

Finite element model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams and plane frames

Modelo de elementos finitos para análise não linear de vigas e pórticos planos de concreto armado



R. S. B. STRAMANDINOLI ^a
renatastramandinoli@hotmail.com

H. L. LA ROVERE ^b
henriettelarovere@gmail.com

Abstract

In this work, a two-dimensional finite element (FE) model for physical and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete beams and plane frames, developed by the authors, is presented. The FE model is based on the Euler-Bernoulli Beam Theory, in which shear deformations are neglected. The bar elements have three nodes with a total of seven degrees of freedom. Three Gauss-points are utilized for the element integration, with the element section discretized into layers at each Gauss point (Fiber Model). It is assumed that concrete and reinforcing bars are perfectly bonded, and each section layer is assumed to be under a uniaxial stress-state. Nonlinear constitutive laws are utilized for both concrete and reinforcing steel layers, and a refined tension-stiffening model, developed by the authors, is included. The Total Lagrangean Formulation is adopted for geometric nonlinear consideration and several methods can be utilized to achieve equilibrium convergence of the nonlinear equations. The developed model is implemented into a computer program named ANEST/CA, which is validated by comparison with some tests on RC beams and plane frames, showing an excellent correlation between numerical and experimental results.

Keywords: nonlinear analysis, finite element, reinforced concrete, beams, plane frames.

Resumo

Neste trabalho apresenta-se um modelo de elementos finitos de barra bidimensional, desenvolvido pelas autoras, para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. A formulação do elemento é baseada na teoria de Euler-Bernoulli, em que se desprezam as deformações por cisalhamento. Os elementos de barra possuem três nós e um total de sete graus de liberdade, sendo utilizados três pontos de Gauss para integração do elemento, com a seção transversal discretizada em camadas em cada ponto de Gauss (Método das Lamelas). Admite-se que o concreto e as barras de armadura têm uma aderência perfeita entre si e considera-se que cada camada da seção está submetida a um estado uniaxial de tensões. São utilizadas leis constitutivas não lineares para as camadas de concreto e de armaduras de aço, incluindo-se um modelo refinado de tension-stiffening desenvolvido pelas autoras. Adota-se a formulação Lagrangeana Total para consideração da não-linearidade geométrica e podem-se utilizar vários métodos para convergência de equilíbrio das equações não lineares. O modelo desenvolvido é implementado em um programa computacional denominado ANEST/CA, o qual é validado em comparação com alguns ensaios de vigas e pórticos planos de concreto armado, observando-se uma ótima correlação entre resultados numéricos e experimentais.

Palavras-chave: análise não linear, elementos finitos, concreto armado, vigas, pórticos planos.

^a Departamento Acadêmico de Construção Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil;
^b Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

1. Introdução

Devido ao avanço tecnológico e à utilização de materiais mais resistentes, estruturas mais complexas e mais esbeltas vêm sendo projetadas atualmente, surgindo assim a necessidade de métodos computacionais mais elaborados para a análise e projeto estrutural. Para análise estrutural de estruturas de concreto armado (CA), os métodos mais refinados devem levar em conta o seu comportamento não linear, tanto devido aos efeitos de não linearidade dos materiais (não linearidade física) como devido a mudanças da configuração da estrutura (não linearidade geométrica). Entre os métodos mais refinados, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais utilizados atualmente, sendo utilizados para estruturas planas tanto elementos de barra como elementos planos. Ainda são poucos os programas comerciais que efetuam análise não linear por elementos finitos de estruturas de CA, sendo o seu custo elevado em comparação com outros programas. Devido a esse fato os modelos refinados de elementos finitos (EF) estão sendo utilizados primordialmente por pesquisadores e acadêmicos, sendo que muitos pesquisadores optam por desenvolverem seus próprios modelos e programas computacionais. Embora vários modelos não lineares de EF já tenham sido desenvolvidos, esse ainda é um tema avançado no meio técnico-científico, tendo em vista a dificuldade de se modelar corretamente o concreto armado, devido à fissuração do concreto, ao escoamento do aço e à interação entre os dois materiais. Sendo assim, o desenvolvimento de modelos que combinem eficiência computacional e boa acurácia deve ser cada vez mais incentivado (Silva e Matos [1]). Neste trabalho dá-se ênfase ao modelo de EF de barra, por resultarem em um número reduzido de graus de liberdade em comparação com o de elementos planos, viabilizando a análise de estruturas maiores, que é o objetivo do projeto de pesquisa em desenvolvimento na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), do qual participam as autoras.

Os primeiros modelos de EF de barra foram desenvolvidos na década de 60 e limitavam-se ao estudo de elementos estruturais e pequenas estruturas, utilizando modelos constitutivos simplificados. Um dos primeiros modelos foi o de Giberson [2], que consistia de um elemento elástico-linear com uma mola não linear em cada uma de suas extremidades, na qual se utilizavam relações momento-rotação pré-definidas. Desde então houve uma evolução dos modelos de barras, particularmente com a combinação da técnica conhecida como Método das Lamelas ou Camadas (*Fiber Model*), Kaba e Mahin [3], que subdivide a seção do elemento em camadas sobrepostas de concreto e de armadura de aço, utilizando-se leis constitutivas não lineares para os materiais em cada camada. Uma outra contribuição importante na evolução desse tipo de modelo foi a introdução de um nó interno no meio do elemento com um grau de liberdade axial, que, conforme demonstrado por Chan [4], permite a correta representação da rigidez à flexão com a variação da altura da linha neutra devido às não linearidades dos materiais. A não inclusão desse nó interno impõe ao elemento uma restrição de deformação, tornando-o artificialmente mais rígido. Holzer *et al* [5] utilizaram esse tipo de modelo para a análise não linear física e geométrica de vigas/columnas de CA. Marí [6] estendeu esse modelo para elemento de barra tridimensional, com um total de treze graus de liberdade (seis em cada nó

externo e um grau de liberdade axial no nó interno), dividindo a seção em filamentos e levando em conta efeitos no tempo como retração e fluência. No modelo utilizam-se dois pontos de Gauss para a integração da matriz de rigidez e vetor de esforços, mas a matriz constitutiva é avaliada apenas no centro do elemento, desprezando-se a contribuição do concreto tracionado entre fissuras (*tension-stiffening*). A não linearidade geométrica também é considerada, utilizando a formulação Lagrangeana Atualizada. Posteriormente, Marí [7] aprimorou esse modelo, incluindo um modelo de *tension-stiffening* desenvolvido por Carreira e Chu [8]. No Brasil, Schulz e Reis [9] utilizaram um modelo semelhante ao de Marí [6] para análise de estruturas reticuladas tridimensionais de CA, considerando a não linearidade física por meio de equações constitutivas recomendadas por normas (NBR-6118 e CEB 90), sem consideração do efeito *tension-stiffening*, e a não linearidade geométrica a partir da formulação Lagrangeana Total. Existem ainda outros tipos de modelo de EF de barra com formulação em termos de forças ao invés de deslocamentos, como no modelo de Taucer, Spacone e Filippou [10]. No Brasil este tipo de modelo foi utilizado por Teixeira e de Souza [11] na análise tridimensional de um edifício de concreto armado, utilizando o programa OpenSees da Universidade de Berkeley, e validando os resultados em comparação com um modelo de formulação corrotacional e com o método P-delta. O conceito de formulação corrotacional, que permite que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações, assim como que a barra apresente grandes alongamentos e curvaturas, foi apresentado por Pimenta [12]. Pimenta e Soler [13] aplicam esta formulação para analisar uma viga e dois pórticos de CA, utilizando para o concreto à compressão uma lei constitutiva semelhante à da NBR-6118 e desprezando a sua resistência à tração, e considerando o aço como um material elasto-plástico perfeito. Um modelo semelhante, com um sistema de coordenadas corrotacional solidário ao elemento, foi utilizado por Silva e Matos [1]. Os autores usaram o Método das Camadas e consideraram a contribuição de concreto entre fissuras, adotando o modelo de *tension-stiffening* desenvolvido por Vecchio e Collins [14]. Pinto [15] e Carvalho [16] também utilizaram uma formulação corrotacional para a análise não linear física e geométrica de estruturas de CA. Mais detalhes sobre revisão de literatura de modelos de EF para análise de estruturas de CA podem ser consultados em Stramandinoli [17].

Dessa revisão pode-se concluir que os modelos baseados no Método das Forças têm apresentado ótimos resultados, no entanto a sua implementação computacional torna-se mais difícil, principalmente em programas usuais de elementos finitos que utilizam formulação em termos de deslocamentos ao invés de forças. Com relação à não linearidade geométrica, apesar da formulação corrotacional ser mais completa, a hipótese de grandes deslocamentos e rotações moderadas é em geral suficiente para se aproximar o comportamento das estruturas usuais de CA, tais como vigas e pórticos, pois grandes deslocamentos e rotações seriam incompatíveis com a utilização da estrutura. Assim sendo, apresenta-se neste trabalho um modelo de barra bidimensional baseado no modelo desenvolvido por Marí [6], admitindo-se a hipótese de rotações moderadas e utilizando-se a formulação Lagrangeana Total, que é mais fácil de ser implementada computacionalmente em comparação com a formulação corrotacional. A vantagem do modelo deste trabalho em

relação aos modelos semelhantes, citados acima, está na inclusão de um novo modelo de *tension-stiffening* proposto pelas autoras (Stramandinoli e La Rovere [18]), que apresenta uma lei constitutiva para o concreto tracionado entre fissuras que é função da taxa de armadura no elemento de barra, enquanto que, nos modelos anteriores de *tension-stiffening*, Vecchio e Collins [14], Carreira e Chu [8], etc., a mesma equação constitutiva é utilizada independentemente da taxa de armadura. Com isto o modelo proposto consegue representar mais realisticamente o comportamento não linear das estruturas de CA após a fissuração. Outra vantagem do modelo é que a matriz constitutiva é avaliada ao longo do elemento nos três pontos de integração (Regras de Gauss), o que permite o uso de malhas de EF menos refinadas para capturar o espalhamento das não linearidades na estrutura. Em cada ponto de Gauss a seção é discretizada em camadas, considerando-se que cada camada está submetida a um estado uniaxial de tensões. O modelo não considera os efeitos de fluência e retração e limita-se a estruturas planas de CA com comportamento predominante de flexão, desprezando-se a deformação por cisalhamento. Ressalta-se que, para o caso de estruturas em que o efeito de cisalhamento for importante, devem-se utilizar modelos de barras baseados na Teoria de Viga de Timoshenko, como por exemplo, o modelo desenvolvido pelas autoras em Stramandinoli e La Rovere [19] e Stramandinoli [17], ou então modelos de elementos finitos planos, como, por exemplo, os desenvolvidos por d'Avilla [20].

O modelo de EF desenvolvido pelas autoras é apresentado no item 2 a seguir, sendo as equações constitutivas dos materiais utilizadas descritas no item 3. O modelo é implementado computacionalmente no programa denominado ANEST/CA, sendo validado em comparação com um modelo teórico de outro autor para o caso de não linearidade geométrica com grandes deslocamentos, e com alguns ensaios experimentais de vigas, considerando não linearidade física, e de pórticos planos, considerando ambas não

linearidades, conforme apresentado no item 4. Ao final do trabalho, no item 5, são extraídas algumas conclusões.

2. Modelo de elementos finitos

O modelo não linear desenvolvido é baseado no Método dos Elementos Finitos com formulação isoparamétrica, discretizando-se a estrutura em elementos finitos de barra e admitindo-se a hipótese de Euler-Bernoulli, em que se desprezam as deformações por cisalhamento.

O elemento de barra utilizado tem três nós e sete graus de liberdade (Figura [1]). Os dois nós externos apresentam três graus de liberdade, sendo dois de deslocamentos axial e transversal, e uma rotação. O nó interno, no ponto médio do elemento, apresenta apenas um grau de liberdade de deslocamento axial, semelhante ao utilizado por Chan [4] e Marí [6]. Com isso, o campo de deslocamentos horizontal no elemento fica compatível (ver equação 1 adiante, a primeira parcela passa a variar parabolicamente em relação ao eixo horizontal x , assim como a segunda parcela devido à flexão, pois $v(x)$ varia cúbicamente em relação a x). Isso permite que o eixo x possa ter uma posição arbitrária, fixa durante a análise, mas não necessariamente coincidente com a linha dos centróides das seções, e a rigidez do elemento fica corretamente representada com a variação na posição da linha neutra, provocada pela fissuração e demais não linearidades do concreto armado (mais detalhes em Stramandinoli [17]).

Para integração numérica do elemento são utilizados três pontos de Gauss, sendo em cada ponto a seção discretizada em camadas de concreto e de armadura de aço (Método das Lamelas). Admite-se uma aderência perfeita entre os materiais concreto e aço, e que cada camada está submetida a um estado uniaxial de tensões, utilizando-se leis constitutivas não lineares para os materiais, que serão descritas no item 3. Com relação à não-linearidade geométrica, utiliza-se a simplificação para rotações moderadas, com a Formulação Lagrangeana Total.

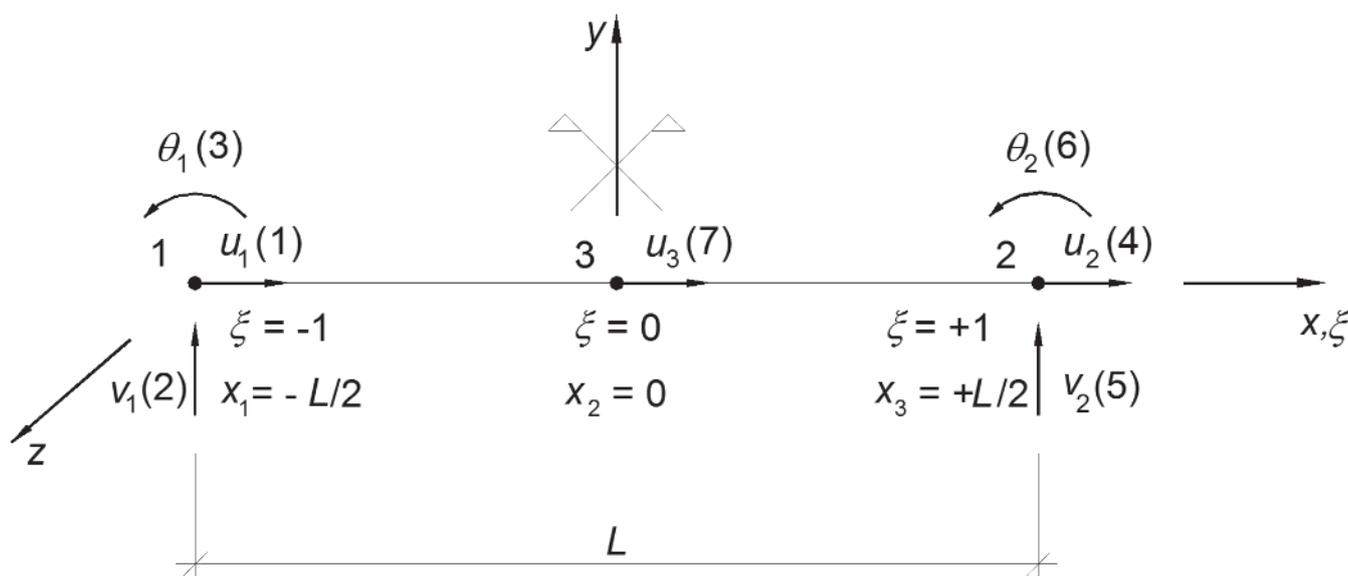


Figura 1 Elemento finito de barra com 3 nós e 7 graus de liberdade, coordenadas cartesianas (x,y,z) e naturais (ξ)

Apresenta-se a seguir a formulação do elemento de barra, inicialmente admitindo-se material elástico-linear e em seguida com a inclusão das não-linearidades, física e geométrica.

Em todas as equações ao longo do texto, as variáveis em negrito representam um vetor ou uma matriz.

2.1 Formulação para material elástico linear

Utilizando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, o campo de deslocamentos ao longo do elemento é dado por:

$$u(x, y) = u_0(x) - y\theta(x); \text{ sendo } \theta = \frac{dv}{dx} \text{ e } v(x, y) = v(x) \quad (1)$$

onde \mathbf{U} é o deslocamento longitudinal, U_0 é o deslocamento longitudinal no eixo de referência, V é o deslocamento transversal e θ é a rotação da seção transversal.

A deformação específica e tensão longitudinal no elemento são:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d\theta}{dx} \quad (2)$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (3)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material elástico-linear.

Introduzindo a coordenada natural $\xi = \frac{x}{L}$, o campo de deslocamentos

em termos dos deslocamentos nodais pode ser escrito como:

$$u(\xi, y) = u_0(\xi) - y\theta(\xi) \quad (4)$$

$$u_0(\xi) = N_a u_1 + N_b u_2 + N_c \alpha_1 \quad (5)$$

$$v(\xi) = N_d v_1 + N_e \theta_1 + N_f v_2 + N_g \theta_2 \quad (6)$$

$$\theta(\xi) = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{2}{L} = \frac{2}{L} [N_d \dot{v}_1 + N_e \dot{\theta}_1 + N_f \dot{v}_2 + N_g \dot{\theta}_2] \quad (7)$$

$$\text{em que: } \dot{\cdot} = \frac{d}{d\xi}$$

e onde α_1 está relacionado com o deslocamento do nó interno, u_3 :

$$u_3(\xi) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \alpha_1 \quad (8)$$

e as demais funções de interpolação $N(\xi)$ são dadas no Anexo. A partir do campo de deslocamentos, pode-se determinar a deformação específica no elemento (ver detalhes no Anexo). Os vetores de deformação específica e de tensão são dados por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x = \mathbf{B}_L \mathbf{U} \text{ e } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_x = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (9)$$

onde \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais; \mathbf{B}_L é a matriz linear

que relaciona deformações específicas com deslocamentos nodais, obtida a partir das equações (2) e (4) a (7):

$$\mathbf{B}_L = [1 \quad -y] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{4\xi}{L} \\ 0 & \frac{6\xi}{L^2} & \frac{3\xi-1}{L} & 0 & \frac{-6\xi}{L^2} & \frac{3\xi+1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\mathbf{D} = E$ é a matriz constitutiva para material elástico-linear, no caso uniaxial.

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais e após algumas manipulações algébricas (Stramandinoli [17], Cook [21]), chega-se à equação que define a matriz de rigidez do elemento:

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \quad (11)$$

e ao vetor de esforços no elemento:

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L \mathbf{U} dV \quad (12)$$

As integrais nas equações (11) e (12) podem ser obtidas por integração numérica, utilizando-se neste trabalho a Regra de Gauss ao longo do eixo longitudinal com três pontos de integração. Em seguida procede-se à condensação estática do sétimo grau de liberdade na matriz de rigidez e no vetor de forças do elemento, a partir dos quais forma-se a matriz de rigidez global e o vetor de forças internas global da estrutura.

2.2 Formulação incluindo apenas a não-linearidade física

Para a formulação incluindo a não linearidade física, além das hipóteses de Euler-Bernoulli, admite-se que: o elemento sofre pequenos deslocamentos e deformações específicas; o concreto e o aço são materiais homogêneos e há aderência perfeita entre eles; a seção transversal dos elementos é discretizada em camadas, admitindo-se que cada camada está submetida a um estado uniaxial de tensão; ocorre o efeito de *tension-stiffening* para o concreto após a fissuração; o aço das armaduras é um material elasto-plástico com encruamento; os esforços totais em cada seção são obtidos superpondo-se os esforços obtidos das resultantes das tensões nas camadas de concreto com as provenientes das tensões nas armaduras de aço.

Com a inclusão da não-linearidade física, as equações (11) e (12) precisam ser modificadas, tendo em vista que as tensões e a matriz constitutiva variam ao longo do elemento, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon)$ e $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\varepsilon)$, sendo assim necessário um processo iterativo para atingir o equilíbrio de forças em cada etapa de carregamento. Para solucionar as equações de equilíbrio não lineares, pode-se utilizar os métodos de Newton-Raphson ou o de Comprimento de Arco (Stramandinoli [17]). As forças são aplicadas incrementalmente, e para cada etapa de carregamento calculam-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento em cada iteração no processo iterativo:

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{B}_L \mathbf{U} dV \quad (13)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva secante do material. É possível demonstrar que a matriz de rigidez tangente \mathbf{k}^t é dada por (Stramandinoli [2]):

$$\mathbf{k}^t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} = \int \frac{\partial \mathbf{B}_L}{\partial \mathbf{U}} \boldsymbol{\sigma} dV + \int \mathbf{B}_L^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{U}} dV = \int \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}^t \mathbf{B}_L dV \quad (14)$$

onde \mathbf{D}^t é a matriz constitutiva tangente do material. Para fins de comparação com a matriz de rigidez conhecida (6 × 6), de um elemento de pórtico plano elástico-linear, apresenta-se no anexo a matriz de rigidez secante (7 × 7) do elemento considerando-se apenas a não linearidade física, a qual apresenta termos de acoplamento entre rigidez axial e de flexão. Na matriz de rigidez inicial elástica, esses termos se anulam para o caso em que o eixo x do elemento passa pelo centróide da seção (momento estático S é nulo).

2.3 Formulação incluindo a não-linearidade física e geométrica

Com relação à não-linearidade geométrica, utiliza-se a simplificação para rotações moderadas, com a Formulação Lagrangeana Total. Pela teoria de rotações moderadas, as equações (1) continuam válidas, no entanto, a deformação específica passa a ser:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (15)$$

Esta deformação pode ser separada em duas partes, uma linear, ε_L , equivalente à dada pela equação (2), e outra não linear, ε_{NL} . Reescrivendo-se em notação matricial tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} \quad (16)$$

onde:

$$\varepsilon_L = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d\theta}{dx} \quad \text{que é a equação (2) vista anteriormente e}$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (17)$$

Escrevendo-se a equação (6) sob a forma matricial:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (18)$$

e a da sua derivada em relação a x:

$$\mathbf{v}_x = \frac{dv}{dx} = \mathbf{N}_x \mathbf{U} \quad \mathbf{v}_x^T = \mathbf{U}^T \mathbf{N}_x^T$$

onde

$$\mathbf{N}_x = [0 \quad N_d \quad N_e \quad 0 \quad N_f \quad N_g \quad 0] ; N = \frac{dN}{dx}$$

Pode-se então reescrever a equação (17) na seguinte forma:

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{N}_x^T \mathbf{N}_x \mathbf{U} \quad (19)$$

A forma incremental da deformação específica é dada por:

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} + \frac{\partial \varepsilon_{NL}}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} \quad (20)$$

Substituindo-se na equação (20) acima as expressões que definem ε_L , equação (9), e ε_{NL} , equação (19), vem:

$$\delta \varepsilon_x = (\mathbf{B}_L + \mathbf{U}^T \mathbf{N}_x^T \mathbf{N}_x) \delta \mathbf{U} \quad (21)$$

ou então

$$\delta \varepsilon_x = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \delta \mathbf{U} \quad \text{onde } \mathbf{B}_{NL} = \mathbf{U}^T \mathbf{N}_x^T \mathbf{N}_x \quad (22)$$

e onde \mathbf{B}_L é a matriz que relaciona deformação específica com deslocamento (linear), equivalente à equação (10).

Para este caso em que ambas as não linearidades são consideradas no modelo, o vetor de forças internas fica sendo:

$$\mathbf{r} = \int (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad \text{em que} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}$$

A matriz de rigidez tangente continua sendo dada pela expressão:

$$\mathbf{k}^t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \boldsymbol{\sigma} dV + \int \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{U}} dV \quad (24)$$

Só que neste caso, derivando-se os termos da equação (24), chega-se a:

$$\mathbf{k}^t = \int (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})^T \mathbf{D}^t (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) dV + \int \mathbf{N}_x^T \mathbf{N}_x \boldsymbol{\sigma} dV \quad (25)$$

Assim, tem-se que a matriz de rigidez tangente \mathbf{k}^t é composta de três matrizes:

- Uma matriz \mathbf{k}_0 obtida para a não-linearidade física, que é dada por:

$$\mathbf{k}_0 = \int (\mathbf{B}_L)^T \mathbf{D}^t (\mathbf{B}_L) dV \quad (26)$$

- Uma matriz que usualmente é definida como matriz geométrica, \mathbf{k}_g , que é dada por:

$$\mathbf{k}_g = \int \mathbf{N}_x^T \mathbf{N}_x \boldsymbol{\sigma} dV \quad (27)$$

- E uma matriz \mathbf{k}_u causada por deslocamentos iniciais ao considerar a estrutura deformada, que é dada pela soma de três componentes:

$$\mathbf{k}_u = \int (\mathbf{B}_L)^T \mathbf{D}^t (\mathbf{B}_{NL}) dV + \int (\mathbf{B}_{NL})^T \mathbf{D}^t (\mathbf{B}_L) dV + \int (\mathbf{B}_{NL})^T \mathbf{D}^t (\mathbf{B}_{NL}) dV \quad (28)$$

Se ao invés dessa Formulação Lagrangeana Total se utilizasse a Formulação Lagrangeana Atualizada, essa última matriz \mathbf{k}_u não entraria na formulação, no entanto seria necessária

a atualização das coordenadas em todas as etapas.

Tanto para este caso em que se consideram ambas as não linearidades, como para o caso de apenas não linearidade física (item 2.2), a matriz de rigidez e o vetor de forças internas são obtidos por integração numérica utilizando-se a Regra de Gauss ao longo do eixo longitudinal com três pontos de integração, e, em cada ponto de Gauss, para obtenção da matriz constitutiva ou do vetor de tensões, somam-se os valores oriundos das camadas de concreto e os das camadas de armadura, a partir das equações constitutivas não lineares para estado uniaxial, descritas a seguir no item 3. Após a formação da matriz de rigidez do elemento e do vetor de forças, é feita a condensação estática para eliminação do sétimo grau de liberdade do elemento e forma-se a matriz de rigidez global e o vetor de forças internas global da estrutura. Para a solução do sistema de equações não lineares, podem-se utilizar tanto os Métodos de Newton-Raphson (Cook [21]), de rigidez tangente ou rigidez inicial, como o Método do Comprimento de Arco (Riks [22] e Wempner [23]), quando o caminho de equilíbrio apresenta ponto limite ou efeito conhecido como *snap-through*. Esse modelo não linear de elementos finitos de barra foi implementado no programa computacional ANEST/CA, denominado anteriormente de ANALEST (Stramandinoli [17]), desenvolvido na linguagem FORTRAN 90.

3. Equações constitutivas uniaxiais

3.1 Concreto sob compressão

Para o concreto submetido à compressão pode-se utilizar no programa ANEST/CA tanto o modelo de Hognestad modificado como o modelo do CEB, sendo que neste trabalho só se utilizou o modelo de Hognestad modificado descrito abaixo.

O modelo de Hognestad [24] já foi utilizado por diversos autores, apresentando bons resultados em comparação com ensaios experimentais. Neste trabalho esse modelo é modificado, utilizando-se uma parábola para representar a curva tensão-deformação para compressão, tanto para o ramo ascendente quanto para o ramo descendente, após o pico:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (29)$$

onde f_{cm} é a resistência à compressão do concreto e ε_0 é a deformação específica correspondente.

3.2 Concreto sob tração

Para o concreto sob tração, utiliza-se neste trabalho nas análises de todos os exemplos o modelo proposto pelas autoras em Stramandinoli e La Rovere [18]. Neste modelo considera-se o material elástico-linear até o concreto atingir a resistência à tração, e, após a fissuração, considera-se o efeito de *tension-stiffening*, descrito pela seguinte equação:

$$\sigma_{ct} = f_{ct} e^{-\alpha \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \right)}; \quad \varepsilon_{cr} < \varepsilon < \varepsilon_y \quad (30)$$

$$\sigma_{ct} = 0; \quad \varepsilon > \varepsilon_y \quad (31)$$

onde:

f_{ct} é a resistência à tração do concreto e ε_{cr} é a deformação específica correspondente; ε_y é o valor de deformação específica correspondente ao escoamento da armadura, após o qual a tensão σ_{ct} cai abruptamente para zero; α é um parâmetro de decaimento exponencial, função da taxa de armadura (ρ) e da relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto (n), definido por:

$$\alpha = 0,017 + 0,255(n\rho) - 0,106(n\rho)^2 + 0,016(n\rho)^3 \quad (32)$$

Esta equação foi determinada para tirantes, onde toda a peça está tracionada, tendo sido validada em comparação com resultados experimentais de barras de concreto armado submetidas à tração pura, com diferentes taxas de armadura, observando-se uma excelente correlação (Stramandinoli e La Rovere [18]). Para a aplicação desse modelo em vigas, deve-se obter a área efetiva da zona tracionada, podendo esta ser estimada pela equação fornecida pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 [25]:

$$A_{ef} = 2,5b(h-d) < \frac{b(h-k_x)}{3} \quad (33)$$

onde

h é a altura total da viga, d é a altura útil, e k_x é a profundidade da linha neutra.

Como em vigas de CA a relação entre a altura total e a altura útil é usualmente dada por $h-d \cong 0,1h$, a área efetiva é aproximadamente igual a:

$$A_{ef} \cong \frac{bh}{4} \quad (34)$$

Esta equação aproximada será utilizada neste trabalho para calcular a taxa de armadura em todos os exemplos de vigas e pórticos, sendo o efeito de *tension-stiffening* considerado apenas nesta área efetiva. Nas análises numéricas em que não se considerou *tension-stiffening*, no gráfico tensão-deformação a tensão cai abruptamente para zero após atingir o limite de resistência à tração, f_{ct} . Ressalta-se que o efeito de *tension-stiffening* é mais acentuado para valores menores do parâmetro α , ou seja, valores menores de taxa de armadura, pois o parâmetro α aumenta com o aumento de ρ e/ou n . Para se ilustrar esse efeito e mostrar a influência da taxa de armadura no modelo de *tension-stiffening* proposto pelas autoras, mostra-se na Figura 2b o gráfico do modelo proposto, variando-se ($n\rho$), em comparação com os modelos de *tension-stiffening* de Vecchio e Collins [14] e o modelo bilinear de Figueiras [26], apresentados na Figura 2a, os quais independem da taxa de armadura.

3.3 Aço das armaduras

Admite-se que o aço das armaduras submetido à tração e à compressão é um material elasto-plástico, representando-se o diagrama tensão-deformação por uma curva bilinear. Para se evitar problemas de convergência e oscilações no processo iterativo, adota-se uma curva parabólica de interpolação entre os trechos

retilíneos do regime elástico e plástico, no trecho entre 0,8 e 1,2 ϵ_y , (La Rovere [27]). Pode-se considerar ou não o encruamento do aço (*strain-hardening*), usando-se um coeficiente denominado sh , que é a razão entre os módulos no regime plástico e no regime elástico ($sh = 0$ para patamar horizontal de escoamento). Denomina-se a deformação máxima na ruptura de ϵ_u e a tensão correspondente de f_u .

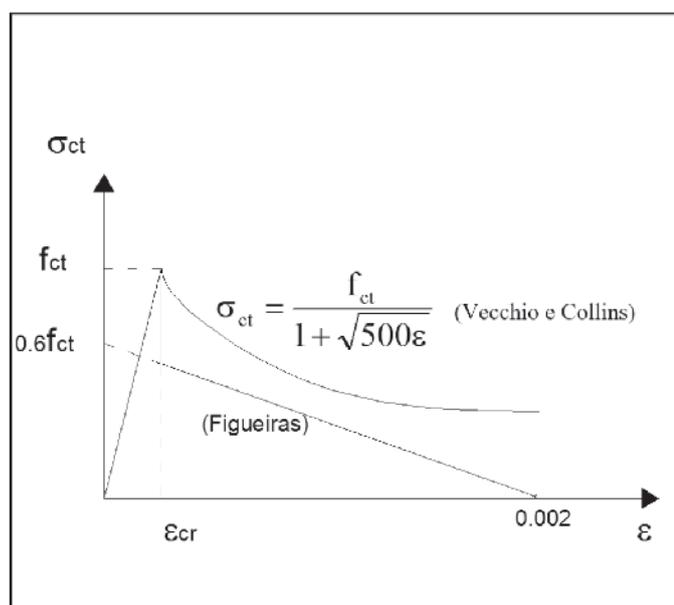
4. Comparações entre resultados do modelo proposto com resultados teóricos e experimentais obtidos por outros autores

Para validar o modelo não linear proposto, foram feitas comparações de seus resultados numéricos com diversos resultados teóricos e experimentais de exemplos de estruturas planas de concreto armado disponíveis na literatura por Stramandinoli [17]. Entre estes, selecionaram-se alguns exemplos de vigas e de pórtico plano para apresentação neste trabalho, dando-se ênfase às estruturas com comportamento predominante de flexão. Escolheu-se um único exemplo de um pórtico plano submetido a grandes deslocamentos, considerando apenas não-linearidade geométrica, a ser comparado com um modelo teórico (item 4.3). Os demais exemplos, de vigas de CA considerando-se a não linearidade física, e de pórticos planos de CA considerando-se ambas não linearidades, física e geométrica, serão comparados com ensaios experimentais.

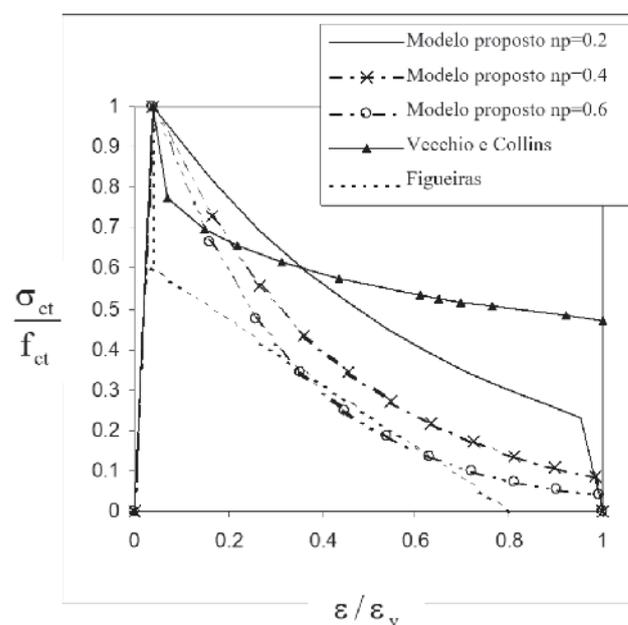
Com relação à escolha da malha de EF, estudos paramétricos

desenvolvidos por Stramandinoli [17] em vigas bi-apoiadas mostraram que, para o caso de flexão a 4 pontos, em que o vão central está submetido à flexão pura, a solução com 4 elementos praticamente coincide com a de 24 elementos, mostrando assim que o modelo é objetivo, sem dependência da malha, e, para o caso de uma carga concentrada aplicada no meio do vão houve convergência da solução para malhas a partir de 10 elementos. Já na análise de um pórtico plano bi-engastado de um vão e um pavimento, houve uma certa dependência da malha, apesar das curvas carga-deslocamentos obtidas serem praticamente coincidentes até o pico, os valores de carga última e deslocamento correspondente variaram um pouco refinando-se a malha até 20 elementos. A autora recomenda assim que se utilize uma malha mais fina para pórticos planos, com a restrição, porém, de não se utilizar elementos com comprimento inferior à altura da sua seção transversal, conforme recomendado por Bazant *et al.* [28]. Stramandinoli [17] também estudou o efeito do número de camadas na discretização da seção em diversos exemplos e concluiu que não havia variação na solução a partir de 10 camadas, assim sendo neste trabalho, em todos os exemplos, foram utilizadas 20 camadas de concreto.

Em todas as análises numéricas utilizou-se o modelo modificado de Hognestad para o concreto sob compressão e o método de Newton-Raphson para solução das equações não lineares, exceto no exemplo do item 4.3 em que se usou o método do Comprimento de Arco. Nos exemplos de vigas e pórticos ensaiados experimentalmente buscou-se utilizar no modelo numérico, quando



(a)



(b)

Figura 2

Comparação entre modelos de tension-stiffening: (a) Vecchio e Collins (1986) e Figueiras (1986); (b) modelo proposto pelas autoras com diferentes valores de n_p em comparação com os modelos simplificados, o de Vecchio e Collins e o de Figueiras, que independem da taxa de armadura ρ

informadas, as propriedades dos materiais concreto e aço medidas experimentalmente (mostradas em negrito nas Tabelas 1 e 2), e, quando não informadas, foram estimadas usando-se valores e equações recomendados pela norma de estruturas de concreto NBR-6118.

4.1 Vigas bi-apoiadas ensaiadas por Beber

Duas das vigas bi-apoiadas ensaiadas por Beber [29] sob flexão a quatro pontos, VT1 e VT2, são utilizadas inicialmente para comparação com os resultados gerados pelo programa ANEST/CA, considerando-se apenas a não linearidade física. Estas vigas são idênticas e sua geometria e armação, carregamento e malha utilizada na análise de elementos finitos estão mostrados na Figura 3, na qual as dimensões estão em cm. As propriedades dos materiais estão apresentadas na Tabela 1. Para mostrar a importância do efeito de *tension-stiffening*, também foi efetuada uma análise numérica sem consideração deste efeito.

A comparação entre os resultados numéricos e experimentais é apresentada em termos de um gráfico “carga total aplicada versus deslocamento vertical no meio do vão”, na Figura 4. Observa-se que o modelo de elementos finitos conseguiu representar bem o ramo ascendente da curva obtida dos ensaios experimentais, mostrando uma boa aproximação inclusive após a fissuração, quando o efeito de *tension-stiffening* é considerado. Se este efeito não é considerado, o modelo numérico apresenta um comportamento bem mais flexível do que o modelo experimental, conforme esperado, tendo em vista que esse efeito

é mais acentuado em vigas com baixa taxa de armadura. O início do escoamento da armadura foi capturado corretamente pelo modelo numérico, a uma carga total aplicada de 44 kN, no entanto, após este valor, os instrumentos foram retirados dos ensaios experimentais para não serem danificados, não sendo assim possível se mostrar a curva obtida experimentalmente. A carga última medida nos ensaios foi de 47 kN, enquanto que a obtida pela análise com o programa ANEST/CA foi um pouco menor, 46 kN.

4.2 Vigas bi-apoiadas ensaiadas por Juvandes

Dentre as vigas do trabalho experimental de Juvandes [30], foram escolhidas duas bi-apoiadas submetidas à flexão a quatro pontos (VB6 e VC3) para serem analisadas com o programa ANEST/CA considerando-se apenas a não linearidade física. A geometria das vigas, carregamento, armação e malha de elementos finitos utilizada estão mostrados na Figura 5 (dimensões dadas em cm), e as propriedades dos materiais estão apresentadas na Tabela 1. Foram efetuadas análises numéricas com e sem a consideração do efeito de *tension-stiffening*, para mostrar a importância desse efeito.

A comparação entre os resultados numéricos e experimentais é apresentada em termos de gráficos “carga total aplicada versus deslocamento vertical no meio do vão” nas Figuras 6 e 7. Para a viga VB6, observa-se da Figura 6 uma excelente aproximação do modelo numérico com consideração de *tension-stiffening* em relação ao ensaio, sendo a curva obtida numericamente

Tabela 1

Propriedades dos materiais e parâmetros usados na análise numérica das vigas VT1/VT2/VB6/VC3 (valores medidos experimentalmente em negrito, calculados ou estimados sem negrito)

Viga	Concreto			Tension - stiffening				Armaduras de aço			
	f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	ϵ_0	n	ρ_{eff}	$n \rho_{eff}$	α (5 camadas)	φ	f_y (MPa)	E_s (GPa)	sh
VT1 e VT2	33,58	2,62	0,0020	6,39	1,50 %	0,096	0,040	6 mm	738	214,83	0,016
VT1 e VT2	33,58	2,62	0,0020	6,39	1,50 %	0,096	0,040	10 mm	565	214,83	0,000
VB6	37,9	2,90	0,0020	5,15	4,60 %	0,240	0,072	3 mm	192	174	0,001
VB6	37,9	2,90	0,0020	5,15	4,60 %	0,240	0,072	8 mm	497	195	0,0042
VC3	20,7	1,60	0,0020	9,00	3,80 %	0,342	0,093	12.5 mm	507	184,6	0,0014

Tabela 2

Propriedades dos materiais e parâmetros usados na análise numérica dos pórticos (valores medidos experimentalmente em negrito, calculados ou estimados sem negrito)

Pórtico	Concreto					Aço			
	f_{cm} (kN/m ²)	f_{tm} (kN/m ²)	$n \rho_{eff}$	α (5 camadas)	ϵ_0	f_y (kN/m ²)	E_s (kN/m ²)	ϵ_u	sh
P2	36500	2814	0,464	0,113	0,0023	293000	20000000	0,01	0,01
A40	29096	2303	0,443	0,110	0,002	353000	189791000	0,015	0,029
A60	38955	2974	0,317	0,088	0,002	425406	181797000	0,007	0,063

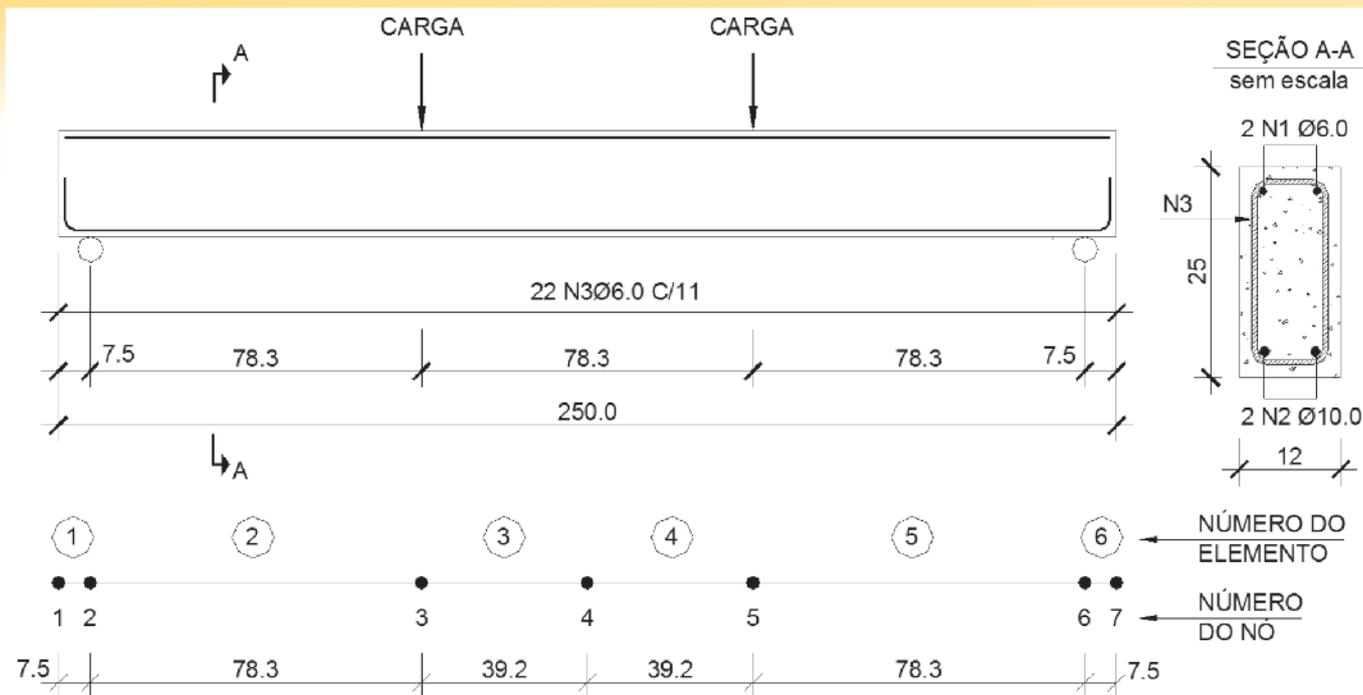


Figura 3 Geometria, carregamento, armação e malha utilizada na análise das vigas VT1 e VT2 ensaiadas por Beber (29)

praticamente coincidente com a experimental nos trechos pós-fissuração e pós-escoamento. O modelo numérico mostrou-se ligeiramente mais rígido apenas no início do trecho elástico, região esta mais suscetível a imprecisões nos ensaios, e aproximou muito bem a carga de ruptura, mas com deslocamento correspondente um pouco menor. Novamente nota-se um comportamento mais flexível do modelo numérico quando o efeito de *tension-stiffening* não é considerado. Já para a viga VC3, o modelo numérico com consideração de *tension-stiffening* apro-

ximou bem o modelo experimental no trecho inicial elástico, mas mostrou-se um pouco mais rígido a partir de uma carga total aplicada de aproximadamente 25 kN (ver Figura 7). A carga de ruptura foi bem aproximada pelo modelo numérico, mas o deslocamento último foi menor. Para esta viga VC3, as diferenças das análises considerando ou não o efeito de *tension-stiffening* são menores, tendo em vista que, além da taxa de armadura ser mais elevada, o baixo valor do módulo de elasticidade do concreto resulta em um valor elevado para a razão modular, η , e consequentemente um valor elevado para o parâmetro α (ver Tabela 1), logo menos efeito de *tension-stiffening* em comparação com as vigas analisadas anteriormente.

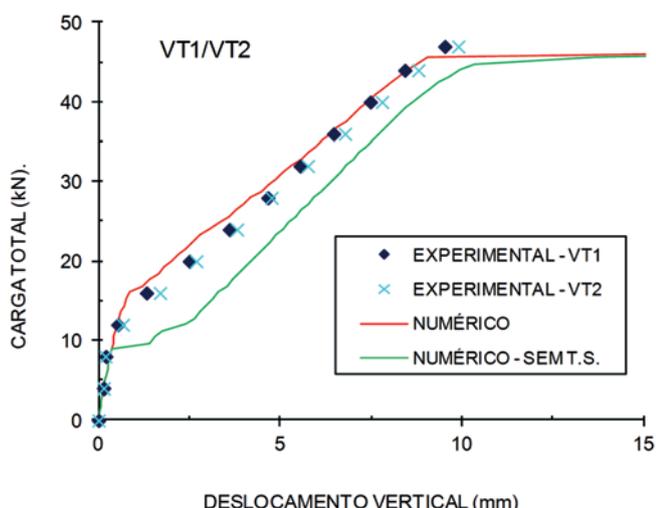


Figura 4 Comparação entre gráficos “carga total versus deslocamento vertical no meio do vão” obtidos da análise numérica com ANEST/CA e análise experimental para as vigas VT1 e VT2 ensaiadas por Beber (29)

4.3 Pórtico plano estudado por Williams

Para verificar a formulação de não-linearidade geométrica do modelo proposto neste trabalho, tendo em vista a dificuldade de se encontrar na literatura ensaios experimentais em estruturas de CA submetidas a grandes deslocamentos, devido à dificuldade de realização desse tipo de ensaio, será utilizado um exemplo teórico de um pórtico plano de material hipotético formado por duas barras levemente inclinadas, estudado por Williams apud Peterson e Petersson [31], o qual pode ser encontrado em várias referências relacionadas ao tema. A geometria do pórtico é apresentada na Figura 8 e as propriedades dos elementos são: módulo de elasticidade $E = 70,735 \text{ GPa}$; área da seção transversal $A = 1,18 \text{ cm}^2$ e momento de inércia $I = 0,0374 \text{ cm}^4$. Na análise numérica discretizou-se a estrutura em 20 elementos de comprimento igual e considerou-se o material elástico-linear. Primeiramente, aplicou-se o modelo com as matrizes k_g e k_u e, posteriormente, apenas com a matriz k_g . Para solução das equações não lineares utilizou-se o Método do Comprimento do Arco, já que esta estrutura apresenta ponto limite. A comparação das duas análises numéricas e a do modelo analítico de Petersson e Petersson [31], em termos de um gráfico “carga versus deslo-



Figura 5

Geometria, carregamento, armação e malha utilizada nas análises das vigas VB6 e VC3 ensaiadas por Juvandes (30)

cimento vertical no centro do pórtico” está mostrada na Figura 9. O modelo com as matrizes k_g e k_u conseguiu capturar a resposta completa da estrutura, inclusive no trecho pós-crítico, capturando o efeito conhecido como *snap-through*, sendo a curva do modelo numérico coincidente com a obtida pelo modelo analítico de Petersson e Petersson [31]. Porém, quando não se considerou a matriz k_u na formulação, obtiveram-se problemas de convergência na análise nas proximidades do pico de resposta, não sendo possível capturar a resposta para toda a história de carregamento. Ressalta-se, no entanto, que em muitos exemplos de pórticos planos de CA o modelo com apenas a matriz geométrica k_g fornece bons resultados (Stramandinoli [17]).

4.4 Pórtico plano ensaiado por Cranston

Cranston apud Bazant *et al.* [28] realizou ensaios experimentais em uma série de pórticos bi-rotulados de CA, e um deles, deno-

minado de pórtico P2, foi escolhido aqui para comparação com o programa ANEST/CA. Vários autores utilizaram este pórtico para análise, além de Bazant *et al.* [17], podendo-se citar Lazaro e Richards [32], Sun *et al.* [33] e Bratina *et al.* [34].

Na Figura 10 é mostrada a geometria do pórtico, seção transversal, posição das cargas, tipo de apoios e malha utilizada para discretização da estrutura (18 elementos) na análise numérica. As propriedades dos materiais utilizados na análise numérica estão apresentadas na Tabela 2.

A Figura 11 ilustra os gráficos “carga total (kN) versus deslocamento vertical no meio do vão (mm)” para o pórtico P2. Analisando o gráfico é possível observar que a curva obtida pelo modelo numérico ficou praticamente coincidente com a curva experimental até se atingir a carga máxima, o modelo numérico apenas mostrou-se um pouco mais rígido no trecho pós-escoamento da armadura. Depois de atingido o pico de resistência do pórtico, houve um amolecimento na resposta experimental, efeito conhecido como

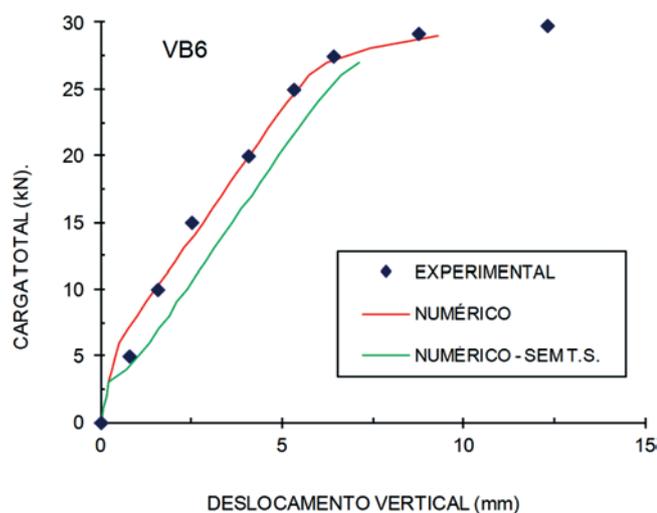


Figura 6

Comparação entre gráficos “carga total versus deslocamento vertical no meio do vão” obtidos da análise numérica com ANEST/CA e análise experimental para a viga VB6 ensaiada por Juvandes (30)

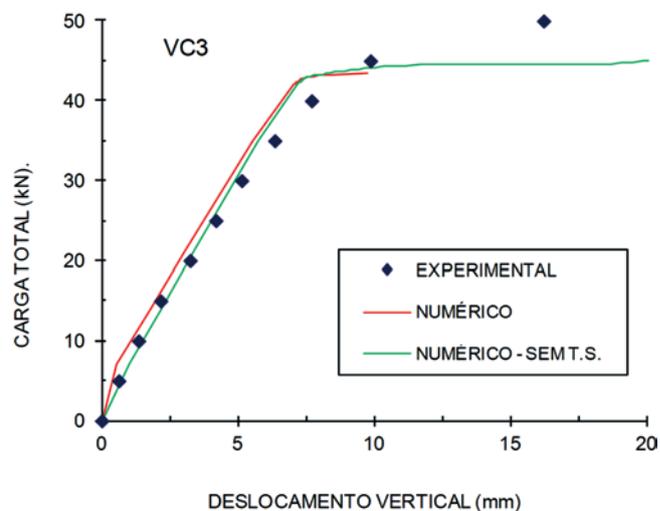


Figura 7

Comparação entre gráficos “carga total versus deslocamento vertical no meio do vão” obtidos de análises numéricas com ANEST/CA e análise experimental para a viga VC3 ensaiada por Juvandes (30)

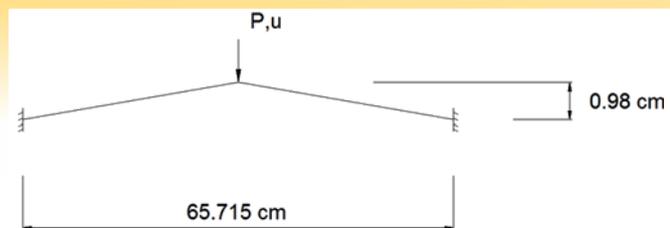


Figura 8
Geometria, apoios e carga aplicada no pórtico de Williams (Pettersson e Pettersson (31))

softening. Na análise numérica (com *tension stiffening*) o aço das armaduras inicia a escoar no meio do vão da barra horizontal para $P = 15,7 \text{ kN}$ e, para $P=20,4 \text{ kN}$, inicia o escoamento nas extremidades dessa barra e no topo dos pilares. Perto da carga última (entre 22,2 e 22,3 kN), iniciam os problemas de convergência, não sendo possível continuar a análise e capturar o trecho pós-pico, mesmo se utilizando o método do Comprimento do Arco ou o método de Newton-Raphson com controle de deslocamentos na solução. É comum ocorrer esses problemas de convergência nas análises considerando não linearidade física perto da carga última, quando um ou mais coeficientes da diagonal da matriz de rigidez global da estrutura são próximos de zero.

4.5 Pórticos planos ensaiados por Ernst et al.

Ernst et al. [35] realizaram um estudo para investigar o comportamento de pórticos planos de CA, ensaiando diversos pórticos bi-articula-

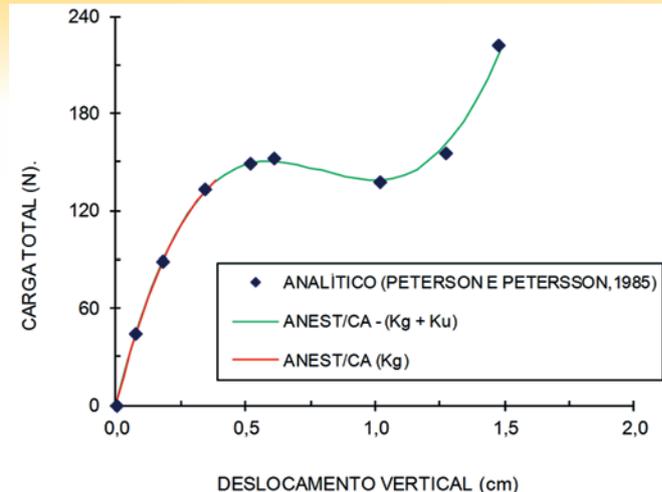
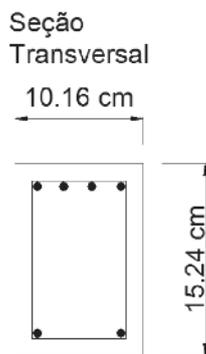
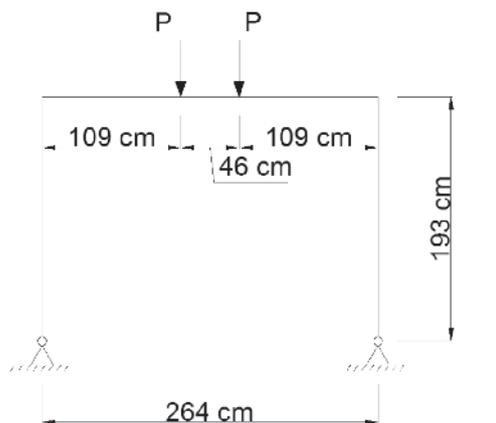
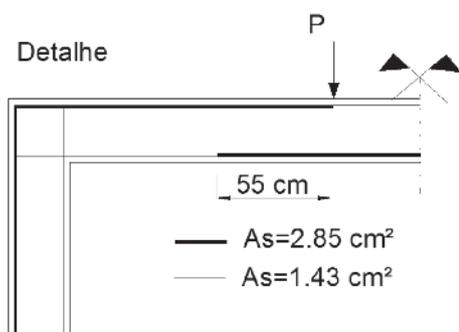


Figura 9
Comparação entre análises numéricas com programa ANEST/CA e modelo analítico de Peterson e Pettersson (31), em termos de gráfico “carga aplicada versus deslocamento vertical no centro” para o pórtico de Williams

dos, de um vão e um pavimento. Dos pórticos ensaiados, dois foram escolhidos para comparação com o modelo numérico (A40 e A60). A geometria dos pórticos, posição das cargas e seção transversal estão mostradas na Figura 12. Foram usados 36 elementos de barra na discretização da estrutura e as propriedades dos materiais e parâ-



$A_s = 1.43 \text{ cm}^2$
 $A_s' = 2.85 \text{ cm}^2$



Malha utilizada

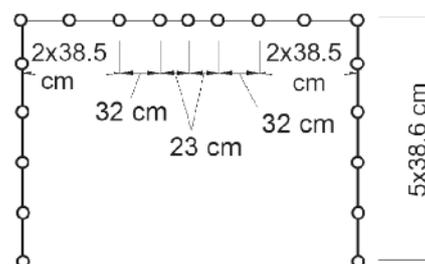


Figura 10
Geometria, cargas, armaduras e malha utilizada na análise numérica do pórtico P2 ensaiado por Cranston (apud Bazant et al. (28))

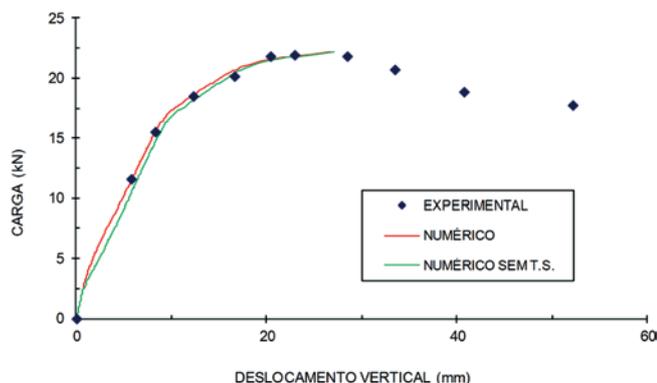


Figura 11

Comparação entre análise numérica com ANEST/CA e análise experimental em termos de gráficos “carga total aplicada versus deslocamento vertical no meio do vão” para o pórtico P2 ensaiado por Cranston (apud Bazant et al. (28))

metros usados nas análises numéricas estão mostrados na Tabela 2. A Figura 13 ilustra o gráfico “carga total (kN) versus deslocamento vertical no meio do vão (mm)” para o pórtico A40 e a Figura 14 para o pórtico A60. Observa-se dos gráficos que o modelo numérico consegue representar de maneira satisfatória o comportamento dos pórticos obtido nos ensaios. O modelo numérico mostrou-se um pouco mais rígido desde o trecho inicial elástico, aumentando um pouco esta diferença de rigidez após a fissuração. Para ambos os pórticos a carga última obtida no modelo numérico ficou um pouco superior à experimental, e para o pórtico A40 o deslocamento último ficou um pouco menor em relação ao valor experimental.

5. Conclusões

Apresentou-se neste trabalho um modelo de elementos finitos de barra bidimensional com sete graus de liberdade para análise não linear física e geométrica de estruturas planas de concreto armado. O modelo foi implementado em um programa computacional denominado ANEST/CA e foi verificado em comparação com resultados teóricos e experimentais obtidos por outros autores. Com relação à não-linearidade geométrica, o modelo conseguiu re-

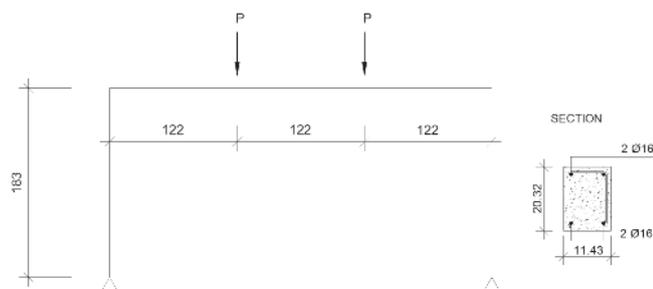


Figura 12

Geometria (dimensões em cm), apoios e carregamento aplicado para os pórticos A40 e A60 ensaiados por Ernst et al. (35)

presentar muito bem o comportamento de estruturas elástico-lineares com grandes deslocamentos, por meio da utilização das matrizes k_g e k_u . No que tange a não-linearidade física, na comparação em termos de curvas carga-deslocamento do modelo numérico com ensaios experimentais, em estruturas com comportamento predominante de flexão, observou-se ótimos resultados do modelo para o caso de vigas e bons resultados para o caso de pórticos planos. Demonstrou-se também no trabalho a importância de se considerar o efeito de *tension-stiffening*, principalmente no caso de vigas. Além dos resultados numéricos apresentados aqui, o programa ANEST/CA fornece outros resultados também importantes numa análise estrutural, tais como a evolução da fissuração e da tensão nas camadas de concreto e armadura ao longo do carregamento (Stramandinoli [17]). Quando os efeitos provocados pelo cisalhamento forem importantes, com a presença de fissuras inclinadas, deve-se utilizar um modelo que os considerem, como, por exemplo, o modelo de barras desenvolvido por Stramandinoli e La Rovere [19], baseado na teoria de viga de Timoshenko, ou então modelos de elementos finitos planos com modelos constitutivos bi-axiais, como, por exemplo, os desenvolvidos por d’Avila [20]. O programa ANEST/CA também foi utilizado para comparação com métodos simplificados por Junges [36], para o caso de vigas, por Gelatti [37], para pórticos planos, e por Junges e La Rovere [38] para o caso de vigas contínuas. O modelo numérico apresentado neste trabalho está sendo estendido e implementado no programa ANEST/CA para a análise de estruturas tridimensionais de concreto armado, incluindo-se modelos para levar em conta o efeito de confinamento do concreto propiciado pelos estribos.

6. Referências bibliográficas

- [1] SILVA, R. M.; MATOS, E. F. Análise não-linear de pórticos planos de edifícios altos em concreto armado considerando

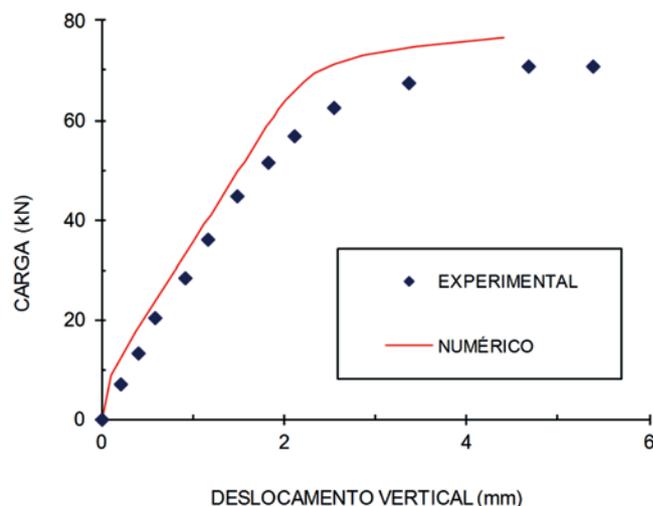


Figura 13

Comparação entre análise numérica com ANEST/CA e análise experimental em termos de gráfico “carga total aplicada versus deslocamento vertical no meio do vão” para o pórtico A40 ensaiado por Ernst et al. (35)

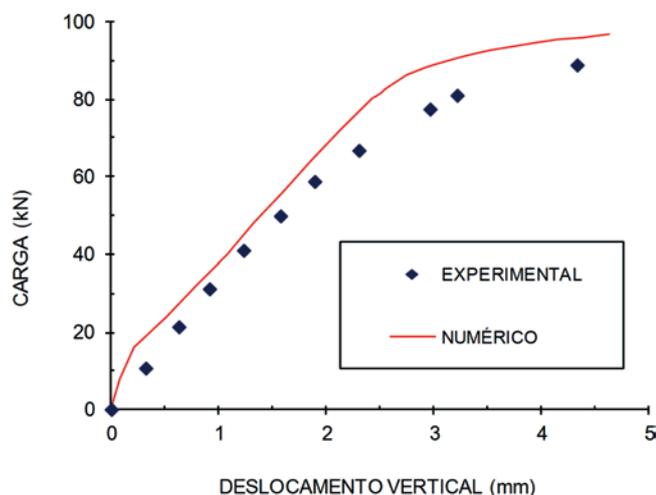


Figura 14

Comparação entre análise numérica com ANEST/CA e análise experimental em termos de gráfico "carga total aplicada versus deslocamento vertical no meio do vão" para o pórtico A60 ensaiado por Ernst et al. (35)

a contribuição do concreto tracionado. In: Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Punta del Este, p. 1-15 Anais CD-ROM, 2000.

- [2] GIBERSON, M. F. The response of nonlinear multi-story structures subjected to earthquake excitation. PhD Thesis. 1967. 232 p. California Institute of technology, Pasadena, California, USA, 1967.
- [3] KABA, S.; MAHIN, S. A. Refined modeling of reinforced concrete columns for seismic analysis. EERC Report 84-03. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, USA, 1984.
- [4] CHAN E. C. Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams. 1982. 361 p. Ph.D. Dissertation (Structural Engineering and Structural Mechanics). University of California, Berkeley, USA, 1982.
- [5] HOLZER, S.M.; SOMERS, A.E.; BRADSHAW, J.C. Finite response of inelastic RC structures. Journal of the Structural Division (ASCE), v. 105, n. ST1, p. 17-33, 1979.
- [6] MARÍ A.R. Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames. Report, n°. UCB/SESM – 84/12. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, USA, 1984.
- [7] MARÍ A.R. Numerical simulations of the segmental construction of three dimensional concrete frames. Engineering Structures, v. 22, p. 585-596, Ed. Elsevier, 2000.
- [8] CARREIRA, D. J.; CHU, K.H. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. ACI Journal, v. 83, n.3, p. 21-28, 1986.
- [9] SCHULZ, M.; REIS, F.J.C. Estabilidade das estruturas de concreto para solicitações combinadas. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. Anais CD-ROM, p. 1-18, São Paulo, 2003.
- [10] TAUCER, F.F.; SPACONE, E.; FILIPPOU, F.C. A fiber beam-column element for seismic analysis of reinforced concrete structures. EERC Report 91/17 - Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, USA, 1991.
- [11] TEIXEIRA, M. R.; de SOUZA, R.M. Análise não linear física e geométrica de um edifício de múltiplos andares em concreto armado utilizando-se a plataforma OpenSees. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, Anais CD-ROM, p. 1-19, São Paulo, 2003.
- [12] PIMENTA, P. M. Análise não linear de pórticos planos. In: Anais EPUSP, v. 1, n. 1a, p. 563-582, São Paulo, 1988.
- [13] PIMENTA, P.M.; SOLER, J.G.M. Estabilidade de pórticos planos de concreto armado. In: Anais do Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 1, v.2., p. 501-527, São Paulo, 1989.
- [14] VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. ACI Journal, v. 83, n. 2, p. 219-231, 1986.
- [15] PINTO, R. S. Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado. 2002. 155 p. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 2002.
- [16] CARVALHO, M. F. M. S. Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos. 2010. 71 p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2010.
- [17] STRAMANDINOLI, R.S.B. Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. 2007. 189 p. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2007.
- [18] STRAMANDINOLI, R.S.B. e LA ROVERE, H.L. An Efficient Tension-Stiffening Model for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Members. Engineering Structures v.30, n.7, p.2069-80, Ed. Elsevier, 2008.
- [19] STRAMANDINOLI, R.S.B. e LA ROVERE, H.L. FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation. Engineering Structures v. 35 p. 244–253, Ed. Elsevier, 2012.
- [20] D'AVILA, V. M. R. Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos. 2003. 259 p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
- [21] COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M.E. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 3rd ed. Ed. John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [22] RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. Journal of Applied Mechanics, v. 3, p.1060-1065, 1972.
- [23] WEMPNER, G. A. Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. International Journal of Solids and Structures, v. 7, p.1581-1599, 1971.
- [24] HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. Bulletin Series, 399:128 - University of Illinois, Urbana, USA, 1951.
- [25] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.
- [26] FIGUEIRAS, J. A. Practical approach for modelling the non-

linear response of RC shells. Computational Modeling of Reinforced Concrete Structures, p. 217-253, 1986.

- [27] LA ROVERE, H. L. Nonlinear analysis of reinforced concrete masonry walls under simulated seismic loadings. 1990. 200p. Ph.D. Dissertation (Structural Engineering) - University of California, San Diego, USA, 1990.
- [28] BAZANT, Z. P.; PAN, J.; CABOT, G. P. Softening in reinforced concrete beams and frames. Journal of Structural Engineering (ASCE), v. 113, n. 12, p. 2333-2347, 1987.
- [29] BEBER, A. J. Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono. 1999. 108p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1999.
- [30] JUVANDES, L. F. P. Reforço e reabilitação de estruturas de betão usando materiais compósitos de “CFRP”. 1999. 400p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal, 1999.
- [31] PETERSON, A.; PETERSSON, H. On finite element analysis of geometrically nonlinear problems. Computer Methods in Applied mechanics and Engineering, v. 51, p. 277-286, 1985.
- [32] LAZARO, A.L. e RICHARDS JR, R. Full-range analysis of concrete frames. Journal of the Structural Division (ASCE), v. 99, n. 8, p. 1761-1783, 1973.
- [33] SUN, C. H.; BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. A reliable numerical method for simulating the post-failure behaviour of concrete frame structures. Computers & Structures, v. 53, n. 3, p. 579-589, 1994.
- [34] BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. International Journal of Solids and Structures, v. 41, n. 24-25, p. 7181-7207, 2004.
- [35] ERNST, G. C., *et al.* Basic reinforced concrete frame performance under vertical and lateral loads. ACI Journal, v. 70, n. 4, p. 261-269, 1973.
- [36] JUNGES, E. Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado. 2011. 360p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2011.
- [37] GELATTI, F. Análise não linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado: modelagem por elementos finitos de barra. 2012. 226p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2012.
- [38] JUNGES, E.; LA ROVERE, H. L. Comparison between simplified and FE models for short-term deflection in continuous RC beams. Ibracon Structures and Materials Journal, Volume 10, Number 2 (April 2017), p. 315 - 450.

7. Anexo

As funções de interpolação $N(\xi)$, utilizadas no item 2.1, são dadas por:

$$N_a = \frac{(1 - \xi)}{2}$$

$$N_b = \frac{(1 + \xi)}{2}$$

$$N_c = (1 - \xi^2)$$

$$N_d = 1 - \frac{3}{4}(\xi + 1)^2 + \frac{1}{4}(\xi + 1)^3$$

$$N_e = \frac{L}{2}(\xi + 1) - \frac{L}{4}(\xi + 1)^2 + \frac{L}{8}(\xi + 1)^3$$

$$N_f = \frac{3}{4}(\xi + 1)^2 - \frac{1}{4}(\xi + 1)^3$$

$$N_g = -\frac{L}{4}(\xi + 1)^2 + \frac{L}{8}(\xi + 1)^3$$

A partir do campo de deslocamentos, pode-se determinar a deformação específica, considerando a equação (2):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d\theta}{dx}$$

onde:

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{du_0}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{du_0}{d\xi} = \frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{4\xi}{L} \alpha_1$$

e:

$$\frac{d\theta}{dx} = \varphi(\xi) = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{4}{L^2} [N_d'' v_1 + N_e'' \theta_1 + N_f'' v_2 + N_g'' \theta_2]$$

em que: $\ddot{\ } = \frac{d^2}{d\xi^2}$ e $\varphi(\xi)$ é a curvatura.

Portanto pode-se escrever a curvatura como sendo:

$$\varphi = \frac{6\xi}{L^2} v_1 + \frac{3\xi - 1}{L} \theta_1 + \frac{-6\xi}{L^2} v_2 + \frac{3\xi + 1}{L} \theta_2$$

Logo, a equação (2) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_x = [1 \quad -y] \begin{Bmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \varphi \end{Bmatrix} = [1 \quad -y] \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{-4\xi}{L} \\ 0 & \frac{6\xi}{L^2} & \frac{3\xi - 1}{L} & 0 & \frac{-6\xi}{L^2} & \frac{3\xi + 1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\varepsilon_x = \mathbf{B}_L \mathbf{U}$$

A matriz de rigidez secante, conforme item 2.2, é dada por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{ES}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{ES}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8ES}{L^2} \\ -\frac{ES}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{ES}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4ES}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{ES}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{8ES}{L^2} \\ \frac{ES}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{ES}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{4ES}{L} \\ 0 & \frac{8ES}{L^2} & \frac{4ES}{L} & 0 & -\frac{8ES}{L^2} & \frac{4ES}{L} & \frac{16EA}{3L} \end{bmatrix}$$