que a identificaram como

sendo a versão quântica da equação de Hamilton [3]. Ela é mais geral do que a expressão (19), sendo válida inclusive quando o hamiltoniano depende explicitamente do tempo.

Note que a equação (20) é exatamente a mesma equação satisfeita na formulação hamiltoniana da mecânica analítica, porém com o colchete de Poisson das grandezas clássicas (ou, em linguagem contemporânea, observáveis clássicos) substituído por $i/\hbar$ vezes o comutador das matrizes correspondentes. Esse fato foi percebido por Paul Dirac logo após o trabalho de Heisenberg. Essa compreensão conduziu Dirac ao seu procedimento de quantização canônica.

No caso particular de uma partícula de massa m , suas variáveis dinâmicas são sua posição e seu momento linear, dado por

$$\hat{P} = m \frac{d\hat{X}}{dt}. \quad (22)$$

Na presença de uma força conservativa, a hamiltoniana é dada por

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}), \quad (23)$$

em termos da qual a equação (20) assume a forma

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \frac{\hat{P}[\hat{P}, \hat{X}] + [\hat{P}, \hat{X}]\hat{P}}{2m}. \quad (24)$$

Para recair na igualdade (22), devemos impor

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\hat{I}, \quad (25)$$

onde $\hat{I}$ é a matriz identidade, fazendo com que $\hat{P}[\hat{P}, \hat{X}] + [\hat{P}, \hat{X}]\hat{P} = -2i\hbar\hat{P}$. A igualdade (25) foi escrita por Born e Jordan, sendo obtida por outro caminho. Ela é sempre verdadeira, mesmo quando $\hat{P} \neq m\hat{V}$, como ocorre para uma partícula carregada na presença de um campo magnético. Nela, finalmente, a constante de Planck assume um papel central.

É notável que a constante de Planck não desempenha um papel central nos argumentos contidos no artigo de Heisenberg de 1925. Isso contrasta com a maior parte dos trabalhos fundamentais em física, onde constantes universais simbolizam justamente a quebra de paradigma com teorias anteriores e sinalizam uma revolução conceitual [66]. Na relatividade, a velocidade da luz no vácuo c simboliza a possibilidade de tratarmos espaço e tempo como partes de um mesmo ente físico, permitindo relacionar universalmente tempo e posição. Na mecânica estatística, a constante de Boltzmann permite reconhecer que temperatura corresponde a uma largura na distribuição de energia, relacionando universalmente temperatura e energia. A mecânica quântica é especial na medida em que a mesma constante universal encapsula distintas revoluções conceituais. No trabalho seminal de Planck, a constante h , que viria

a levar seu nome, está presente no *quantum* de energia $h\nu$. Na formulação de de Broglie e Schrödinger, a constante de Planck representa a possibilidade de unificação onda-corpúsculo ao relacionar o comprimento de onda (frequência) da onda quântica com o momento linear (energia) da partícula associada. Já na formulação matricial, a constante universal quantifica uma não-comutatividade fundamental entre um par de grandezas físicas (que dizemos conjugadas entre si), excluindo a possibilidade de atribuir números à posição e à velocidade, como feito classicamente. Isso está explícito na igualdade (25) para as variáveis posição e momento linear de uma partícula.

Heisenberg reconhece explicitamente que a composição de Fourier (9) pode levar a grandezas que não comutam. Ele afirma que “enquanto na teoria clássica $x(t)y(t)$ é sempre igual a $y(t)x(t)$, esse não é necessariamente o caso na teoria quântica” [1, p. 884]. Ele ainda não dispunha de elementos para estabelecer universalmente as relações de comutação entre diferentes grandezas físicas e, por essa razão, ficou limitado a lidar em suas aplicações com situações onde a ordem dos fatores não importa, como $x^2(t)$ e $x^3(t)$.

8. Osciladores Harmônicos

Nesta seção, veremos que o artigo de Heisenberg de 1925 fornece uma nova perspectiva sobre o oscilador harmônico na teoria quântica. Esse sistema físico tem a propriedade especial de que todos os estados possíveis de energia são igualmente espaçados. Assim, toda transição possível é dada por um múltiplo inteiro de $h\nu$, onde ν denota a frequência do oscilador harmônico.³⁴ As composições de Fourier dadas pelas expressões (8) e (9) fornecem os mesmos resultados para o oscilador harmônico. O motivo reside no fato de que, sendo os níveis igualmente espaçados, há somente uma família de frequências, de tal modo que o oscilador harmônico satisfaz automaticamente a propriedade (B) enunciada na seção 3. Isso explica o sucesso de tratamentos quânticos no período de 1900 a 1925 sem que houvesse a necessidade de reconhecer o caráter matricial das variáveis dinâmicas de um oscilador harmônico.

Entre as primeiras aplicações bem sucedidas da teoria quântica, praticamente todas envolvem o oscilador harmônico, a começar por Planck em 1900. Na maioria

das aplicações, o oscilador harmônico é o campo eletromagnético, como, por exemplo, no modelo de Einstein para o efeito fotoelétrico em 1905 e no espalhamento Compton em 1923. Em 1907, Einstein aplica a quantização de energia para desenvolver um modelo quântico para o calor específico de um sólido, tratando as oscilações dos átomos no sólido como harmônicas. O modelo de dispersão de Lorentz e sua subsequente descrição quântica por Kramers resultam de tratar as oscilações de carga como oscilações harmônicas. A notável exceção é o modelo atômico de Bohr. A discretização das frequências de oscilação decorrem do elétron estar sujeito a um potencial coulombiano. Por essa razão, as composições dadas pelas expressões (8) e (9) fornecem resultados diferentes para o espectro de átomos. Isso ocorre pois há mais de uma família de frequências. Essa é a razão pela qual o nascimento da mecânica matricial se deu através justamente de desdobramentos das linhas espectrais atômicas.

O fato da composição dada pelas expressões (8) e (9) fornecerem o mesmo resultado para o oscilador harmônico é responsável por confusões conceituais. Por exemplo, a explicação fornecida por Einstein para o efeito fotoelétrico pode fazer parecer que esse efeito requer que a luz seja quantizada. Esse efeito é explicado também por uma teoria semi-clássica, na qual se trata a matéria por meio da teoria quântica e a luz como uma onda harmônica clássica, conforme mostraram Guido Beck e Gregor Wentzel [67]. Algo similar acontece com o efeito Compton, que após a explicação original em termos de fótons teve uma explicação semiclássica proposta por Schrödinger [67].³⁵ Isso ocorre porque tanto na descrição clássica quanto na descrição semiclássica, o campo eletromagnético, por ser um oscilador harmônico, pode trocar energia apenas em múltiplos da frequência ν .

9. Conclusões

Neste trabalho, estudamos os desenvolvimentos históricos que levaram ao artigo seminal de Heisenberg de 1925, ao qual é atribuída a criação da mecânica quântica. Apresentamos os argumentos centrais de Heisenberg e defendemos que eles permitem entender de forma intuitiva o surgimento de matrizes na mecânica quântica, sendo, portanto, de interesse para o ensino atual de mecânica quântica.

Em retrospecto, o marco mais profundo deixado pelo trabalho de Heisenberg é a percepção de que a lei de adição satisfeita pelas frequências das linhas espectrais atômicas se escreve, em termos dos coeficientes de Fourier da função posição, de uma forma bastante particular, que nada mais é do que o produto matricial, conforme Born e Jordan identificaram. Isso foi possível porque Heisenberg lidou diretamente com um problema

³⁴ Em retrospecto, essa propriedade foi fundamental para o desenvolvimento da mecânica quântica. Em seu trabalho de 1900, Planck divide a energia em múltiplos da frequência como mero artifício de contagem. Caso o oscilador harmônico quântico não tivesse energias igualmente espaçadas (ou se a hipótese de oscilações harmônicas fosse ruim para descrever a emissão de radiação por um corpo negro) o artifício de Planck não levaria a um resultado de acordo com a observação empírica. Posteriormente, o equi-espaçamento dos níveis de energia do oscilador harmônico foi fundamental para que se pudesse pensar as excitações do campo eletromagnético como partículas idênticas, que viriam a ser denominadas fótons.

³⁵ Para uma discussão histórica sobre o trabalho de Compton, remetemos o leitor às referências [68, 69]. Para uma discussão sobre o trabalho de Schrödinger relativo ao efeito Compton, ver [70].

de emissão de radiação, assim como Bohr havia feito 12 anos antes. Nesses 12 anos, contudo, o caminho trilhado por diversos cientistas (Bohr, Kramers, Born, Jordan, Heisenberg, Compton, entre outros) estava mais concentrado no tratamento quântico da dispersão óptica e do espalhamento da radiação por um átomo, tópicos que envolvem dificuldades técnicas e cálculos mais extensos do que o problema de emissão de radiação.³⁶ Tal caminho conduziu ao trabalho de Kramers e Heisenberg de 1925, onde se pode reconhecer a primeira multiplicação matricial na mecânica quântica. No entanto, não se credita a esse trabalho o marco inicial do surgimento da mecânica matricial. Tal reconhecimento é dado ao trabalho de Heisenberg de 1925. Por que a comunidade atribui importância tão especial a este artigo?

Defendemos aqui que isso ocorreu devido ao fato do artigo de Heisenberg lidar com o problema de emissão de radiação. Por ser um problema mais simples do que os que foram estudados no artigo de Kramers e Heisenberg, esse problema permitiu que toda a estrutura da mecânica matricial possa ser vislumbrada, em particular as regras de composição matricial da teoria. Uma exposição mais sistemática do formalismo resultante viria dois meses depois com o trabalho de Born e Jordan, que foi diretamente influenciado pelo artigo de Heisenberg em 1925. Eles afirmam que as variáveis dinâmicas fundamentais da teoria quântica devem ser representadas por matrizes, fundando o que podemos chamar precisamente de uma mecânica matricial. Heisenberg, por sua vez, em nenhum momento afirma que a posição do elétron deve ser representada como uma matriz e sequer nega que a posição possa ser definida do mesmo modo que na teoria clássica. Nesse sentido, reconhecemos um paralelo do artigo de Heisenberg de 1925 com o de Planck em 1900. Embora o trabalho de Planck tenha levado inexoravelmente à constatação de que os osciladores materiais que compõem um corpo negro têm suas energias discretizadas, em nenhum momento ele parece ter plena consciência disso.³⁷ No entanto, a quantização da energia foi posteriormente reconhecida como a marca mais fundamental e revolucionária de seu artigo, assim como a concepção de grandezas físicas como matrizes veio a ser reconhecida como o principal legado do artigo de Heisenberg em 1925.

Um outro aspecto importante do artigo de Heisenberg foi a influência exercida pelo princípio da correspondência sobre sua obra. A importância desse princípio foi

ênfaticada por diversos historiadores. Conforme observa Olivier Darrigol, “se alguém ainda deseja isolar um único elemento que contribuiu mais do que qualquer outro para a mecânica quântica de Heisenberg, o único candidato razoável é o princípio da correspondência” [4, p. 275]. Concordamos com a centralidade do princípio da correspondência para o programa desenvolvido após o trabalho de Bohr sobre o espectro atômico. Esse é o princípio que unifica diversos trabalhos desenvolvidos entre 1913 e 1925. Todavia, seu caráter unificador impede que este princípio possa isolar o que Heisenberg trouxe de novo. Defendemos que a novidade trazida por Heisenberg pode ser sintetizada como sendo *um salto para trás*. Enquanto o trabalho de Bohr sobre a emissão e absorção de radiação introduziu a ideia de salto quântico, durante os 12 anos que se seguiram a comunidade científica aprendeu a lidar com problemas que envolviam dois saltos quânticos, tais como a dispersão óptica e o espalhamento da radiação por um átomo. Ironicamente, a importância fundamental do trabalho de Heisenberg foi voltar a um problema envolvendo apenas um salto quântico, porém trazendo consigo todo o aprendizado acumulado pelos cientistas ao longo desses 12 anos que separam Bohr 1913 de Heisenberg 1925.

Essa análise histórica apresenta um possível caminho para o ensino de mecânica quântica. Argumentamos que a novidade trazida por Heisenberg pode ser mapeada diretamente na teoria atômica de Bohr. A ruptura fundamental com a teoria clássica trazida pelo átomo de Bohr está no mecanismo de emissão de radiação. Na teoria clássica, a radiação é produzida por uma partícula eletricamente carregada ao se mover aceleradamente ao longo de uma trajetória. Na teoria quântica, a radiação é produzida por uma partícula eletricamente carregada ao realizar um salto quântico entre dois estados. Esse modo de compreender os processos quânticos moldou a mecânica matricial, tornando-se uma das ideias centrais da mecânica quântica. Todas as previsões da mecânica quântica são feitas, até hoje, por meio do cálculo de elementos de matrizes associados à transição entre dois estados, que é uma herança direta da novidade revolucionária de Bohr.³⁸ A própria utilização de matrizes para descrever grandezas físicas advém do fato das transições conectarem dois estados, que ficam assim associados aos índices (linha e coluna) que caracterizam uma matriz. Esperamos, dessa forma, contribuir para que os estudantes entendam de maneira mais intuitiva a importância de matrizes no estudo da mecânica quântica.

³⁶ Em linguagem moderna são problemas de segunda ordem de teoria de perturbação, enquanto a emissão e absorção são, em geral, processos de primeira de ordem

³⁷ O aspecto quantizado da radiação eletromagnética foi defendido por Einstein em 1905 e, de modo mais sistemático, por Lorentz em 1908, como mencionamos na seção 2. Vale observar que o próprio Planck repudiou veementemente essa interpretação de sua obra, como pode ser observado no prefácio da segunda edição de seu livro “A teoria da radiação térmica” de 1914 [71]. Para uma revisão das perspectivas dos historiadores da física acerca dos trabalhos de Planck de 1900, ver [29].

³⁸ Isso nos mostra que a noção de salto quântico desempenhou um papel central no desenvolvimento da mecânica quântica. É difícil superestimar a dimensão revolucionária dessa noção, que teve no século XX um impacto similar àquele que a noção de inércia teve no século XVII. Ambas as noções mudaram a forma como a natureza era concebida, reformulando as condições de possibilidade de compreensão dos fenômenos naturais.

Agradecimentos

Agradecemos a Nelson Studart pelo convite para participarmos deste volume especial e por sugerir que escrevêssemos sobre o artigo de Heisenberg de 1925. Agradecemos também a Ivã Gurgel, Laura Stolze e Carlos Farina pela leitura de uma versão preliminar deste artigo e por suas sugestões. Agradecemos a Marco Moriconi e Ricardo Karam por discussões que foram importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

RMS agradece a Luiz Bevilacqua pelo convite para lecionar um curso sobre mecânica quântica no espaço Alexandria na UFRJ de 2011 a 2014, onde algumas das ideias deste trabalho foram desenvolvidas.

Disponibilidade de Dados

Todas as fontes primárias e secundárias que sustentam as análises desenvolvidas neste artigo estão referenciadas na bibliografia.

Referências

- [1] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik* **33**, 879 (1925).
- [2] B.L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics* (Dover, New York, 1968).
- [3] M. Born e P. Jordan, *Zeitschrift für Physik* **34**, 858 (1925).
- [4] O. Darrigol, *From c-Numbers q-Numbers: The Classical Analogy in the History of Quantum Theory* (University of California Press, Oakland, 1992).
- [5] O. Darrigol, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **40**, 151 (2009).
- [6] A.R.F. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica* (Edusp, São Paulo, 2023), 2 ed.
- [7] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Edgard Blucher, São Paulo, 2014), v. 4.
- [8] M.E. MacKinnon, *Historical Studies in the Physical Sciences* **8**, 137 (1977).
- [9] M.E. MacKinnon, em: *Scientific Discovery: Case Studies*, editado por T. Nickles (D. Reidel, Dordrecht, 1980).
- [10] D. Cassidy, *Uncertainty: The Life and Science of Werner Heisenberg* (W.H. Freeman, New York, 1992).
- [11] A. Blum, M. Jähnert, C. Lehner e J. Renn, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **60**, 3 (2017).
- [12] A. Duncan e M. Janssen, *Constructing Quantum Mechanics* (Oxford University Press, Oxford, 2023), v. 2.
- [13] I.J.R. Aitchison, D.A. MacManus e T.M. Snyder, *American Journal of Physics* **72**, 1370 (2004).
- [14] W.A. Fedak e J.J. Prentis, *American Journal of Physics* **77**, 128 (2009).
- [15] E. Palmgren e R. Karam, *American Journal of Physics* **93**, 21 (2025).
- [16] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (American Institute of Physics, New York, 1989), 2 ed.
- [17] A. Duncan e M. Janssen, *Constructing Quantum Mechanics* (Oxford University Press, Oxford, 2023), v. 1.
- [18] G. Gamow, *Thirty Years that Shook Physics: The Story of Quantum Theory* (Dover, New York, 1985).
- [19] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [20] M. Planck, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **2**, 202 (1900).
- [21] M. Planck, *Annalen der Physik* **4**, 553 (1901).
- [22] M. Planck, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 536 (2000).
- [23] M. Planck, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 538 (2000).
- [24] G. Kirchhoff, em: *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1859* (Ferdinand Dümmler, s.l., 1860).
- [25] G.R. Kirchhoff, *Annalen der Physik* **109**, 275 (1860).
- [26] A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Academic Press, New York, 1956).
- [27] J.M.F. Bassalo, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **18**, 30 (1996).
- [28] T.S. Kuhn, *Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity, 1894–1912* (University of Chicago Press, Chicago, 1987).
- [29] O. Darrigol, *Centaurus* **43**, 219 (2001).
- [30] N. Bohr, *Philosophical Magazine (Series 6)* **26**, 1 (1913).
- [31] N. Bohr, *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab: Matematisk-fysiske meddelelser* **4**, 1 (1918).
- [32] M. Planck, *Annalen der Physik* **37**, 642 (1912).
- [33] P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum* (Academic Press, New York, 1994).
- [34] L. de Broglie, *La Physique nouvelle et les quanta* (Flammarion, Paris, 1939).
- [35] A. Sommerfeld, *Annalen der Physik* **356**, 1 (1916).
- [36] W. Pauli, *Zeitschrift für Physik* **31**, 765 (1925).
- [37] G.E. Uhlenbeck e S. Goudsmit, *Die Naturwissenschaften* **13**, 953 (1925).
- [38] S. Tomonaga, *The Story of Spin* (University of Chicago Press, Chicago, 1998).
- [39] O. Freire Jr. e T. Hartz, *Nature* **639**, 296 (2025).
- [40] W.E. Lamb e R.C. Retherford, *Physical Review* **72**, 241 (1947).
- [41] H.A. Bethe, *Physical Review* **72**, 339 (1947).
- [42] S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
- [43] N. Bohr, *Philosophical Magazine* **27**, 506 (1914).
- [44] N. Bohr, *Zeitschrift für Physik* **13**, 117 (1923).
- [45] A. Bokulich e P. Bokulich, *Bohr's Correspondence Principle. Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2020).
- [46] A. Bokulich, *Reexamining the Quantum-Classical Relation: Beyond Reductionism and Pluralism* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [47] J.Z. Buchwald, *From Maxwell to Microphysics: Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century* (University of Chicago Press, Chicago, 1988).
- [48] J.Z. Buchwald e A. Warwick, *Histories of the Electron: The Birth of Microphysics* (MIT Press, Boston, 2001).
- [49] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, Hoboken, 1999).
- [50] N. Ashcroft e N. Mermin, *Solid State Physics* (Cengage Learning, s.l., 1976).

- [51] F. Wooten, *Optical Properties of Solids* (Academic Press, New York, 1972).
- [52] H.A. Kramers, *Nature* **113**, 673 (1924).
- [53] H.A. Kramers e W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik* **31**, 681 (1925).
- [54] M. Born, *Zeitschrift für Physik* **26**, 379 (1924).
- [55] M. Born e P. Jordan, *Zeitschrift für Physik* **33**, 479 (1925).
- [56] J.-P. Martinez, *Perspectives on Science* **32**, 350 (2024).
- [57] J.-P. Martinez, *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* **48**, 143 (2025).
- [58] L. Stolze, R.M. Pereira, C. Farina, F.S.S. Rosa e R. de Melo e Souza, *Instantaneity and Causality in Classical Electrodynamics*, não publicado.
- [59] S. Tomonaga. *Quantum Mechanics* (North-Holland, Dordrecht, 1962), v. 1.
- [60] A.S. Santos, P.H. Pereira, P.P. Abrantes, C. Farina, P.A. Maia Neto e R. de Melo e Souza, *Entropy* **26**, 527 (2024).
- [61] W. Pauli, *Zeitschrift für Physik* **36**, 336 (1926).
- [62] J.L. Martin, *Basic Quantum Mechanics* (Oxford University Press, Oxford, 1981).
- [63] I.M. Grega e O. Freire Jr., em: *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, editado por M.R. Matthews (Springer, Dordrecht, 2014), 183–209.
- [64] C.E. Aguiar, *Mecânica Quântica: Uma Abordagem Conceitual*, disponível em: <https://www.if.ufrj.br/~carlos/fisomod/MecanicaQuantica-PEF-UFRJ.pdf>.
- [65] P.A.M. Dirac, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **35**, 416 (1939).
- [66] J.-M. Lévy-Leblond, *La Rivista del Nuovo Cimento* **7**, 187 (1977).
- [67] I. Silva, O. Freire Jr. e Ana Paula Bispo da Silva, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 4601 (2011).
- [68] I. Silva, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37**, 4204 (2015).
- [69] I. Silva e O. Freire Jr., *Revista Brasileira de Ensino de Física* **36**, 1601 (2014).
- [70] J. Strnad, *European Journal of Physics* **7**, 217 (1986).
- [71] M. Planck, *The Theory of Heat Radiation* (P. Blakiston, Philadelphia, 1914).