



# Hidrodinâmica relativística: a representação de diversos fluidos em relatividade geral

Relativistic hydrodynamics: the representation of several fluids in general relativity

Rodrigo Francisco dos Santos<sup>1,2</sup>, Antônio Carlos Amaro de Faria Júnior<sup>3,4</sup>, Sérgio Costa Ulhoa<sup>\*5</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>2</sup>Fundação Centro de Educação a Distância do Estado do Rio de Janeiro, Polo Nova Iguaçu, Nova Iguaçu, RJ, Brasil.

<sup>3</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava, PR, Brasil.

<sup>4</sup>Instituto de Estudos Avançados, São José dos Campos, SP, Brasil.

<sup>5</sup>Universidade de Brasília, Instituto de Física, Brasília, DF, Brasil

Recebido em 06 de Janeiro de 2019. Revisado em 08 de Julho de 2019. Aceito em 10 de Setembro de 2019

O tensor de momento-energia é a entidade matemática que representa de forma unificada as fontes de momento e energia no formalismo covariante, tanto em espaços planos, como em espaços curvos. Em espaços curvos o tensor de momento-energia fica conectado a curvatura do espaço-tempo via equação de campo de Einstein. O tensor de momento-energia caracteriza os campos de matéria do sistema. Por sua vez as condições de energia estabelecidas por Hawking e Ellis classificam os diversos tipos de fluidos quanto a atratividade/repulsividade, a causalidade, interação com o vácuo e a positividade. Também abordamos a conservação do tensor de momento-energia via equação Toleman-Openheimer-Volkov (TOV), que é um importante formalismo para o estudo de estruturas e modelos estelares. Vamos estudar o tensor momento-energia nas suas versões isotrópicas e anisotrópicas, bem como a sua conservação e relação com a constante cosmológica.

**Palavras-chave:** Hidrodinâmica; Fluidos Relativísticos.

The energy-momentum tensor is the mathematical entity that represents the sources of momentum and energy in a covariant formalism, both in flat and curved spaces. In curved spaces the energy-momentum tensor is connected to the space-time curvature via the Einstein field equation. The energy-momentum tensor characterizes the matter fields of the system. In turn, the energy conditions established by Hawking and Ellis classify the various types of fluids according to their attractiveness/repulsiveness, causality, interaction with the vacuum and positivity. We also address the conservation of the energy-momentum tensor via the Toleman-Openheimer-Volkov (TOV) equation, which is an important formalism for the study of stellar structures and models. We will study the energy-momentum tensor in its isotropic and anisotropic versions, as well as its conservation and relation to the cosmological constant.

**Keywords:** Hydrodynamics; Relativistic Fluids.

## 1. Introdução

Historicamente desde a Grécia antiga, que a humanidade tem interesse pelo estudo de fluidos [1]. Uma história muito popular e quase folclórica foi o famoso "Eureka" de Arquimedes após resolver um problema ligado ao empuxo, supostamente durante um banho de imersão.

O estudo dos fluidos e seu escoamento foi por séculos uma área de grande importância para o desenvolvimento da tecnologia, nomes como Stokes e Mach construíram conceitos matemáticos capazes de entender o movimento de fluidos, sendo extensíveis aos campos gravitacionais e eletromagnéticos [2].

O eletromagnetismo tratava os campos eletromagnéticos como fluidos, a própria idéia de corrente conservada, já continha em si a idéia de escoamento, onde o campo

elétrico estaria associado ao fluxo por uma região determinada e o campo magnético associado aos vórtices em torno da corrente. As cargas seriam as fontes e os sorvedouros dos campos. Essa idéia foi incrementada com o advento da relatividade restrita, campos elétricos e magnéticos passaram a ter uma descrição unificada.

Em relatividade geral e algumas sub-áreas como cosmologia e astrofísica um dos principais debates é acerca do tipo de matéria, que está gerando o campo gravitacional. Nas equações de Einstein [3–5] a fonte do campo é a o tensor de momento-energia o tipo de matéria é um fluido caracterizado por sua equação de estado, que seria uma limitação imposta sobre o tensor de momento-energia. Contudo até o trabalho de Hawking-Ellis [6, 7] não havia qualquer limitação às equações de estado. Hawking-Ellis introduziram as chamadas condições de energia que são imposições sobre o tensor de momento-energia quanto

\*Endereço de correspondência: [sc.ulhoa@gmail.com](mailto:sc.ulhoa@gmail.com)

a propagação do fluido por ele descrito. Estudar essas condições de energia é hoje uma tarefa importante para pesquisadores, que trabalham com inflação [8], estrelas estranhas [9], energia escura, [5, 10–13], campos escalares [14], matéria de quark [15] e uma vasta quantidade de temas. Não existe limite para a violação das condições de energia, na verdade todas podem ser violadas, mas a violação de cada uma delas implica um tipo de fluido. O tensor de momento-energia mais simples que existe é o chamado tensor de poeira, que se trata de um fluido não interagente. Assim cada interação requer um termo a mais. A introdução de um termo proporcional à métrica implica energia do vácuo [5, 10], propriedades de anisotropia implicam uma quadrivelicidade com componente radial, porém sem quebra da simetria esférica, em geral esta é associada a introdução de campos eletromagnéticos [16]. Todos estes tipos de tensores de fluido relativístico ideal, obedecem à conservação de momento e energia, derivada da simetria de Bianchi do tensor de Einstein. Essa simetria é importante no estudo de fluidos que compõem estrelas, sendo uma das mais ativas áreas da astrofísica atualmente [17].

Propriedades de superfluidos têm sido observada [18] em sistemas gravitacionais, o que levou ao surgimento de uma nova área de pesquisa que seria o estudo da estrutura causal da propagação de ondas em colóides, com o intuito de gerar analogias à estrutura causal em campos gravitacionais de objetos colapsados [19]. O trabalho está dividido da seguinte forma: Seção 2: Estudamos os campos eletromagnéticos como fluidos, explicando as relações com vórtices e escoamentos. Seção 3: Deduzimos o tensor de Maxwell, aprofundando as propriedades de fluidos e observando a equação da continuidade. Seção 4: Construímos o tensor de momento-energia associado ao campo eletromagnético. Seção 5: O tensor de momento-energia é estudado como formalismo para descrever um fluido ideal, as restrições às equações de estado associadas às condições de energia são estabelecidas. Estudamos ainda a conservação do tensor de momento-energia para uma métrica genérica e para um objeto esférico. Seção 6: Estudamos um tensor de momento-energia com propriedade de anisotropia, estudamos as condições de energia associadas a esse tipo de fluido e demonstramos a conservação do tensor de momento-energia anisotrópico. Seção 7: É construído um tensor de momento-energia associado a constante cosmológica e estudada a sua conservação.

## 2. A eletrodinâmica como uma teoria de fluido

Os experimentos originais do eletromagnetismo concebiam a corrente como um fluido de portadores de carga, que se propagava pelos condutores. A própria idéia de campos também trazia em seu cerne o conceito de fluido, sendo o caso do campo elétrico um fluido, o fluxo era

calculado pela lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

e carga  $q = \int_V \rho dV$ . Vórtices associados a esse fluido são descritos pela lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (2)$$

onde o campo magnético é associado à propriedade de circulação do fluido. Além disso divergente do campo magnético é nulo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

que mostra a inexistência de fontes magnéticas (monopólos), completando a simetria entre os campos, temos a lei de Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}, \quad (4)$$

sendo  $\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$  a corrente de deslocamento descoberta por Maxwell. Na ausência de fontes  $q = 0, \vec{j} = 0$ , temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}. \quad (8)$$

Portanto o vórtice de um campo elétrico implica na variação temporal do campo magnético, assim como o vórtice magnético implica na variação temporal do campo elétrico. Aplicando o rotacional em (8), temos:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} = 0, \quad (9)$$

logo vemos, a equação de onda para o campo magnético, podemos da mesma forma deduzir para o campo elétrico aplicando o rotacional na equação (6)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0. \quad (10)$$

Embora os campos sejam similares a fluidos, a onda eletromagnética não se propaga em nenhum meio, essa foi uma das maiores revoluções da ciência, pois colocou fim a ideia do éter luminífero, que mais tarde a experiência de Michelson-Morley demonstrou não existir.

## 3. O Tensor de Maxwell

Podemos definir os campos auxiliares, chamados potenciais eletromagnéticos  $\Phi$  e  $\vec{A}$ . Em seguida escrevemos os campos elétrico e magnético em termos dos potenciais,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}, \quad (11)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (12)$$

Esses potenciais tem um papel importante por exemplo no efeito Aharonov-Bohm. Podemos unificar os campos e contruir o formalismo tensorial. Definimos então o quadrivetor potencial

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3), \tag{13}$$

onde  $A^0 = \Phi$ , e  $A^1, A^2, A^3$ , são as componentes do vetor potencial, unificando também as derivadas  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$ . Devemos notar que os índices subscritos e sobrescritos se referem à propriedades de transformação de coordenadas, tais propriedades são conhecidas como contravariância e covariância respectivamente. A relação entre essas quantidades é dada pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  que é definido pelo produto escalar da base de um determinado espaço. Podemos definir o tensor de Maxwell

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{14}$$

Explicitamente escrevemos, usando  $i = 1, 2, 3$ :

$$F^{0i} = E^i = -\partial^0 A^i - \partial^i A^0, \tag{15}$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = B_k \epsilon^{ijk}. \tag{16}$$

Escrevemos finalmente a matriz associada ao tensor Maxwell

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & -B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Conhecendo a equação da continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + c\partial_t \rho = 0, \tag{18}$$

onde  $\vec{j}, \rho$  são a densidade de corrente vetorial e a carga, podemos generalizar essa corrente (18) usando a equação da continuidade (18)

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{19}$$

temos então a quadridivergencia da quadri-corrente  $J^\mu = (\rho, \vec{j})$ . Se agimos com o operador derivada no tensor de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \tag{20}$$

de forma mais explicita, se agimos  $\partial_i F^{0i} = \partial_i E^i = \nabla A^0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , e ainda,  $\partial_i F^{ij} = \mu_0 j^j$  onde  $J^j = \vec{j}$ .

#### 4. Tensor de momento-energia: fluido relativistico

Vamos definir a ação seguindo [3]

$$S = \int \xi \left( q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV dt = \frac{1}{c} \int \xi d\Omega \tag{21}$$

onde,  $q, i \equiv \frac{\partial q}{\partial x^i}$  são variáveis generalizadas.

Minimizando a ação (21)

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \xi}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \xi}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right) d\Omega \tag{22}$$

$$= \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial \xi}{\partial q} \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \xi}{\partial q_{,i}} \right) - (\delta q) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \xi}{\partial q_{,i}} \right] d\Omega = 0,$$

o segundo termo se anula sobre a integração em todo o espaço. Podemos então escrever a equação do movimento como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \xi}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \xi}{\partial q} = 0, \tag{23}$$

aqui assumimos a soma sobre índices repetidos. Seguindo agora um procedimento similiar ao usado para verificar a conservação da energia

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^i} = \frac{\partial \xi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}, \tag{24}$$

substituindo na equação de movimento, considerando que  $q_{,k,i} = q_{,i,k}$ , temos:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial \xi}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \xi}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( q_{,i} \frac{\partial \xi}{\partial q_{,k}} \right) \tag{25}$$

usando a seguinte propriedade

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \xi}{\partial x^k}. \tag{26}$$

O tensor de momento-energia em termos das variáveis canônica é:

$$T_i^k = q_{,i} \frac{\partial \xi}{\partial q_{,i}} - \delta_i^k \xi. \tag{27}$$

Seguindo esta forma do tensor de momento-energia, o mais simples [3-5, 10, 11]

$$T^{\mu\nu} = U^\mu P^\nu, \tag{28}$$

sendo  $U^\mu = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} [1, \frac{v^\alpha}{c}]$  a quadri-velocidade de um observador em movimento junto com o fluido e  $P^\mu = m_0 c U^\mu$  o quadri-momentum. Usualmente especificamos as componentes do tensor de momento-energia também definimos nominalmente temos a normalização

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1, \tag{29}$$

a densidade de energia

$$T^{00} = \rho, \tag{30}$$

o fluxo de energia

$$T^{i0} = cP^i \tag{31}$$

o tensor das tensões

$$T^{ij} = u^i p^j, \tag{32}$$

aqui índices latinos limitam se a  $i, j = 1, 2, 3$  e índices gregos a  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . O tensor de momento-energia é uma matriz simétrica, ou seja

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \tag{33}$$

Relacionando o tensor de momento-energia energia momentum a estrutura cinemática da relatividade especial, temos

$$T^{\mu\nu} = m_0 c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} U^\mu U^\nu. \quad (34)$$

A conservação do tensor de energia momentum de poeira tem uma consequência fundamental,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = m_0 c^2 (\partial_\mu U^\mu) U^\nu = 0. \quad (35)$$

Podemos definir a quadri-força como

$$f^\mu = \partial_t (m U^\mu). \quad (36)$$

A força de Lorentz é também um quadri-vetor

$$f^\nu = \frac{q}{c} U_\mu F^{\mu\nu}, \quad (37)$$

pela lei de Newton chegamos a

$$m_0 c \partial_t U^\mu = \frac{q}{c} U_\mu F^{\mu\nu}, \quad (38)$$

substituindo (38) em (35), temos

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{q}{c} U_\mu F^{\mu\nu}, \quad (39)$$

a quadri-corrente pode ser escrita como  $J^\mu = q U^\mu$ , ficamos então:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J_\mu F^{\mu\nu} \quad (40)$$

pela equação (20) chegamos que a

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\mu_0}{c} (\partial^\alpha F_{\alpha\mu}) F^{\mu\nu} \quad (41)$$

usando as propriedades da derivada do produto

$$\partial^\alpha (F_{\alpha\mu} F^{\mu\nu}) = (\partial^\alpha F_{\alpha\mu}) F^{\mu\nu} + F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\nu} \quad (42)$$

$$\partial^\alpha (F_{\alpha\mu} F^{\mu\nu}) - F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\nu} = (\partial^\alpha F_{\alpha\mu}) F^{\mu\nu} \quad (43)$$

e evocando a propriedade de simetria

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha F_{\alpha\mu}) F^{\mu\nu} &= [\partial^\alpha (F^{\mu\nu} F_{\alpha\mu}) - F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\nu}] \\ F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\nu} + F_{\mu\alpha} \partial^\mu F^{\nu\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} F_{\alpha\mu} (\partial^\alpha F^{\alpha\mu} + \partial^\mu F^{\alpha\mu}) = -\frac{1}{2} F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\alpha} \\ &= -\frac{1}{4} \partial^\nu (F_{\alpha\mu} F^{\mu\alpha}), \end{aligned}$$

temos

$$\frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\mu = \frac{1}{4} \left[ \partial (F^{\alpha\mu} F_{\alpha\mu}) - \frac{1}{4} \partial^\nu (F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha}) \right] \quad (44)$$

logo

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha \left( F^{\nu\mu} F_\mu^\alpha - \frac{1}{4} g^{\nu\alpha} F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} \right). \quad (45)$$

Finalmente o tensor de momento-energia para o campo eletromagnético é

$$T_{em}^{\nu\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{\nu\mu} F_\mu^\alpha - \frac{1}{4} g^{\nu\alpha} F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} \right), \quad (46)$$

operando com  $g_{\nu\alpha}$ , verificamos facilmente que o traço desse tensor eletromagnético é nulo. Matricialmente escrevemos o tensor de momento-energia como

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Sabendo da propriedade de anti-simetria do tensor de Maxwell  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ , facilmente verificável em (17), aplicando essa mesma propriedade em (48) notamos que  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ . As componentes  $T^{ij}$  com  $i, j = 1, 2, 3$  formam o chamado tensor das tensões. Já as componentes  $T^{0i}$

$$T_{em}^{0i} = -\frac{1}{4\pi} F^{0\mu} F_\mu^i \quad (48)$$

deotam o vetor de Poyting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$  que é a densidade direcional de propagação de energia.

### 5. Fluido isotrópico

Inspirados em (27) definimos o tensor de momento-energia de um fluido ideal o mais geral possível (sem anisotropia) [5, 10, 11] como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (49)$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \quad (50)$$

O traço do tensor de energia momento é

$$T = \rho - 3p \quad (51)$$

e a fonte de densidade de energia é dada por

$$\rho = T^{\mu\nu} U_\mu U_\nu. \quad (52)$$

Podemos definir o projetor  $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu$ . Assim achamos a pressão

$$-\frac{1}{3} P_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = p. \quad (53)$$

O tensor de momento-energia pode ser reescrito em termos do projetor como

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p P^{\mu\nu}. \quad (54)$$

Temos ainda os casos de um tensor de momento-energia  $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$ , que é chamado de tensor de momento-energia de poeira, neste caso temos pressão  $p = 0$ , e um

fluido de radiação é descrito  $T^{\mu\nu} = p(U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu})$  neste caso temos equação de estado  $p = 3\rho$ . Definimos então o fator bariotrópico

$$\omega = \frac{p}{\rho} \tag{55}$$

onde esse fator constante assume valores de acordo com o tipo de matéria [5].

matéria	$\omega$
ordinária	0
radiação	$\frac{1}{3}$
curvatura	$-\frac{1}{3}$
vacuo	-1

Nenhuma imposição sobre o tensor de momento-energia é feita a priori [7,14]. Alguns fluidos são repulsivos, outros podem violar causalidade, ou serem ultra-relativísticos essas condições de energia classificam os fluidos quanto a estes critérios que vamos abordar a seguir (Figura 1) Seja um dado vetor tipo tempo  $t^\mu = \gamma(1, a, b, c), \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}}$ , com  $g_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta$  portanto  $a^2 + b^2 + c^2 < 1$ , tenhamos  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  e para um vetor nulo  $l^\mu = (1, a', b', c'), 1 = a'^2 + b'^2 + c'^2$ , temos  $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ . Deduzimos disso que

$$\rho = T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu, T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = (\rho + p)(U_\mu l^\mu)^2. \tag{56}$$

Isso implica  $\rho \geq 0$  e  $(\rho + p) \geq 0$ . Surge então a chamada condição de energia Fraca

### 5.1. Condição de energia fraca

Vamos analisar a condição de eneria fraca

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = (\rho + a^2p + b^2p + c^2p) \geq 0, \tag{57}$$

se fazemos  $a = b = c = 0$  temos  $\rho \geq 0$ , alternativamente fazemos duas das constantes nulas, por exemplo  $b = c = 0$  e  $a = 1$  temos  $(\rho + p) \geq 0$ . Escrevemos então

$$\rho \geq 0; (\rho + p) \geq 0. \tag{58}$$

Podemos ainda fazer  $\frac{\rho+p}{\rho} = 1 + \frac{p}{\rho}$ , fluidos barotrópicos são conhecidos pela equação de estado  $p = \omega\rho$ , então reescrevemos a condição de energia fraca

$$\omega \geq -1 \tag{59}$$

Essa condição esta associada a causalidade do escoamento do fluido. Portanto o fluido escoo respeitando o cone de luz [12]. Existe uma versão mais fraca dessa condição de energia, que passamos abordar agora

### 5.2. Condição de energia nula

Procedendo da mesma forma que procedemos para a condição de energia fraca [10–12], porém usamos vetores tipo luz, assim

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0, \tag{60}$$

onde  $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = \rho + a'^2p + b'^2p + c'^2p \geq 0$ , se fizermos  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$  então

$$\rho + p \geq 0, \tag{61}$$

essa condição admite densidade negativa  $\rho < 0$ , em casos de fluidos ultra-relativísticos, por isso  $l^\mu l_\mu = 0$  Usamos vetores tipo luz.

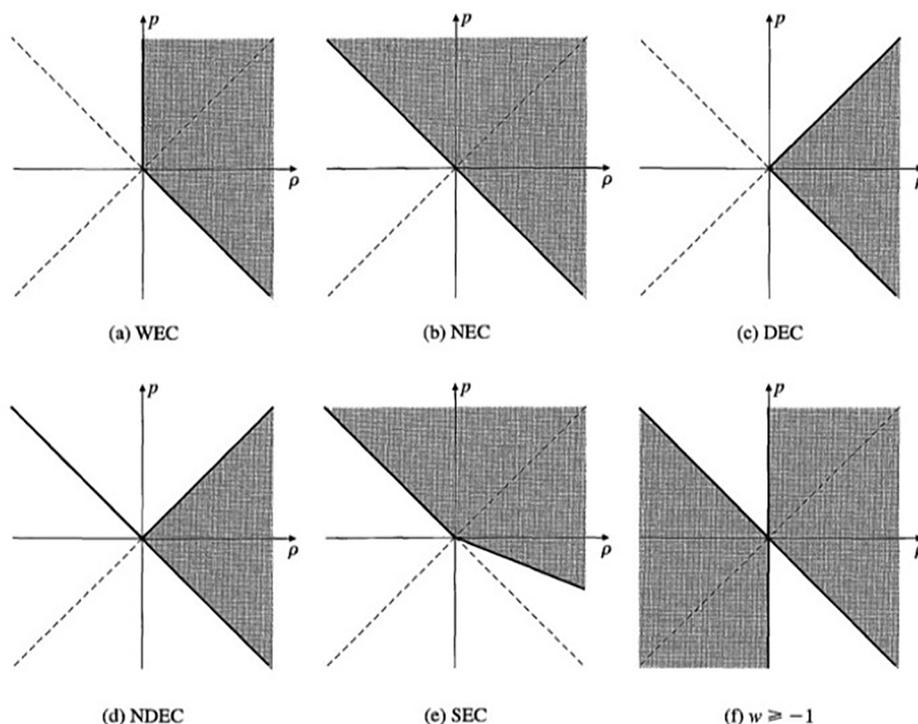


Figura 1: As condições de energia são aplicadas a fluidos perfeitos. Representando valores possíveis de densidade de energia e pressão. [5]

### 5.3. Condição de energia dominante

Um observador com quadri-velocidade  $U^\mu$ , vera uma quadri-corrente  $-T^\mu_\nu U^\nu$ , ou seja, temos que  $-T^\mu_\nu U^\nu$  não pode ser tipo-espaço, que é equivalente a dizer  $T_{\mu\nu} T^\nu_\lambda t^\mu t^\lambda \leq 0$  então temos

$$T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0; T_{\mu\nu} T^\nu_\lambda t^\mu t^\lambda \leq 0. \tag{62}$$

De  $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$ , obtemos  $\rho \geq 0$ . A quadri-corrente não ser um vetor tipo-espaço, o que implica que  $\gamma^2 (-\rho^2 + (a^2 + b^2 + c^2)p^2)$ , se fizermos  $b = c = 0$ , ficamos com  $\rho^2 \geq a^2 p^2$  e  $a < 1$ , isso implica que  $\rho \geq |p|$ . Escrevemos finalmente

$$\rho \geq 0; \rho \geq |p|. \tag{63}$$

As condições de energia acima não são as únicas, vamos enunciar mais duas condições de energia, que são associadas à presença de campo gravitacional. Faremos isso depois de algumas considerações sobre o tensor de momento-energia em espaços curvos

## 6. Tensor de momento-energia como fonte para o campo gravitacional

A ação dos campos gravitacionais em relatividade geral é associada à curvatura do espaço-tempo, estes espaços-tempo são associadas à variedades riemaninas [5]. A curvatura dessas variedades é medida pelo tensor de Riemann que definimos a seguir

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa}, \tag{64}$$

temos que a conexão define a variedade sob a qual estamos trabalhando, no caso os simbolos de Christoffel

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \tag{65}$$

O tensor de Ricci é encontrado fazendo a contração  $\lambda = \nu$ , ou seja

$$R_{\mu\kappa} = R^\nu_{\mu\nu\kappa}. \tag{66}$$

O escalar de Ricci é então

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \tag{67}$$

esses objetos caracterizam a curvatura do espaço-tempo. Podemos agora definir a ação de Hilbert-Einstein [5]

$$S_H = \int R \sqrt{-g} d^4x, \tag{68}$$

usando o acoplamento minimo com uma ação de matéria  $S_m$ , temos

$$\delta S = \delta S_H + 8\pi \delta S_M = 0, \tag{69}$$

onde  $G = c = 1$  ou seja

$$\delta S = \int \left( \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{g}L_M)}{\partial(\partial_k g^{k\nu})} \delta(\partial_k g^{k\mu}) \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \tag{70}$$

sendo  $\mathcal{L}_M = \sqrt{-g}L_M$  a densidade de lagrangiana de matéria. Rearranjando os termos, temos

$$\delta S = \int \left( \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{R}{2\sqrt{-g}} - \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \times \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{71}$$

chamamos o tensor de momento-energia

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{72}$$

onde  $R_{\mu\nu} = \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}$ , chegamos então a equação de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{R}{2} g^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu} = 0, \tag{73}$$

escrevendo o tensor de Einstein  $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{R}{2} g^{\mu\nu}$ , temos

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \tag{74}$$

com  $G = c = 1$

Pela idêntidade de Bianchi temos [5]:

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0 \tag{75}$$

se contrairmos essa expressão, temos

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\mu R_{\rho\mu} = 0, \tag{76}$$

ou seja,

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\rho R, \tag{77}$$

assim chegamos a a conservação do tensor de momento-energia

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = \nabla_\mu \left[ R^{\mu\nu} - \frac{R}{2} g^{\mu\nu} \right] = 8\pi \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{78}$$

A conservação do tensor de momento-energia gera a chamada equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov.

Podemos agora estudar duas condições de energia, associadas a regimes gravitacionais.

### 6.1. Condição de energia nula dominante

Consideremos agora duas condições de energia

$$T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \geq 0; T_{\mu\nu} T^\nu_\lambda l^\mu l^\lambda \leq 0, \tag{79}$$

a primeira  $T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu$ , ja foi mencionada e implica  $\rho + p \geq 0$ , por sua vez  $T_{\mu\nu} T^\nu_\lambda l^\mu l^\lambda = \rho^2 + (a'^2 + b'^2 + c'^2)p$ . Sabemos que  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ , logo  $\rho + p \leq 0$ . Logicamente a única condição restante é  $p = -\rho$ . Essa condição de energia exclui todas as fontes, excluidas pela Condição de energia dominante, exceto a energia do vácuo [12]

$$p = -\rho. \tag{80}$$

Da equação (49), vemos que  $T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu}$  A condição de energia nula está associada à constante cosmológica. A solução da equação de Einstein para este tipo de tensor de momento-energia, implica em um espaço-tempo dito maximal  $R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$  [5, 10–12].

### 6.2. Condição de energia forte

Essa condição está ligada à gravidade atrativa, usando a equação de Einstein  $R_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$ , temos

$$R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)t^\mu t^\nu \geq 0, \quad (81)$$

$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  implica  $\rho + p \geq 0$ , já  $\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = -\frac{1}{2}(\rho - 3p)$  pela equação (51). Então  $R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})t^\mu t^\nu = \rho + p + \frac{1}{2}(\rho - 3p) \geq 0$ , como  $\rho + p \geq 0$  so nos resta escrever que  $\rho - 3p \geq 0$ . Escrevemos finalmente

$$\rho + p \geq 0; \rho - 3p \geq 0. \quad (82)$$

A violação dessa condição gera gravidade repulsiva.

### 6.3. Demonstração da TOV isotrópica: fluido ideal em uma métrica genérica

Partimos da equação (49) e derivamos  $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ , então

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (p + \rho)U^\mu U^\nu + (\rho + p)((\nabla_\mu U^\mu)U^\nu + U^\nu \nabla_\mu U^\mu) + \nabla_\mu p g^{\mu\nu}. \quad (83)$$

A equação da continuidade, ou de conservação de massa é  $\nabla_\mu(\rho U^\mu) = U^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p)\nabla_\mu U^\mu = 0$ , vemos então que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = (\nabla_\mu p)U^\mu U^\nu + (\rho + p)U^\nu \nabla_\mu U^\mu + (\nabla_\mu p)g^{\mu\nu}. \quad (84)$$

Sabemos que  $\nabla_\mu U^\nu = \partial_\mu U^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu U^\alpha$ , e que temos quadri-velocidade  $U^t = \sqrt{g^{00}}, U^1 = 0$ . Portanto a única componente diferente de zero da derivada da 4-velocidade é  $\nabla_r U^t = \partial_r(\sqrt{g^{tt}}) + \Gamma_{tr}^t \sqrt{g^{tt}}$ , escrevemos pois

$$(\nabla_\mu p)g^{00} + (\rho + p)\sqrt{g^{00}}\nabla_\mu \sqrt{g^{00}} + (\nabla_\mu p)g^{00} = 0, \quad (85)$$

contraíndo com a métrica

$$2\nabla_\mu p + (\rho + p)\sqrt{g^{00}}\Gamma_{00}^\nu g^{tt} g_{\mu\nu} g^{00} = 0, \quad (86)$$

finalmente

$$\nabla_\mu p = -(\rho + p)\sqrt{g^{00}}\Gamma_{00}^\nu g^{00} g_{\mu\nu} (g^{00})^{-1} \quad (87)$$

chegamos então a equação que representa a conservação da massa-energia

$$\nabla_\mu p = -(\rho + p)\sqrt{g^{00}}\Gamma_{00}^\nu g_{\mu\nu}. \quad (88)$$

### 6.4. Demonstração da TOV Isotrópica: métrica de um objeto esférico

Vamos estudar a equação de Tollemam-Openheimer-Volkov (TOV) para uma dada distribuição de massa esférica. A TOV é a equação que corresponde ao equilíbrio hidrostático de um fluido relativístico. Podemos também interpretar a TOV como a conservação do tensor de

momento-energia [16]. A métrica de uma distribuição esférica de massa  $m$

$$ds^2 = -e^{\Phi(r)}dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)d\phi^2), \quad (89)$$

sendo a métrica dada em forma matricial

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Podemos então calcular os símbolos de Christoffel associados à métrica de uma distribuição esférica

$$\Gamma_{tr}^t = \Phi', \quad (91)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \Phi' e^{2\Phi} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (92)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{rm' - m}{r^2 - 2mr}, \quad (93)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (94)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = -\sin(\theta) \cos(\theta), \quad (95)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \Gamma_{\phi\phi}^\theta = \csc^2(\theta), \quad (96)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = 2m - r. \quad (97)$$

Aqui é preciso dizer que estamos usando um sistema de unidades em que massa e raio tem a mesma unidade. O tensor de Ricci associado a essas conexões têm as seguintes componentes

$$R_{tt} = e^{2\Phi} \left[ (\Phi'' + \Phi'^2) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + \Phi' \left(\frac{2r - 3m - rm'}{r^2}\right) \right], \quad (98)$$

$$R_{rr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[ \frac{(rm' - m)(2 + rm')}{r^3} \right] - \Phi'' - \Phi'^2, \quad (99)$$

$$R_{\theta\theta} = \csc^2(\theta)R_{\phi\phi} = (2m - r)\Phi' + m' + \frac{m}{r}. \quad (100)$$

O escalar de Ricci é

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2 \left[ \frac{2m'}{r} + \Phi'(3m - 2r + rm') - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (\Phi'' + \Phi'^2) \right]. \quad (101)$$

Usando a componente  $rr$  da equação de Einstein que se lê

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \left( \Phi' - \frac{m}{1 - \frac{2m}{r}} \right) = \frac{8\pi p}{1 - \frac{2m}{r}}, \quad (102)$$

achamos então

$$\Phi' = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}. \tag{103}$$

A componente  $tt$  é

$$G_{tt} = \frac{2m'e^{2\Phi}}{r^2} = 8\pi\rho e^{2\Phi} \tag{104}$$

onde  $m' = \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2$ , é a equação da continuidade . Podemos escrever o tensor de momento-energia

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2m}{r})p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \frac{\csc^2(\theta)}{r^2} \end{bmatrix}. \tag{105}$$

Dado que as funções são dependentes da coordenada  $r$ , temos a derivada covariante do tensor de momento-energia.

$$\nabla_r T^{r\nu} = \partial_r T^{r\nu} + T^{\sigma\mu} \Gamma_{\sigma\mu}^r + T^{r\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^r \tag{106}$$

$$\begin{aligned} \partial_r T^{rr} + T^{rr}(\Gamma_{r\nu}^\nu + \Gamma_{rr}^r) + T^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r + T^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r \\ = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[\frac{dp}{dr} + (\rho + p)\Phi'\right] = 0, \end{aligned}$$

assim a TOV

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{m + 4\pi pr^3}{r(r - 2m)}, \tag{107}$$

junto com a equação da continuidade ,

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2, \tag{108}$$

formam as chamadas equações de estrutura para uma estrela [16].

### 7. Fluido anisotrópico

Definindo o tensor de momento-energia de um gás ideal anisotrópico [9, 13]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p_t)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} + (p_t - p)s^\mu s^\nu \tag{109}$$

onde  $s^\mu$  é perpendicular a quadri-velocidade de escoamento do fluido  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ,  $s^\mu U_\mu = 0$ , Em termos matriciais

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_t \end{bmatrix}. \tag{110}$$

O Elemento

$$\Delta = p_t - p \tag{111}$$

é o chamado fator anisotrópico,  $\Delta > 0, p_t > p$ , ou seja, um fator repulsivo, ou  $\Delta < 0, p_t < p$ , neste caso a anisotropia colabora com a ação gravitacional O traço do tensor de momento-energia é

$$T = \rho - p - 2p_t. \tag{112}$$

Vamos agora estudar as limitações conhecidas como condições de energia [?, 13]. Vamos gerar condições de energia semelhantes as condições para o caso isotrópico, semelhantes no sentido que os vetores tipo-tempo e tipo-luz, serão escolhidos para se adequarem ao tensor de momento-energia com componentes diferentes.

#### 7.1. Condição de energia fraca

Como nas seções anteriores a condição de energia fraca é

$$T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0 \tag{113}$$

sendo  $t^\mu$  vetor tipo-tempo, estabelecemos que  $t^\mu = (1, a, b, c)$ , então  $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu = \rho + ap + bp_t + cp_t$ . Escolhendo  $a = b = c = 1$  chegamos à positividade do traço

$$\rho + p + 2p_t \geq 0. \tag{114}$$

Aqui o fator barotrópico fica modificado  $1 + \omega + 2\frac{p_t}{\rho} \geq 0$

$$\omega \geq -1 - 2\frac{p_t}{\rho} \tag{115}$$

a causalidade fica então modificada, passando a levar em conta a pressão tangencial.

#### 7.2. condição de energia nula

Usando os vetores nulos  $l^\mu = 1, a', b', c'$  a condição de energia nula é

$$T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \geq 0. \tag{116}$$

Verificamos pois que,  $T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = \rho + a'^2 p + (b'^2 + c'^2) p_t$ , escolhendo  $b' = c' = 0$ , obrigatoriamente temos  $a' = 1$ , ficamos com  $\rho + p \geq 0$ , alternativamente fazemos  $a' = 0$  ficamos com  $\rho + p_t \geq 0$ , então

$$\rho + p \geq 0, \rho + p_t \geq 0. \tag{117}$$

Ficamos com duas inequações semelhantes, que represetam condições para fluidos ultra-relativísticos.

#### 7.3. condição de energia dominante

A condição de energia dominante é

$$T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0, T_{\mu\nu} T_\lambda^\nu t^\mu t^\lambda \leq 0. \tag{118}$$

De  $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$ , obtemos  $\rho \geq 0$ . A quadri-corrente não ser um vetor tipo-espaço implica que  $\gamma^2 (-\rho^2 + (a^2 p^2 + (b^2 + c^2) p_t))$ , se fizermos  $b = c = 0$ , ficamos com  $\rho^2 \geq a^2 p^2$  e  $a < 1$ , implica que  $\rho \geq |p|$ . Seguindo um raciocinio similar  $a = 0$ , chegamos a  $\rho \geq |p_t|$ . Escrevemos finalmente

$$\rho \geq 0; \rho \geq |p|; \rho \geq |p_t|. \tag{119}$$

### 7.4. condição de energia nula-dominante

A condição de energia nula dominante é expressa

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0; T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu l^\mu l^\nu \leq 0 \quad (120)$$

$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu$ , já foi calculada e implica  $\rho + p \geq 0, \rho + p_t \geq 0$ , por sua vez  $T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu l^\mu l^\nu = \rho^2 + a'^2 p + (b'^2 + c'^2)p_t$ . Sabemos que  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ ,fazendo  $b' = c' = 0$  logo  $\rho + p \leq 0$ . Logicamente a única condição restante é  $p = -\rho$ . Podemos ainda fazer  $a' = 0$ , implicando que  $\rho + p_t \leq 0$ . Portanto temos tambem  $p_t = -\rho$ , logo a energia do vácuo não é anisotrópica. Resumindo

$$p_t = p = -\rho \quad (121)$$

expressa os resultados.

### 7.5. condição de energia forte

Essa condição esta ligada à gravidade atrativa, usando a equação de Einstein temos  $R_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$

$$R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) t^\mu t^\nu \geq 0, \quad (122)$$

novamente  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ , implica  $\rho - p - 2p_t \geq 0$ , já  $\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = -\frac{1}{2}(\rho - p - 2p_t)$  pela equação (112). Entao  $R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) t^\mu t^\nu = \rho + p + 2p_t + \frac{1}{2}(\rho - p - 2p_t) \geq 0$ , como  $\rho + p + 2p_t \geq 0$  só nos resta escrever que  $\rho - p - 2p_t \geq 0$ . Escrevemos finalmente

$$\rho + p + 2p_t \geq 0; \rho - p - 2p_t \geq 0. \quad (123)$$

A violação dessa condição gera gravidade repulsiva.

### 7.6. Demonstração da TOV anisotrópica

A exemplo do que fizemos no caso isotrópico, escrevemos aqui a métrica em termos de funções métricas  $\nu(r), \lambda(r)$  [9].

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (124)$$

podemos agora usar a equação de Einstein (78). A componente  $tt$  é

$$e^{-\lambda(r)} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho \quad (125)$$

e a componente  $rr$

$$e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p, \quad (126)$$

a componentes angular  $\theta\theta$  gera

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\nu')^2 + \nu'' - \frac{1}{2}\lambda'\nu' + \frac{1}{r}(\nu' - \lambda')\right) = 8\pi p_t. \quad (127)$$

A equação para  $p_t$  representa a pressão anisotrópica, aqui se manifesta a diferença com o caso isotrópico . Esse é o modelo usual para estrelas estranhas anisotrópicas.

Consideremos o equilibrio hidroestático [20]

$$F_g + F_{Hidro} + F_{anisio} = 0, \quad (128)$$

onde  $F_g = \frac{1}{2}(\rho+p)d_r\nu(r)$  é a força gravitacional,  $F_{hidro} = -\frac{dp}{dr}$  a força hidroestática e a força anisotrópica  $F_{ani} = 2\frac{\nu(r-p)}{r}$ . Podemos então escrever a TOV na sua versão anisotrópica como

$$\frac{dp}{dr} = -m\frac{\rho+p}{r^2}\frac{d\nu(r)}{dr} + \frac{2}{r}(p_t - p) \quad (129)$$

A primeira parcela da TOV é idêntica ao caso isotrópico, pois as equações (102) são muito similtares a equação (126).  $\nu'(r) = \Phi'(r)$ . Temos escrevemos finalmente a TOV. Assim como

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho+p)\frac{m+4\pi pr^3}{r(r-2m)} + \frac{2}{r}(p_t - p) \quad (130)$$

que é a TOV isotrópica .

## 8. A constante cosmológica

Também é possível construirmos um tensor de momento-energia levando em conta a interação da matéria com a constante cosmológica. Neste caso a equação de Einstein é modificada para

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (131)$$

a versão homogênea desta equação seria a equação de Einstein para o vácuo, conhecida como equação de De Sitter [5, 10–12, 21],

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (132)$$

tem como solução

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (133)$$

um tensor de Ricci proporcional a métrica, poderíamos alternativamente pensar em um tensor energia momento proporcional a métrica  $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ , essa condição, é associada a métrica de De Sitter

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} dl^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2) \quad (134)$$

e o tensor energia momento proporcional a métrica, implica em uma equação de estado 49

$$p = -\rho \quad (135)$$

[10, 11], tendo um fator barimétrico  $\omega = -1$ , uma equação de estado deste tipo, obedece a condição de energia NDEC

Para efetivamente calcularmos a TOV precisamos de uma métrica [21] assim usamo

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (136)$$

explicitando as componentes da métrica  $g_{tt} = e^\nu, g_{rr} = -e^\lambda, g_{\theta\theta} = -r^2, g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2(\theta)$  e usando a relação

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \tag{137}$$

escrevemos então a métrica na forma matricial

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \end{bmatrix}, \tag{138}$$

aqui as funções métricas  $\nu = \nu(r)$  e  $\lambda = \lambda(r)$ . Calculamos o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ , lembrando sempre que  $R_\beta^\alpha = g^{\alpha\mu} R_{\mu\beta}$ . Escrevemos as componentes da equação de Einstein.

Componente  $tt$ :

$$G_t^t = -8\pi T^t_t \tag{139}$$

$$8\pi\rho = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \tag{140}$$

Componente  $rr$ :

$$G_r^r = 8\pi T_r^r, \tag{141}$$

$$8\pi p = e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda \tag{142}$$

para uma estrela estática consideramos

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} = 0. \tag{143}$$

Assim a derivada covariante do tensor de momento-energia que induz o seguinte resultado

$$(\rho + p)(\partial_\mu u_\sigma)u^\mu + \partial_\sigma p + \partial_\mu p u^\mu u_\sigma = 0. \tag{144}$$

Lembramos a componente  $rr$  da métrica  $g_{rr} = -e^\lambda$ , então

$$(\rho + p)(\partial_\mu u_t)u^\mu - \partial_r p = 0, \tag{145}$$

assim

$$\partial_r p = -\frac{(\rho + p)}{2} \frac{d\nu}{dr}. \tag{146}$$

Definimos agora a massa para uma casca esférica de raio  $r$  como

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \tag{147}$$

diferenciando a massa e substituindo na componente temporal da equação de Einstein (140) obtemos

$$\frac{dm}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[ e^{-\lambda} r - r + \frac{\Lambda r^3}{3} \right], \tag{148}$$

integrando temos

$$2 \int_0^r \frac{dm}{dr} dr = - \int_0^r \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[ e^{-\lambda} r - r + \frac{\Lambda r^3}{3} \right] dr, \tag{149}$$

assim chegamos finalmente que a componente  $rr$  da métrica

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{\Lambda r^3}{3}, \tag{150}$$

somando as componentes radial e temporal da equação de Einstein, respectivamente as equações (140),(142), temos :

$$8\pi(\rho + p) = \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{r} + \frac{e^{-\lambda} \nu'}{r}. \tag{151}$$

Derivando a equação (150) com respeito a coordenada radial temos

$$\lambda' e^{-\lambda} = \frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^2} + \frac{2\Lambda r}{3} \tag{152}$$

substituímos agora as equações (152), (150) na equação (151) obtemos

$$8\pi(\rho + p) = \left( \frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^3} + \frac{2\Lambda}{3} \right) + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \tag{153}$$

substituindo (146) na equação (153) chegamos finalmente a TOV com constante cosmológica:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \left( 1 + \frac{p}{\rho} \right) \frac{m + 4\pi p r^3 - \frac{\Lambda r^3}{3}}{r^2 \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)}. \tag{154}$$

A introdução da constante cosmológica gera um efeito interessante, se fizermos  $m = 0$ , termos um efeito associado à pressão do vácuo

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \left( 1 + \frac{p}{\rho} \right) \frac{4\pi p r^3 - \frac{\Lambda r^3}{3}}{r^2 \left( 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)}. \tag{155}$$

Costumamos considerar que a equação de estado do vácuo é  $p = -\rho$ , obedecendo a condição de energia (79), induziria a equação acima a ser (155) idênticamente nula, logo a pressão do vácuo fosse uma constante. Contudo se considerarmos o efeito do termo da constante cosmológica como uma pressão extra, de forma semelhante ao que fazemos na presença de pressão tangencial, poderíamos considerar que a parte associada à constante ( $\Lambda > 0$ ) cosmológica fosse uma anisotropia. Uma pressão extra negativa, que tenta compensar os efeitos da pressão radial.

## 9. Conclusão

O estudo do tensor de momento-energia é um tópico fundamental em relatividade, a revisão das condições clássicas de energia é uma necessidade dado a sua relevância para diversas linhas de pesquisa em astrofísica e cosmologia. O surgimento de fluidos relativísticos escuros e exóticos, traz a necessidade de revisarmos a suas condições de energia em especial quanto a causalidade. A anisotropia do tensor de momento-energia é um tema que ainda suscita muitas dúvidas entre os discentes e a constante cosmológica vem cada vez mais sendo associada a objetos ultra-densos. Revisamos estes temas

calculando a conservação do tensor de momento-energia, buscamos contribuir com a discussão acerca das condições de energia, tanto no caso isotrópico como anisotrópico, identificando exatamente qual a condição de energia associada à energia do vácuo.

Pretendemos no futuro estender essa revisão a fluidos com simetria esférica e a fluidos exóticos, assim como o fenômeno da superfluides, que cada vez mais se torna importante tanto no estudo de matéria de quark, quanto no estudo de fluidos escuros.

## Referências

- [1] V. A. Bezerra, Revista Latino americana de filosofia e história da ciência **4**, 177 (2006).
- [2] G. A. ToBkaty, *A history and philosophy of fluid mechanics* (Dover Publications, New York, 1994).
- [3] L. D. Landau and E.M. Lifschitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [4] J. Frenel, *Princípios da Eletrodinâmica Clássica* (EDUSP, São Paulo, 2005).
- [5] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison-Wesley Professional, Boston, 2004).
- [6] S. W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [7] C. S. Santos, *Condições de Energia de Hawking-Ellis e as equações de Raychaudhury*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2011).
- [8] A. R. Liddle, arXiv:astro-ph/9901124v1 (1999).
- [9] M. Kalam, F. Rahaman, S. Ray, S.K.M. Hossein, I. Karar and J.Naskar, arXiv:1201.5234 (2012).
- [10] S. M. Carroll, Living Rev. Relativ. **4**, 5 (2001).
- [11] S. M. Carroll, arXiv:astro-ph/0107571 (2001).
- [12] S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, Phys.Rev. D **68**, 023509 (2003).
- [13] R. Chan, M.F.A. da Silva and J.F. Villas da Rocha, Modern Physics Letters A **24**, 1137 (2009).
- [14] F. M. Santos, *Fluidos Ideias em Relatividade Geral e Cosmologia*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória (2016).
- [15] F. S. Bemfica, M.M. Disconzi and J. Noronha, Phys. Rev. D **98**, 104064 (2018).
- [16] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity* (Springer Verlag, New York, 1997).
- [17] H. Rodrigues, S.B. Duarte and J.C.T. Oliveira, The Astrophysical Journal **30**, 1 (2011).
- [18] G. E. Volovik, Phys.Rept. **351** 195 (2001).
- [19] R. Dey, S. Liberati and R. Turcati, Phys. Rev. D **94**, 104068 (2016).
- [20] J. R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
- [21] O. Zubairi, A. Romero and F. Weber, Journal of Physics: Conference Series **615** (2015).