ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

# Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato

## Textbook Analysis on Optimization in Pre-university Educational Levels

Teresa Balcaza Bautista*
Ángel Contreras de la Fuente**
Vicenç Font Moll***

### Resumen

La optimización matemática es un concepto matemático esencial para abordar problemas de la vida cotidiana. En el Currículo del Bachillerato español se emplean las herramientas del Análisis Matemático para solucionar los problemas de optimización, siendo aquí donde aparecen las principales dificultades de aprendizaje de la noción. En este trabajo, en primer lugar, se presentan los resultados de un estudio epistemológico de la evolución de la optimización a lo largo de la historia, con el objetivo de fijar los significados de referencia. Posteriormente, se muestra cómo se desarrolla esta noción en tres libros de texto del citado nivel educativo, todo ello con el fin de poder detectar el significado que se pretende abordar en el aula, así como las dificultades potenciales que los alumnos pueden encontrar en torno a este concepto.

**Palabras clave:** Optimización. Configuraciones Epistémicas. Libros de Texto. Conflictos de Significado.

### Abstract

Mathematical optimization is an essential concept to manage everyday problems. In the Pre-University Spanish Curriculum, the tools for Mathematical Analysis are used to solve optimization problems. It is exactly in this process where the main teaching difficulties appear. In this article, we present the results of an epistemological study in the evolution of optimization throughout the history of the notion, aiming at fixing the meanings of reference. Then, the notion of optimization is presented in three textbooks, being developed in order to obtain the meaning of this notion in the classroom as well as the potential difficulties the students may find in the concept.

**Keywords:** Optimization. Epistemic Configurations. Textbooks. Conflicts in Meaning.

## 1 Área problemática y antecedentes

### 1.1 Introducción

* Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesora en el Instituto de Educación Secundaria Santo Reino, Jaén, España. Dirección postal: Avd. del Parque, s/n., Torredonjimeno, CP 23650, Jaén, España. E-mail: terebmat@hotmail.com

** Doctorado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Catedrático de E.U. de la Universidad de Jaén (UJA), Jaén, España. Dirección postal: Paraje Las Lagunillas, s/n., CP 23007, Jaén, España. E-mail: afuente@ujaen.es

*** Doctorado. en Ciencias de la Educación por la Universitat de Barcelona (UB). Profesor Titular de la Universidad de Barcelona (UB), Barcelona, España. Dirección postal: C/ Fígols, 15, CP 08028, Barcelona, España. E-mail: vicencfont@ono.com

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

A lo largo de la historia, la matemática ha tratado gran variedad de problemas relativos a máximo y mínimos, muchos de ellos surgidos de la realidad, siendo resueltos de forma rigurosa, aportando no solo la solución misma, sino métodos y hasta teorías (SANTIAGO, 2008).

Como indican Malaspina y Font (2010) son numerosas las situaciones de optimización a las que nos enfrentamos en la vida cotidiana y para abordarlas utilizamos los criterios que nos da nuestra experiencia y formación, aunque no necesariamente encontremos la solución óptima.

En el sistema educativo español (M.E.C., 2007) se estudian problemas de optimización en sus diversos niveles. Nuestra investigación se sitúa en la etapa del Bachillerato (16-18 años), en el segundo curso de la modalidad de Ciencias y Tecnología. De entre los contenidos que se planifican en el Currículo (R.D. 1467/2007) se disponen los problemas de optimización cuya solución está relacionada con la utilización de las herramientas del Cálculo. Es precisamente en este nivel donde aparecen las dificultades de comprensión más importantes de la optimización, al estar relacionadas con los conceptos de la noción de derivada (SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2008).

Por tanto, nuestro objeto de estudio se limita a los problemas que son resolubles con los instrumentos que proporciona el Análisis Matemático para funciones reales de variable real.

La problemática de investigación de este trabajo está relacionada con los problemas de tipo didáctico que surgen en el análisis de los libros de texto con respecto a los conceptos asociados a la optimización, desde la perspectiva del Cálculo. La investigación tiene como primer objetivo realizar un estudio epistemológico de la evolución de la optimización a lo largo de la historia. En segundo lugar, realizar un análisis de tres manuales del nivel de bachillerato, mostrando cómo se presenta esta noción en los mismos. La finalidad es detectar el significado sobre la optimización que pretende cada autor y las posibles dificultades potenciales de aprendizaje de los alumnos.

A continuación, incluimos una revisión de algunos trabajos sobre el análisis de libros de texto que son pertinentes en la investigación y que ayudará al desarrollo de la misma.

## 1.2 El análisis de libros de texto en educación matemática

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

Como señala Bayazit (2013), el currículo es una estructura compleja que consta de varios aspectos como son los objetivos, los contenidos, la enseñanza y la evaluación, destacándose tres niveles distintos: el currículo pretendido, el implementado y el logrado.

Algunos autores (VALVERDE et al., 2002) añaden a los tres niveles del currículo uno más, el currículo potencialmente implementado, el cual abarca fundamentalmente a libros de texto. Son numerosas las investigaciones que se han realizado sobre la importancia del análisis de éstos como recurso en la transmisión del conocimiento (SCHUBRING, 1987; THOMSON; FLEMING, 2004; ZHU; FAN, 2006). Tal como indican González y Sierra (2004a), el análisis de manuales trasciende a su consideración como herramienta para el análisis didáctico y adquiere el carácter de componente crucial en la investigación en Didáctica de las Matemáticas, ya que, como indican Font y Godino (2006) éstos asumen una parte fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Aplicando las nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática se analiza una unidad sobre la suma y resta, según explican Godino, Font y Wilhelmi (2006). Bajo este mismo marco teórico, en Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) se describen las configuraciones epistémicas de referencia de la integral definida y se muestra cómo se presenta esta noción en una muestra de libros de texto, y en Contreras, García y Font (2012) se analizan los distintos significados que configuran la enseñanza del límite. Las herramientas que ofrece este marco teórico pueden ser de gran utilidad para que el profesorado valore la idoneidad de las unidades y estructuras propuestas en ellos.

En referencia a los problemas de optimización, en Camacho y González (1998) se realiza una clasificación y, en la investigación de González y Sierra (2004b), se muestra cómo ha evolucionado el trato que se ha hecho en los manuales españoles de este tópico matemático a lo largo del siglo XX.

## 2 Marco teórico y problema específico de investigación

Para abordar la investigación sobre la enseñanza de la optimización en Bachillerato hay que considerar un complejo proceso en el que están implicados diversos fenómenos didácticos (epistémicos, cognitivos e instruccionales), así como elementos semióticos y ecológicos. Consideramos que un enfoque teórico que engloba todos estos aspectos y ayuda a su análisis, lo constituye el marco teórico denominado *Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (EOS) (GODINO; BATANERO, 1994; GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2007). Describimos brevemente algunas nociones de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

este marco teórico que utilizamos en nuestra investigación. Se entiende por *sistema de práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas. El sistema de prácticas manifestado por una institución se define como *significado institucional*. En la investigación consideramos el *significado institucional referencial* (origen, evolución y contextos) y el *significado institucional pretendido* (incluido en la planificación del proceso de estudio).

Para realizar un análisis minucioso de la actividad matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), el EOS utiliza una tipología de objetos matemáticos: *entidades primarias* (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) interrelacionados formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, denominados *configuraciones epistémicas* (PINO; GODINO; FONT, 2011) lo cual se ilustra en la Figura 1:

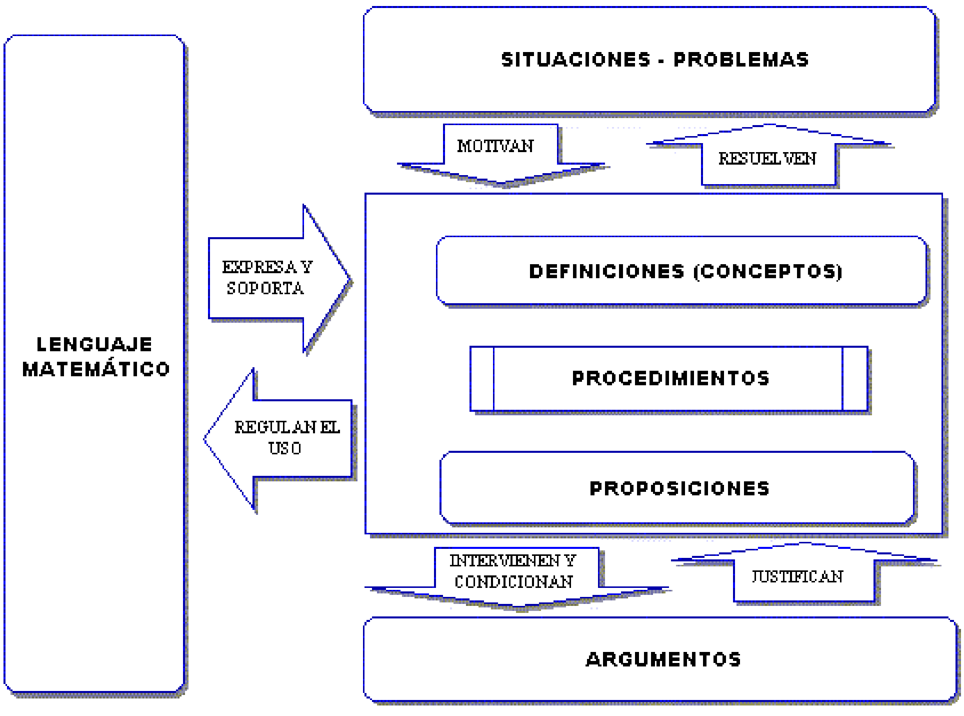



**Figura 1 -** Configuración de objetos matemáticos primarios
Fuente: GODINO; BATANERO; FONT, 2007

Se denomina *conflicto semiótico* a cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Detectados a priori, pueden identificar posibles errores, dificultades y concepciones erróneas en la resolución del problema.

Desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico, nuestra investigación tiene como objetivo realizar un estudio epistemológico de la evolución de la optimización a lo largo de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

historia, determinando las configuraciones institucionales de referencia relacionadas con el estudio histórico-epistemológico y mostrar cómo se presenta esta noción en los libros de texto de Bachillerato, con el fin de detectar el significado institucional pretendido y conflictos semióticos potenciales de significado.

## 3 Metodología

### 3.1 Reconstrucción del significado de referencia

Para la determinación del significado de referencia de la optimización se requiere la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del concepto en cuestión. Ello conduce, en primer lugar, a la utilización de fuentes bibliográficas en las que aparece el objeto optimización bajo el punto de vista histórico y evolutivo; en la reconstrucción se utilizará un análisis basado en las entidades primarias de la actividad matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2007). Posteriormente, se describirán las configuraciones socio-epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico de la optimización mediante las cuales reconstruiremos el significado para la noción optimización, teniendo en cuenta los tipos de problemas abordados en distintos momentos históricos y los sistemas de prácticas correspondientes (PINO; GODINO; FONT, 2011).

### 3.2 Identificación del significado pretendido

Para la identificación del significado pretendido de la optimización, dado que se trata de un contenido incluido en el currículo (M.E.C.) de segundo curso de Bachillerato en la Modalidad de Ciencias y Tecnología, se ha seleccionado una muestra intencional formada por tres libros de texto, considerando el criterio de analizar las editoriales con mayor difusión en la provincia de Jaén (España).

En el Cuadro 1 se muestra la distribución del uso de las diferentes editoriales de matemáticas en el curso que nos compete en esta investigación a partir de un censo realizado con la información facilitada por los centros públicos de educación jiennenses.

| | **Editorial** | **%** |
|---|---|---|
| | Anaya | 65,45 |
| | SM | 12,72 |
| | Santillana | 9,09 |
| | Bruño | 3,63 |
| | Oxford | 1,8 |

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

| | | |
|---|---|---|
| | Editex | 1,81 |
| | No utiliza texto | 5,45 |

**Cuadro 1-** Porcentajes de los centros públicos jiennenses que utilizan cada editorial en segundo de Bachillerato modalidad Ciencias y Tecnología
Fuente: elaborado por el autor

A partir de estos datos hemos seleccionado la muestra (Cuadro 2), que representa el 87,26% de la población:

| Código | Referencia |
|---|---|
| T1 | Colera J. et al. (2009). *Matemáticas II.* Madrid, España: Anaya |
| T2 | Vizmanos J. et al. (2008) *Matemáticas 2.* Madrid, España: SM |
| T3 | Escoredo A. et al.(2009) *Matemáticas II.* Madrid, España: Santillana |

**Cuadro 2-** Libros de texto seleccionados para la muestra
Fuente: elaborado por el autor

Se realizará un estudio del desarrollo del concepto de optimización en cada uno de los textos, dividiéndolo en unidades de análisis y aplicando las entidades primarias. Se estudian las entidades primarias en cuanto a su distribución y el papel que se les asigna en el desarrollo de la unidad. Así, distinguiremos (CONTRERAS et al., 2005; CONTRERAS; ORDÓÑEZ; WILHELMI, 2010):

i. *Situacionales*, según los tipos de situaciones de enseñanza que se utilicen en la optimización. Pueden ser las siguientes:

a. Clase de situaciones que se usan para fundamentar la matemática a enseñar según el tipo de fenómenos que se gestionan (propia matemática, de otras ciencias o una situación de la realidad).

b. Ejemplos que se utilizan para facilitar la comprensión del discurso matemático. Se observará: lugar dónde incluye, tipo de función utilizada, si se resuelve o no y cómo.

ii. *Lingüísticas*, que corresponden a los diversos tipos de lenguajes utilizados a lo largo del discurso.

iii. *Conceptuales,* en las que se considera la definición que se da de los extremos de las funciones, los puntos singulares y los problemas de optimización. Se observará si hay una única definición y si ésta es formal o intuitiva.

iv. *Proposicionales*, en la que se considera el modo en que se exponen las propiedades de la optimización. Se tendrán en cuenta los siguientes tipos:

a. Si la exposición que se realiza de las propiedades es formal o intuitiva.

b. Si se demuestran o justifican o solamente se exponen.

v. *Procedimentales,* planteándose cómo son los procedimientos utilizados en las actividades distinguiendo:

a. si se emplean uno o varios procedimientos para resolver las situaciones.

b. Si los procedimientos que se utilizan se justifican.

vi. *Argumentativas*, diferenciando el tipo (inductivo o deductivo).

A partir del análisis se obtendrán las configuraciones asociadas a las prácticas propuestas en cada libro de texto y, tal como se pone de manifiesto en Font y Godino (2006), mediante este constructo describimos el significado institucional pretendido del contenido estudiado lo que nos permitirá comparar textos de distintas orientaciones epistemológicas.

Por último, se analizarán las configuraciones y conflictos semióticos presentes en el libro de texto, estudiando con detalle un problema de los que se presentan resueltos. Para este microanálisis se utilizará la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) (RIVAS; GODINO; CASTRO, 2012). Mediante esta herramienta se puede conocer el contenido de la resolución de un problema matemático: identificar las entidades primarias y los significados puestos en juego en la resolución de un problema, por lo que permite identificar potenciales conflictos de significado.

## 4 Análisis de resultados

### 4.1 Significados epistemológicos-históricos de la optimización

Acudiendo a la historia de la matemática, utilizando fuentes originales o trabajos que respetan éstas se pueden extraer seis significados históricos en la evolución del concepto de optimización.

La primera etapa de la historia de la matemática relacionada con la optimización se encuentra en el periodo que abarca desde el siglo IV a. C. hasta el siglo IV d. C. Las obras de matemáticos como Euclides, Apolonio, Ptolomeo o Pappus aportan resultados que podemos considerarlos como problemas de máximos y mínimos (HEATH, 1956).

En la primera mitad del siglo XVII destaca la aportación que Fermat ofrece para calcular máximos y mínimos. En su obra “Methodus ad disquirendam maximan et miniman”, establece un procedimiento general (TANNERY; HENRY, 1912) basado en la idea de incrementar la cantidad de cierta magnitud. Introduce en este método la técnica de adigualdad utilizada por Diofanto de Alejandría, en su obra Aritmética. Es en este contexto, cuando surge el *significado de adigualdad*, que, como indica González (1992), se trata de un método puramente algebraico que no se basa en ningún concepto infinitesimal, sino en conceptos algebraicos, derivados de la teoría de ecuaciones de Viète.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

En la segunda mitad del siglo XVII, los matemáticos Newton y Leibniz con el uso de las derivadas revolucionaron el Cálculo Diferencial. Las técnicas de cálculo las formularon en términos de fluxiones y de cocientes diferenciales, respectivamente (GAUD et al., 1998). Newton aplicó los resultados sobre fluentes y fluxiones a los problemas de máximos y mínimos y Leibniz publica "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentus, qua nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus", basado en un enfoque geométrico del enfoque cinemático de Newton, ofreciendo dos argumentaciones distintas para el cálculo de máximos y mínimos (CASTAÑEDA, 2006).

En este contexto geométrico surgen otros dos significados. Por una parte, basándose en la comparación de estados afirma que el máximo será el que tenga mayor ordenada (distancia mayor) lo que hemos considerado como *significado de la ordenada mayor o menor*. Por otra parte, utilizando una condición geométrica para afirmar que la tangente en el punto máximo será horizontal lo que hemos considerado como *significado de la tangente*.

Además de estas dos argumentaciones, se ofrece una tercera identificando el signo de las diferencias en una región muy cercana al máximo. Con respecto a esta argumentación, L'Hôpital (1696 apud CASTAÑEDA, 2006) afirma que una diferencia no puede cambiar de signo sino pasa por cero o infinito. Surge, por tanto, el *significado de la derivada primera*.

Posteriormente, asociamos los criterios de máximos y mínimos basados en derivadas de orden superior a uno a Taylor, quien en su obra "Methodus Incrementorum Directa e Inversa" ofrece criterios para el cálculo de máximos y mínimos mediante el signo y la anulación de las derivadas sucesivas en un punto. Surge, así, el *significado de la derivada de orden superior a 1.*

En el siglo XVIII la optimización vuelve a protagonizar un gran avance. Euler, basándose en los trabajos de Lagrange sobre variaciones de una función, crea el Cálculo de variaciones. Aporta un método al que denomina *Método para hallar curvas de máximo o de mínimo*, que permite tratar los problemas con varias variables y restricciones de igualdad abordando problemas donde el objeto optimizante fuese una función. Lagrange continúa con el trabajo de Euler y desarrolla el concepto de variación de una función. Introduce una nueva operación de diferenciación y ofrece una herramienta para resolver problemas de optimización con restricciones utilizando la técnica denominada *multiplicadores de Lagrange*. Surge, en esta época, el *significado de los Multiplicadores de Lagrange* (BOYER, 1968).

Asociados a los significados de la optimización, realizando un análisis por medio de las entidades primarias de la actividad matemática, aparecen las seis configuraciones epistémicas siguientes: configuración de la tangente (CE-T), caracterizada porque en los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

extremos relativos la representación gráfica de una función presenta recta tangente horizontal; configuración de la ordenada mayor o menor (CE-O), caracterizada porque los puntos máximos y mínimos presentan la mayor o menor de las ordenadas en un entorno centrado en ellos; configuración de la adigualdad (CE-AD), que se caracteriza por el método de adigualdad con la utilización de métodos puramente algebraicos; configuración de la primera derivada (CE-1D), se distingue porque el cambio de signo de f' en el entorno de un punto, indica la posible existencia de extremo relativo en ese punto; la configuración de la derivada de orden superior a uno (CE-2D), que está relacionada con el hecho de tener que calcular la segunda derivada (y sucesivas si es necesario) de la función en los puntos críticos para poder decidir si existe máximo o mínimo en el punto y por último, la configuración de los multiplicadores de Lagrange (CE-ML).

De las seis configuraciones, a continuación describimos la CE-1D asociada al significado de la derivada primera, para ello partimos del análisis de un ejemplo de problema prototípico.

El siguiente problema es el ejemplo IV de la sección III del libro "Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes", de L'Hôpital (1696, p. 44): "Couper la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere".

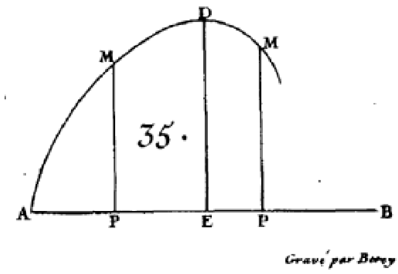



**Figura 2**- Esquema correspondiente al ejemplo IV sección III
Fuente: obra de L'Hôpital

La resolución con base en la figura 2 que, de acuerdo con Santiago (2008), realiza L'Hôpital es la siguiente: siendo $\overline{AE} = x$ y $\overline{AB} = a$, de forma que $\overline{AE}^2 x\ \ \overline{AB} = \mathrm{ax}^2 - \mathrm{x}^3$ sea máximo. En la línea curva MDM, la relación de aplicar $MP(y)$ al corte $AP(x)$ se expresa por la ecuación $y = \frac{axx-x^3}{aa}$ por lo que hay que buscar un punto E tal que $\overline{ED}$ sea el mayor de todos los semejantes a $\overline{PM}$. Se calcula $dy = \frac{2axdx-3xxdx}{aa} = 0$ obteniendo el punto AE(x) $= \frac{x}{3}$. Para la resolución retoma la caracterización de Leibniz a través del método de las diferencias, fundamentada en identificar el signo de las diferencias en una región muy cercana al máximo o mínimo bajo un carácter geométrico-analítico. L'Hôpital considera que una diferencia no

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

puede convertirse de positiva a negativa si no se hace pasar por cero, o por infinito, según refiere Castañeda (2006).

A continuación, describimos las entidades primarias que componen esta configuración: la situación problema planteada está en un contexto geométrico trabajando con magnitudes, y acuerdo con González (2011) por la herencia griega, se sigue manteniendo la norma de configuración de este tipo de expresiones.

En la solución se utiliza un lenguaje propio de la geometría euclidiana y simbólico (denota con dy y dx a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y). El gráfico utilizado para ilustrar la situación representa el concepto que se quiere analizar junto con ciertos elementos gráficos. Las definiciones utilizadas son las curvas (formadas por segmentos rectos infinitamente pequeños) y las diferencias (partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen las variables creciendo o decreciendo de manera continua) y de acuerdo con González (2011) la definición de puntos máximos y mínimos es totalmente dinámica.

Como proposiciones consideramos las fórmulas para derivar productos, cocientes y potencias. El procedimiento utilizado se configura a partir de un discurso descriptivo y la noción de diferencia. El razonamiento está basado en el aumento de la variable (dependiente) y diferencia positiva, mientras que la disminución implica diferencia negativa. Para que la diferencia pase de positiva a negativa o viceversa ésta ha de ser cero o infinito.

Por tanto, se ha de calcular los puntos en los que la diferencia de L'Hôpital es cero.
Las argumentaciones, tal y como señala Pino, Godino y Font (2011), son puramente sintéticas.

A continuación, generalizando este ejemplo, expresamos de manera sintetizada la CE-1D mediante la Figura 3:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

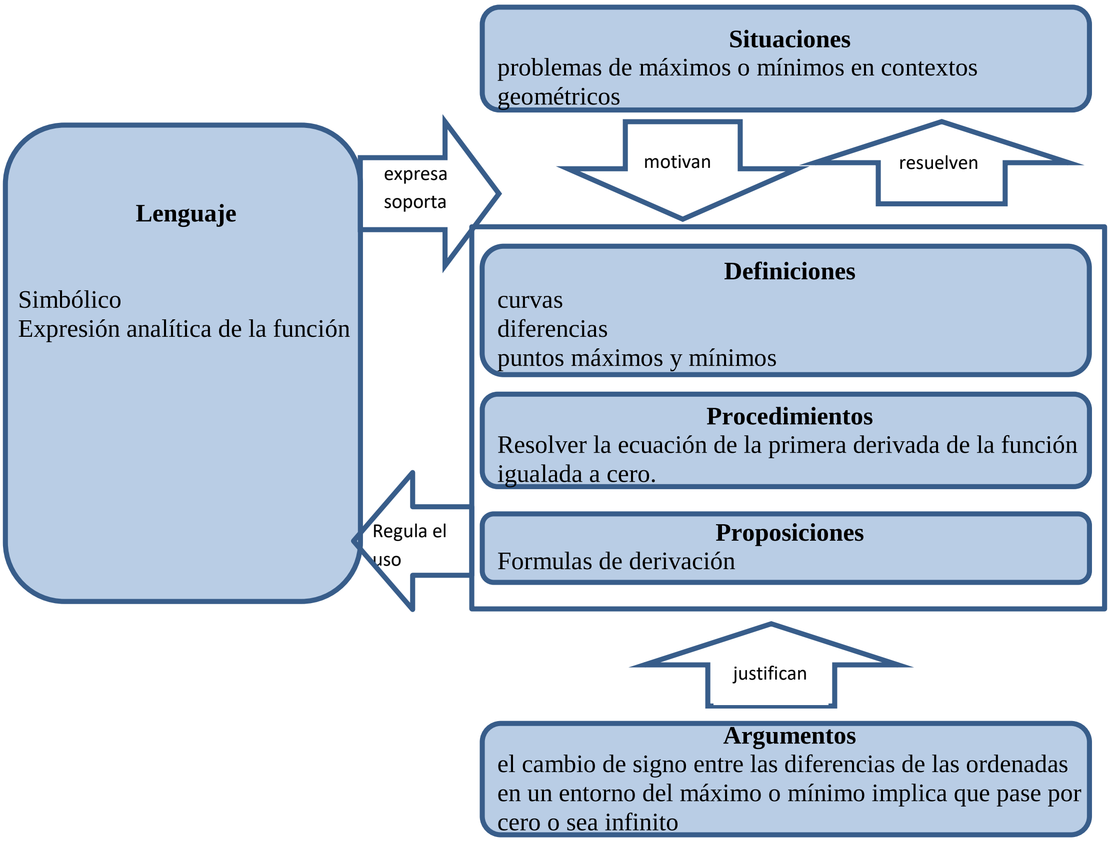



**Figura 3**- Esquema CE-1D
Fuente: elaborado por el autor

### 4.2 La optimización en los libros de texto

En esta sección se describe el significado institucional pretendido de la optimización en 2º de Bachillerato, indicando los tipos de prácticas operativas y discursivas y las configuraciones de objetos y procesos puestos en juego. Como se indicó en la metodología, se realiza el análisis según dos fases. La primera corresponde al análisis de objetos matemáticos que aparecen en la introducción del concepto y en el desarrollo del mismo a lo largo del texto aplicando las entidades primarias de la actividad matemática (CONTRERAS et al., 2005; CONTRERAS; ORDÓÑEZ; WILHELMI, 2010). La segunda fase corresponde al analisis de las configuraciones que aparecen en el texto y los conflictos semióticos potenciales que induce según la técnica GROS.

#### 4.2.1 Primera fase. Análisis de objetos matemático

Una vez descritas las configuraciones epistémicas de referencia en la institución, hemos analizado cómo se presenta la noción de optimización en la muestra de libros de texto,

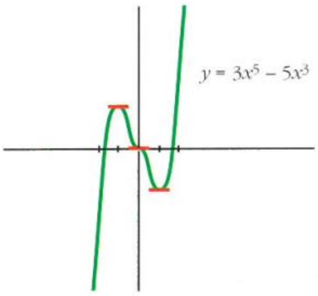
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

realizando un análisis pormenorizado de cada uno de ellos. Comparándo con las configuraciones epistémicas descritas anteriormente permiten detectar disfunciones en la introducción y desarrollo de la optimización en los manuales. Por falta de espacio, este apartado lo ilustramos con el análisis de la editorial Anaya (T1), sin embargo, presentamos la discusión de los resultados obtenidos en los tres manuales:

- Editorial T1 - Situacionales: de las 77 situaciones problemas analizadas, el 93,50% de ellas hace refencia a situaciones intramatemáticas (geometría plana y espacial, aritmética, funciones) y el resto son aplicaciones a otras ciencias (Física y Economía). Las situaciones que se seleccionan como motivación son referentes a la física.

En lo que respecta a los ejemplos (Figura 4), se incluye cuatro ejemplos después de la introducción teórica. Los dos primeros ilustran el procedimiento para identificar los extremos relativos de una función y los dos segundos ilustran la resolución de un problema de optimización utilizando en ambos situaciones de la propia matemática (aritmética y geometría espacial).

Sin embargo, si conocemos la abscisa y la ordenada de todos los puntos singulares de un cierto intervalo en el que la función es derivable, así como el valor de la función en los extremos del intervalo, basta con unir todos los puntos para averiguar de qué tipo es cada uno de ellos.




Por ejemplo, en la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ obtenemos los puntos singulares $(-1, 2)$, $(0, 0)$ y $(1, -2)$. Están todos ellos en el intervalo $[-2, 2]$ donde la función es derivable: $f(-2) = -56$, $f(2) = 56$.

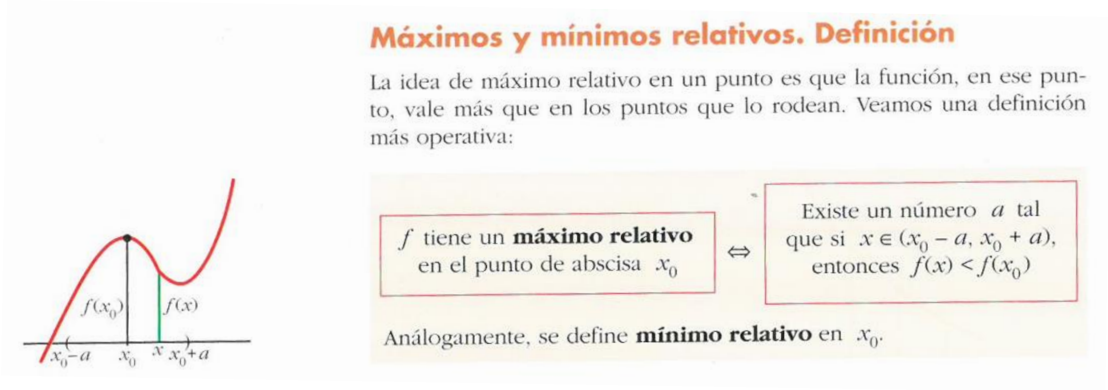
Representamos los cinco puntos y los unimos cuidando de que en los puntos singulares haya tangente horizontal, y de que no la haya en ningún otro punto. De este modo se aprecia de forma indudable que en $(-1, 2)$ hay máximo relativo; en $(0, 0)$, inflexión, y en $(1, -2)$, mínimo relativo.

**Figura 4** - Uno de los ejemplos que aparecen en el texto
Fuente: COLERA et al. (2009)

- Lingüísticas: se utilizan los lenguajes algebraico, gráfico y numérico.

- Conceptuales: se definen los conceptos de intervalo, punto singular y máximo y mínimo relativos utilizando para estos últimos las configuraciones CE-O (lenguaje algebraico y geométrico) y CE-1D prevaleciendo la segunda como definición formal (Figura 5). Ausencia de la definición de optimización introduciéndose a partir de sus aplicaciones.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11


**Máximos y mínimos relativos. Definición**

La idea de máximo relativo en un punto es que la función, en ese punto, vale más que en los puntos que lo rodean. Veamos una definición más operativa:

$f$ tiene un **máximo relativo** en el punto de abscisa $x_0$ $\Leftrightarrow$ Existe un número $a$ tal que si $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, entonces $f(x) < f(x_0)$

Análogamente, se define **mínimo relativo** en $x_0$.


**Figura 5** - Definición de máximo y mínimo
Fuente: COLERA et al. (2009)

- Proposicionales: se incluyen dos proposiciones. Por una parte se demuestra la condición necesaria de extremo relativo en funciones derivables utilizando CE-1D, para la argumentanción de no suficiente utilizan un contraejemplo de CE-T. Por otra parte, se demuestra la condición suficiente para la existencia de extremo relativo utilizando CE-2D.

- Procedimentales: solo son incluidas las configuraciones CE-T, CE-1D y CE-2D para calcular extremos relativos. La resolución de los problemas considerados se reduce a encontrar la expresión analítica de la función que describa la situación problemática, junto con el dominio de definición que vendrá dado por las condiciones del problema, y optimizar la función calculando los extremos absolutos en un intervalo cerrado y acotado. En el caso de ser una función derivable en el entorno se indica a nivel teórico utilizar CE-1D, y en caso de presentar puntos de discontinuidad o no derivabilidad se asocia CE-O.

Por tanto, se ofrece un método general (CE-1D) que será aplicado a casos particulares en los que los razonamientos intuitivos se asocian a la CE-T. De hecho, de los trece problemas resueltos que se incluyen en el texto, once están asociados a la CE-1D, y los otros dos a la CE-T y CE-2D respectivamente.

- Argumentales: no se introducen técnicas de indagación y descubrimiento aunque sí se justifica el método general para aplicar la técnica de resolución de los problemas (Teorema de Weiestrass). La línea general de las argumentaciones es formal y deductiva.

Así, la discusión del análisis realizado en los tres libros de texto muestra que, en cuanto a la situaciones problemas los tres manuales incluyen, con mayor frecuencia, intramatematicos: geometría plana (distancia, ángulo, perímetro y área), geometría espacial (dimensionar figuras e inscribir/circunscribir unas en otras), funciones y números. Estas categorías están incluidas en la clasificación de Camacho y González (1998). Las situaciones aplicadas a otras ciencias son muy escasas, destacando que todos incluyen la Física (T2 tiene un apartado exclusivo) y Economía (T3). Los tipos de situaciones que hemos encontrado se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

confirman en González y Sierra (2004b) como característicos de los manuales pertenecientes al periodo de la LOGSE. Situaciones cercanas al entorno del alumnado sólo son consideradas por T3.

Los ejemplos que se utilizan para facilitar la compresión del discurso son repetitivos. En la resolución de los problemas de optimización apenas son incluidos para el caso de funciones que presenten puntos no derivables o discontinuidades, siendo probablemente estas cuestiones las que mayores dificultades presenten para los alumnos. La presencia escasa de ejemplos constituye un conflicto semiótico potencial.

En cuanto a los lenguajes utilizados predomina el algebraico apoyado por gráfico para facilitar la compresión del alumnado. Apenas aparece el uso del lenguaje numérico, siendo T2 es el que más lo utiliza, lo cual obliga al lector a realizar razonamientos sobre las figuras que, al no estar apoyadas por valores numéricos, pueden conducir a conclusiones falsas. La muy escasa presencia del lenguaje numérico costituye un conflicto semiótico potencial.

En cuanto a los conceptos, nos centramos en tres nociones: punto crítico, extremos y optimización. El primero solo es considerado por T1 usando dos configuraciones (CE-1D y CE-T), el segundo los abordan los tres textos desde la configuración CE-O y el tercero solo es considerado en T3.

Destacar la ausencia de la definición de optimización siendo uno de los contenidos principales de la unidad. Los tres textos justifican su importancia, por los múltiples ámbitos en los que se puede aplicar, sin embargo, consideramos necesaria la definición para aclaración del lector.

En cuanto a las proposiciones, los tres manuales incluyen la condición necesaria (CE-1D) y suficiente (CE-2D) para la existencia de extremos relativos. Ninguna de las proposiciones son demostradas en T3. La configuración CE-T es utilizada como apoyo intuitivo, ya que no se expone ninguna propiedad que justifique su uso para identificar los extremos relativos y en cambio sí se exponen y se demuestran para el criterio de la primera y segunda derivada, lo cual constituye un conflicto semiótico potencial.

En cuanto a los procedimentos para abordar problemas de optimización, los tres manuales lo reducen a encontrar la expresión algebraica de la función que describa la situción a optimizar y aplicar como herramienta principal el procedimiento de CE-1D, o en el caso de T3, también CE-2D que ni siquiera está referida en T2. Por el contario, solo T2 justifica el uso del procedimento general y comprueba si se cumplen las propiedades necesarias para su aplicación.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

Por último, consideramos un conflicto semiótico potencial el no discriminar entre cuándo se ha de aplicar el primer criterio y cuándo el segundo para máximos y mínimos. Ninguno de los manuales tiene en cuenta este conflicto y, por tanto, no se realizan ni inducen actos de comprensión para que los alumnos puedan superarlo. Cuando la función no es continua en algún punto del intervalo no se ofrece procedimiento para abordarlo.

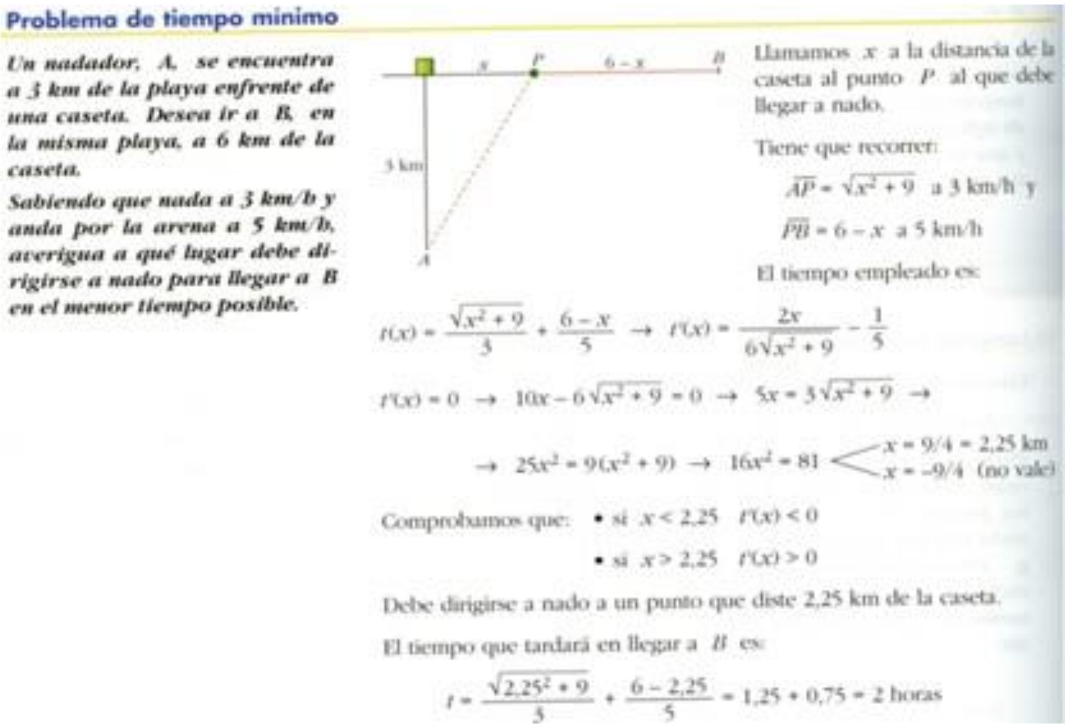
En cuanto a la argumentación, en líneas generales los tres manuales son deductivos, iniciando los discursos con definiciones y propiedades y se ofrece un método general que se particulariza con posterioridad.

### 4.2.2 Segunda fase. Análisis pormenorizado de un problema de optimización

A continuación, se ilustra el análisis de un problema de optimización correspondiente a una de las configuraciones que aparece en los tres elementos de la muestra (C-1D), utilizando la técnica GROS (Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados) (RIVAS; GODINO; CASTRO, 2012) en la que aparecen las entidades primarias de la actividad matemática y donde se describen, de modo pormenorizado, los conflictos semióticos potenciales. Por falta de espacio no se incluyen ni las proposiciones ni los argumentos.

El problema (Figura 6) elegido aparece resuelto en T1 y ha sido seleccionado para ilustrar este apartado por ser la editorial utilizada con mayor frecuencia en los centros jiennenses (Cuadro 1). Además, este tipo de problema fue incluido por L'Hôpital en su obra "Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbe", resolviéndolo por el criterio de la primera derivada (SANTIAGO, 2008). El tipo de situación corresponde a la categoría del problema del nadador (velocidades distintas en medios distintos) presentada en la investigación de Camacho y González (1998) como uno de los tipos de problemas que están incluidos de forma general en los libros de texto.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11



**Problema de tiempo mínimo**

***Un nadador, A, se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 km de la caseta.***

***Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.***



Llamamos $x$ a la distancia de la caseta al punto $P$ al que debe llegar a nado.

Tiene que recorrer:

$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + 9}$ a 3 km/h y

$\overline{PB} = 6 - x$ a 5 km/h

El tiempo empleado es:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5} \rightarrow t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2+9} = 0 \rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+9} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 = 9(x^2+9) \rightarrow 16x^2 = 81 \begin{cases} x = 9/4 = 2{,}25 \text{ km} \\ x = -9/4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Comprobamos que:
- si $x < 2{,}25$ $t'(x) < 0$
- si $x > 2{,}25$ $t'(x) > 0$

Debe dirigirse a nado a un punto que diste 2,25 km de la caseta.

El tiempo que tardará en llegar a $B$ es:

$$t = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 1{,}25 + 0{,}75 = 2 \text{ horas}$$

**Figura 6** - Problema analizado mediante técnica GROS
Fuente: COLERA et al. (2009)

- Situación-Problema: asociado a la vida cotidiana aplicación de la Física en donde se pretende determinar la distancia que hay que recorrer en cada medio a velocidades diferentes para minimizar el tiempo invertido en la totalidad del trayecto.

- Elementos lingüísticos: (Cuadro 3)

| Objetos | Significados |
|---|---|
| A, B, P | Posición inicial y final y punto donde se cambia de medio |
| 3 km, 6 Km | Medidas de cantidades de la magnitud longitud, cantidades extensivas |
| 3 Km/h, 5 Km/h | Medidas de cantidades de la magnitud velocidad, cantidades intensivas |
| x | Representa el valor de la distancia de la caseta al punto de cambio de medio |
| $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ | Distancia del segmento de extremos A y P , P y B |
| = | Representa la igualdad entre dos expresiones |
| t(x) t'(x) | Función a minimizar expresada analíticamente que formaliza la situación problema y función derivada |
| <,> | Orden *menor que*, *mayor que* |

**Cuadro 3** - Elementos lingüísticos
Fuente: elaborado por el autor

Los c*onflictos potenciales:* denotar incorrectamente la incógnita del problema; no relacionar la longitud del segmento PB con la distancia total: 6 Km y la distancia de la caseta al punto P; uso incorrecto de la notación t(x) o t'(x); realizar incorrectamente el diagrama que representa la situación problema; no identificar correctamente la simbolización implicada en el proceso de resolución.

- Conceptos: (Cuadro 4)

| Objetos | Significados |
|---|---|
| Incógnita x | Valor desconocido |

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

| | |
|---|---|
| Distancia | Longitud del segmento de la recta que une los puntos |
| Velocidad | Magnitud que expresa el desplazamiento por unidad de tiempo |
| Menor tiempo posible | Magnitud a minimizar |
| t(x) t'(x) | Función de una variable y función derivada |

**Cuadro 4** – Conceptos
Fuente: elaborado por el autor

Los c*onflictos potenciales*: plantear incorrectamente la función a minimizar con una variable; no conocer la fórmula de la distancia entre dos puntos; no conocer la fórmula de la velocidad.

- Procedimientos: (Cuadro 5)

| Objetos | Significados |
|---|---|
| Identificar la incógnita | Asociar una variable a la cantidad de la magnitud que se pide minimizar |
| Calcular la longitud de un segmento | Distancia entre los extremos del segmento |
| Definir el tiempo en función de espacio y la función velocidad | Expresar mediante una función en forma analítica la situación problema |
| Calcular primera derivada | Derivar suma y composición de funciones |
| Resolver ecuación | Permite resolver una igualdad donde hay en valor desconocido |
| Descartar soluciones | Interpretación de los posibles extremos con las condiciones del problema |
| Evaluar f' en el entorno del posible extremo | Condición de mínimo |

**Cuadro 5** – Procedimientos
Fuente: elaborado por el autor

Los c*onflictos potenciales:* no expresar correctamente la situación-problema mediante una función en forma analítica; no calcular correctamente la primera derivada; no resolver correctamente la ecuación radical; no identificar soluciones no válidas; no interpretar el resultado obtenido; no conocer el criterio de la primera derivada; no evaluar correctamente en la función t'(x).

## 5 Conclusiones

En este trabajo se muestran, siguiendo el enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática, los significados institucionales de referencia de la optimización mediante las configuraciones epistémicas extraídas de los significados histórico-epistemológicos de dicho concepto, habiéndose obtenido seis configuraciones (mayor-menor ordenada, tangente, adigualdad de Fermat, primera derivada, segunda derivada y multiplicadores de Lagrange). Este análisis nos ha permitido identificar el sistema de entidades primarias de la actividad matemática puestas en juego en el estudio de un contenido matemático como la optimización en tres libros de texto y detectar conflictos semióticos que pueden dificultar el aprendizaje del alumnado.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

En cuanto a la presencia de las configuraciones prevalece sobre las demás CE-1D seguida de CE-2D. Por el contrario, CE-O sólo se considera para entidades conceptuales y CE-T se relega a apoyar el razonamiento intuitivo. Sin embargo, consideramos necesario fomentar la configuración CE-T ya que, como consideran Karelin, Rondero y Tarasenko (2007), el aumento de situaciones donde se vincule el uso conjunto de los máximos y mínimos con la existencia de la recta tangente horizontal ayudaría a profundizar en nociones fundamentales del cálculo y a consolidar métodos de análisis sobre las características gráficas de las funciones.

Con respecto a la ausencia de la CE-A en los tres manuales, consideramos que impide transmitir al alumnado el significado completo de la optimización. La inclusión de esta configuración desvincularía a la optimización de la aplicación directa del Cálculo Diferencial (CONTRERAS; LUQUE; ORDÓÑEZ, 2004).

Las situaciones de optimización aplicadas en otras ramas de la ciencia son escasas. Este hecho contrasta con la realidad, ya que actualmente son numerosos los casos en las que otras ciencias utilizan este recurso para encontrar la situación óptima. Además, existe un gran número de aplicaciones cercanas al alumnado que se les puede mostrar. Estamos de acuerdo con Malaspina y Font (2010) en que el aumento de este tipo de situaciones en los libros de texto completaría el significado que se enseña a nuestros alumnos de este concepto.

En los tres elementos de la muestra hemos constatado la supremacía de los procedimientos sobre los conceptos. Esta elección puede dificultar el aprendizaje del alumno que, como consideran Moreno y Cuevas (2004), la interpretación errónea que realizan los alumnos de los conceptos de máximos y mínimos, implica en que consideren soluciones que contradicen su intuición a la hora de resolver problemas no rutinarios.

Analizando cómo se aborda la resolución de los problemas por parte de las tres editoriales, concluimos que todas siguen los pasos establecidos por Polya (1975) hecho que se constata en la investigación de González y Sierra (2004b) como característica común a los libros de texto de la etapa L.O.G.S.E. Esto conlleva una resolución rutinaria de los problemas, lo que según Tall (1997) propicia que no se realicen las conexiones conceptuales pertinentes.

Ninguna de las tres editoriales argumenta las ventajas e inconvenientes que cada configuración presenta sobre las demás para identificar los extremos relativos, no se comprueba que se cumplan las propiedades requeridas por cada configuración ni se señalan sus limitaciones. Por lo tanto, no se ofrecen criterios al alumno que le faciliten abordar con éxito estas situaciones.

Por último, mediante la técnica GROS se ha realizado un análisis pormenorizado de la actividad matemática en un problema de optimización, lo cual ha permitido obtener resultados relacionados con los conflictos semióticos potenciales en cada una de dichas entidades primarias. La finalidad de señalar tales conflictos es mejorar la información proporcionada por los libros de texto para el desarrollo de la actividad de la enseñanza.

## Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto I+D+i: EDU2012- 32644 del Ministerio de Economía y Competitividad de España (MEC).

## Referencias

BAYAZIT, I. Quality of the tasks in the new turkish elementary mathematics textbooks: the case of proportional reasoning. **International Journal of science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 11, n. 3, p. 651-682, 2013.

BOYER, C.B. **A history of Mathematics**. ed. Nueva York: Wiley International Edition, 1968.

CAMACHO, M.; GONZÁLEZ, A. Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. **Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca**, Salamanca, v. 10, p. 137-152, 1998.

CASTAÑEDA, A. Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Maria G. Agnesi. **Relime** . **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, México, v. 9, n. 2, p. 253-265, 2006.

CONTRERAS, A. et al. Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. **Recherche en Didactique de Matematiques**, Grenoble, v. 25, n. 2, p. 151-186, 2005.

CONTRERAS, A.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ, L. Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. **Relime**, México, v. 16, n.1, p. 59-87, 2004.

CONTRERAS, A.; GARCÍA, M.; FONT, V. Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26 n. 42B, p. 667-690, 2012.

CONTRERAS, A.; ORDÓÑEZ L.; WILHELMI, M. Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 28, n. 3, p. 367-384, 2010.

FONT, V.; GODINO, J. D. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 67-98, 2006.

GAUD, D.; GUICHARD, J.; SICRE, J.P.; CHRETIEN, C. **Des tangents aux infiniment petits**. ed. París: Irem, 1998.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

GODINO, J. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 22, n. 2.3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The Onto Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. **ZDM The International Journal on Mathematics Education**, Berlín v. 39, n. 1/2, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. **Relime**, México, v. 9, p. 133-156, 2006.

GONZÁLEZ, P.M. **Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII**. ed. Madrid: Editorial Alianza, 1992.

GONZÁLEZ, M.T. Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de l'Hôpital. **Epsilon**, Madrid, v. 77, p. 83-98, 2011.

GONZÁLEZ, M.T.; SIERRA, M. La enseñanza del Análisis Matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. **Historia de la educación**, Salamanca, v. 21, p. 177-198, 2004a.

GONZÁLEZ, M.T.; SIERRA, M. Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 22, n. 3, p. 389-408, 2004b.

HEATH, T. **The thirteen books of Euclid's Elements**. ed. New York: Dover, 1956.

KARELIN, O.; RONDERO, C.; TARASENKO, A. Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. En: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. México: Martínez, G., 2007. p. 386-391.

L'HÔPITAL, A. **Analyse des infiniment Petits pour l'intelligence des lignes courbes**. ed. Paris: ACL-Editions, 1696. Reimpresión, 1988.
MALASPINA, U.; FONT, V. The role of intuition in the solving of optimization problems. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, Netherland, v. 75, n. 1, p. 107-130, 2010.

M.E.C. Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 2007.

MORENO, S.; CUEVAS, C. Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. **Educación Matemática**, Distrito Federal, México v. 16, n. 2, p. 93104, 2004.

PINO, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 141-178, 2011.

POLYA, G. **How to solve it**: A New Aspect of Mathematical Method. ed. Princeton: University Press, 1975.

RIVAS, M.; GODINO, J. D.; CASTRO, W. F. Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 559-588, 2012.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. **Relime**, México, v. 11, n. 2, p. 267-296, 2008.

SANTIAGO, A. **Evoluçao historica dos problemas de optimizaçao e o seu tratamento no ensino secundário português nos séculos XX e XXI**. 2008. 290 f. Tesis (doctoral en Didáctica de la Matemática) - Universidad de Salamanca, Salamanca, 2008.

SCHUBRING, G. On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as texbook Author. **For the Learning of Mathematics**, New Brunswick, Canada, v. 7, n. 3, p. 41-51, 1987.

TALL, D. **Functions and Calculus**. ed. Dordrecht: Kluwer, 1997.

TANNERY, P.; HENRY, CH. **Fermat,p.: oeuvres de Fermat**. ed. París: P,Gauthier-Villars, 1912.

THOMSON, S.; FLEMING, N. **Summing it up**: Mathematics achievement in Australian schools in TIMMS 2002. ed. Melbourne: Australian Council for Educational Research, 2004.

VALVERDE, G. A. et al. **According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks**. ed. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 2002.

ZHU, Y.; FAN, L. Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 4, n. 4, p. 609-626, 2006.

**Submetido em 28 de Junho de 2016.**
**Aprovado em 13 de Março de 2017.**