# MODELOS MENTAIS E METÁFORAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBAIS

*Cleide Farias de Medeiros**

Resumo: Neste presente trabalho é feita, inicialmente, uma breve retrospectiva sobre os focos mais comuns dos estudos no campo da resolução de problemas matemáticos. É defendido que há algo mais a ser considerado nessa tarefa. Adotando a concepção de que o ser humano produz "modelos" ou "metáforas" na resolução de problemas matemáticos verbais inseridos em contextos reais é, primeiro, apontada a necessidade de entendimento do significado de modelo mental como sendo uma representação mental de um "todo" em que uma "teia" cognitiva que envolve significados acerca das suas "partes" encontram-se estrutural e coerentemente interligados. Em seguida é explorada a complexidade cognitiva envolvida na resolução de uma situação problemática idealizada na esfera de um modelo mental (ou metáfora) combinatorial. Algumas formas de soluções são exibidas apresentando as "armadilhas" do próprio problema, os aspectos culturais e a subjetividade do resolvedor como três elementos que parecem interferir na produção de um modelo mental bem-sucedido. São apresentadas sugestões para outros estudos.

Unitermos: Analogia, Idealização, Campo perceptual, Campo observacional, Combinação, Arranjo.

*Abstract: In this paper a brief survey is initially undertaken about the usual focuses of studies in the field of mathematical problem solving. It is claimed that more has to be considered in this task. By conceiving that human being produces 'models' or 'metaphors' in the resolution of mathematical verbal problems imbedded in real contexts, it is, firstly, pointed out the need for understanding the meaning of 'mental model' as a cognitive structure where meanings related to the 'parts' of a 'whole' are structurally interconnected and, secondly, the cognitive complexity involved in the resolution of a problematic situation which can be idealised within a combinatorial 'mental model' or combinatorial 'metaphor', is explored. Some ways of solutions are exhibited showing the problem 'pitfalls' as well as some aspects of the problem solver's culture and subjectivity as three elements which seem to interfere in the production of a successful 'mental model'. Suggestions for other studies are presented.*

*Keywords: analogy, idealisation, perceptual field, observacional field, combination, arrangement.*

## 1. Introdução

As pesquisas no campo da educação matemática têm incluído, dentre outras abordagens, os levantamentos de concepções dos alunos relativas a conceitos matemáticos específicos (por exemplo, Hart, 1987), estudos acerca da resolução de problemas, bem como estudos metacognitivos. Na esfera desses últimos estudos que abordam, dentre outras fontes de interesse, o exame das crenças dos estudantes acerca da natureza do trabalho matemático, tem sido detectado que os "*estudantes acreditam que problemas verbais podem ser resolvidos por uma aplicação direta de uma ou mais operações aritméticas e que as operações corretas a serem usadas podem ser determinadas meramente pela identificação de palavras-chave; pouco planejamento ou busca de significado é necessário*" (Garofalo & Lester, 1985, p.167). Essas visões dos estudantes acerca da resolução de problemas parecem ser opostas às descrições formuladas por alguns matemáticos sobre tal atividade. Assim, se por um lado, não devemos necessariamente aceitar que as visões de alguns especialistas dão conta epistemologicamente

* *Professora Adjunto IV, PhD, Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco,UFRPE, Recife, Pe, Brasil (e-mail: cfmed@hotlink.com.br)*

de uma descrição da atividade matemática como um “todo”, seria, por outro lado, difícil concordar com a visão dos estudantes, quando pensamos, principalmente, nos problemas não-rotineiros. Nos levantamentos das crenças dos estudantes do tipo acima sobre a resolução de problemas há subjacente a crença de que os mesmos poderiam conduzir a uma *heurística* dos “não-especialistas” que poderia trazer benefícios para a sala de aula.

Embora as habilidades dos estudantes e dos matemáticos possam ser diferentes, há alguma semelhança entre o que se objetiva nesses esforços de acumulação das crenças de iniciantes e aquela preocupação muito estimulada nos anos 50 de expor os assim chamados “procedimentos” dos especialistas quando resolvem problemas. Polya, em seus clássicos estudos, apresentou o que ele chamou de um primeiro trabalho sobre *heurística* moderna: “*uma lista de operações mentais tipicamente úteis na resolução de problemas*” (Polya, 1973, p.130-131). Ele focalizou a sua atenção naqueles procedimentos que, segundo ele, conduziria alguém ao sucesso no “ataque” a problemas e que o moveram na direção da sua aplicação no ensino de Matemática. Essa preocupação com os procedimentos e estratégias de resolução de problemas fez-se presente nas décadas subseqüentes, nos estudos de outros pesquisadores.

Tem havido, continuamente, ao longo das décadas, publicações relativas a estratégias na resolução de problemas enfatizando-se a recomendação e utilização no ensino de alguns procedimentos entendidos como adotados por matemáticos bem sucedidos na resolução de problemas. Esses trabalhos têm sido fortemente inspirados na descrição das quatro fases da resolução de problemas (compreender o problema; buscar uma situação semelhante; planejar a solução; checar a resposta), apontadas por Polya (1973). Entretanto, apesar da importância que certos processos e formas de “ataque” aos problemas possam ter, não é tão certo que o fornecimento de pistas, baseadas nos caminhos bem sucedidos e que se acredita, comumente, serem utilizados pelos matemáticos, possam por um fim nas dificuldades que alguém encontre na resolução de problemas.

> *Por definição, problemas não são rotinas, cada um constituindo-se, em um maior ou menor grau, em uma novidade para o aprendiz. Uma solução bem sucedida do problema é dependente do aprendiz não apenas ter o conhecimento e as habilidades requeridos mas também do estar apto a retirar deles o que é necessário e estabelecer uma rede ou estrutura* (Orton, 1987, p. 35).

Apesar disso, dentre aqueles que valorizam a resolução de problemas em seus conteúdos curriculares, tem havido uma ênfase considerável quase que exclusivamente nas habilidades em resolução de problemas para os alunos na escola.

Embora estando em alerta sobre a complexidade do ato de resolver problemas, os seguidores de Polya têm esperado que o ensino dos pressupostos procedimentos dos especialistas aos aprendizes direcione os aprendizes “*a imitarem*” (Polya, 1973, p. 4-5) as formas que teriam conduzido os matemáticos ao sucesso. Tem sido esperado que, dessa forma, as barreiras da aprendizagem da resolução de problemas possam ser removidas. Ao que parece, em assim fazendo, as características específicas de diferentes contextos nos quais certos problemas estão inseridos estão sendo subestimadas tal como as características peculiares dos tópicos envolvidos e a estrutura interna de cada problema como um “todo” individual. O que está, principalmente, sendo desconsiderado é o esforço educacional necessário de se adentrar nas experiências dos sujeitos, no seu fazer matemática com o objetivo de ajudá-los e “*proporcionar-lhes uma entrada na experiência*” matemática (Mason, 1988, p. 211). Polya não foi o único ou mesmo o primeiro que deu suporte à busca de um *know how*, um método para se resolver problemas; Dewey constitui um exemplo anterior a enfatizar as habilidades bem praticadas de uma rotina na resolução de problemas (Thomson, 1969). Polya, no entanto, "*conduziu o caminho na consideração de como estabelecer uma rotina para a resolução de problemas e, portanto, em como treinar as pessoas a tornarem-se melhores resolvedoras de problemas*" (Orton, op. cit., p. 35). Apesar da grande aceitabilidade dessa proposta educacional (a tentativa de se transmitir esses procedimentos gerais e que se acredita, comumente, serem essenciais e seguidos pelos matemáticos), o sucesso de um tal processo de transmissão de habilidades tem sido limitado. Dúvidas têm sido levantadas sobre a fecundidade da adoção de procedimentos gerais, embora, ao que parece, em menor intensidade do que a defesa de sua adoção. Os resultados de pesquisa têm sido diversos, principalmente no domínio do que tem sido chamado de *problemas verbais* e relativos à fecundidade do ensino de técnicas e habilidades (Suydam, 1982; Huggins, 1988; Jefferson, 1988). Nos anos 90, Coffman considerava que "*a resolução de problemas requer uma mente versátil, mas não se pode ser versátil sem um conhecimento médio de técnicas e métodos de descoberta*" (1990, p. 89). Se é assim, "*é interessante especularmos, entretanto, que embora tal treinamento em estratégias de resolução de problemas possa ter uma recompensa considerável, nós podemos estar movendo-nos na direção de uma abordagem mais algorítmica, com todos os perigos inerentes de uma aprendizagem algorítmica*" (Orton, op. cit., p. 35-36). Contra esse último posicionamento, poderíamos argumentar que o ensino de heurística não tem de ser algorítmico. Heurística e algoritmos possuem propósitos diferentes. Ao que parece, entretanto, em muitos livros de modelagem que oferecem algumas estruturações para a construção de modelos matemáticos, a "*estruturação é comumente usada apenas para rotular estágios, ao invés de propiciar a entrada na experiência. Não surpreende que os alunos vão embora com uma abordagem da matemática algorítmica e mecânica*" (Mason, 1988, p. 211).

Os estudos sobre a resolução de problemas realizados nos anos 70 e 80 enfatizaram a questão das estratégias e dos procedimentos ainda visando uma resposta à questão sobre os estudantes poderem ser treinados com as estratégias que conduziram os matemáticos ao sucesso. Como exemplo, pode ser citado o trabalho de Schoenfeld (1979) o qual apresentou um modelo de cinco passos que, segundo ele, guia o processo de resolução de problemas incluindo os estágios da análise, do planejamento, da exploração, da implementação e da verificação. Como resultado de seus experimentos educacionais, ele aponta que esse método conduziu os estudantes a uma maior fluência na geração de abordagens plausíveis aos problemas. Um outro exemplo é o estudo de LeBlanc (1977), o qual apresenta uma diferenciação entre "estratégias gerais" (plano geral para resolver problemas) e "estratégias de ajuda" (exemplos: fazer um diagrama, uma tabela etc.) e, finalmente, o de Clement (1985), o qual explorou um método de desenvolver as habilidades básicas de resolução de problemas em um curso visando corrigir as deficiências de jovens universitários.

Mais especificamente nos anos 90, de uma forma ou de outra, uma grande parte dos pesquisadores continuaram a incorporar, em seus estudos, a questão das estratégias e procedimentos. Têm sido focalizadas, por exemplo: 1. intervenções pedagógicas em sala de aula por meio de programas de treinamento de professores, fornecendo-lhes oportunidades de focalizarem a sua experiência pessoal como uma forma de obterem a autocompreensão e de reconstruírem os seus significados pessoais sobre a resolução de problemas e da sua instrução (Chapman, 1999); 2. a busca de um melhoramento da habilidade de estudantes em resolver problemas matemáticos verbais (Benko *et al*, 1999) que apresentavam, dentre outras inabilidades, a de ausência de uso de estratégia e uso de estratégia imprópria; 3.

a investigação de possíveis fontes (lingüísticas, conceituais, culturais etc.) subjacentes a erros primários (nos conteúdos) e secundários (nos procedimentos) cometidos na resolução de problemas matemáticos verbais inseridos em contextos reais (Medeiros, 1992); 4. um programa visando a abordagem de resolução de problemas colaborativa (Shapiro, 1999) e 5. o exame do escopo e da natureza das dificuldades com a modelagem matemática apresentadas por estudantes em suas tentativas de resolução de problemas verbais não-rotineiros considerando o contexto de cada problema (Verschaffel *et al*., 1999).

De um ponto de vista educacional, os estilos dos livros certamente influenciam a prática tanto dos professores como dos aprendizes em sala de aula. Comumente, os livros de Matemática apresentam situações matemáticas rotineiras, exercícios de fixação e a busca da criatividade pelo aluno não tem sido a sua característica mais marcante. A variedade e riqueza das diversas situações é o que diferencia entre o caráter de novidade de um problema e de uma rotina com situações já esperadas. Assim, não parece tão evidente a possibilidade de ensinarmos alguém a tornar-se um bom resolvedor de problemas em geral, sem firmemente considerarmos as dificuldades colocadas pelos próprios conteúdos e contextos envolvidos em cada situação problemática matematizável e a ser resolvida.

Não pretendemos aqui inclinar a balança na direção de que elemento deveria ser escolhido à própria custa do outro na disputa entre conteúdos e processos no ensino de matemática. O objetivo é o de apontar e exibir a complexidade envolvida no ato de resolução de uma situação problemática classificada na literatura sob a denominação de *problema "processo"*' (LeBlanc, 1977), e exibir aspectos importantes da relação entre o *contexto verbal* e o *contexto real* do problema na produção de um modelo matemático específico.

Dependendo de que aspecto seja focalizado, certamente qualquer objeto de estudo pode permitir tipificações e categorizações variadas e, por isso, há várias formas de classificação dos problemas matemáticos na literatura. LeBlanc, no mesmo estudo acima citado, aponta que o problema "processo" é assim denominado *porque é* um importante veículo para ensinar-se resolução de problemas, isto é, *"ele é adequado para a exemplificação dos procedimentos inerentes à resolução de problemas*" (p. 18). Ao mesmo tempo em que parece ser correto afirmarmos que todo problema no campo da Matemática pode ser resolvido de maneiras variadas, parece ser também certo que procedimentos variados parecem surgir mais facilmente na esfera de certos problemas do que em outros.

Neste presente estudo, embora sejam apresentadas algumas formas de solução do problema "processo" utilizado, não houve a intenção de dar conta das várias e diferentes estratégias passíveis de serem utilizadas em sua resolução.

Uma outra classificação dos problemas, dentre tantas outras possíveis, surge quando focalizamos o caráter simbólico dos seus enunciados. Tais enunciados são em geral constituídos de símbolos (signos arbitrários – sejam eles palavras da língua materna ou numerais) e/ou constituídos de representações gráficas tais como as geométricas. Logo, podemos dizer que todo problema matemático é simbólico. O grau de inserção de palavras, numerais e tais representações nos enunciados ocorre de maneira variável nas diversas situações problemáticas.

Parece plausível afirmarmos que, nessa esfera do simbólico, há situações problemáticas em que há um predomínio de termos da linguagem matemática (exemplos são as situações que incorporam as expressões do tipo: "demonstre que", "calcule" e "prove que" seguidos de uma expressão simbólica estritamente matemática) e há situações problemáticas nas quais há um predomínio de termos da língua falada ou escrita.

Tendo em vista o que é predominante nos enunciados, estamos denominando aquele primeiro tipo de problemas como sendo problemas simbólicos “não-verbais”. O primeiro tipo de problemas simbólicos lida com generalizações e não se encontra inserido em contextos reais. Diferentemente, o último tipo de problemas apresenta-se com um predomínio de termos da língua materna nos enunciados e pode, além disso, referir-se ou não a contextos reais. Neste presente trabalho, estamos denominando “problemas verbais” aquelas situações problemáticas particulares que se incluem nesse segundo tipo, isto é, elas têm a característica de apresentar um predomínio de termos e expressões da língua materna e que se encontram ou não inseridas em contextos reais. O problema mencionado e aqui abordado é um problema verbal inserido em um contexto real.

De um ponto de vista cognitivo, a resolução de problemas é uma das tarefas mais complexas na educação matemática, pois ela pressupõe não apenas a posse de conceitos variados e o conhecimento de estratégias variadas que não se mostram necessariamente as mesmas e apropriadas para todos os tipos de problemas. Essa atividade cognitiva requer, ainda, uma estruturação dos elementos ou “partes” componentes do problema em um “todo” coerente, harmonioso e aceitável pela comunidade de praticantes.

Quando abordamos problemas inseridos em contextos da vida real, expressos num misto de linguagem do dia-a-dia e da Matemática, ao resolvê-los produzimos *modelos*, que podem ser exclusivamente mentais ou também materiais. Nessa produção, focalizamos a atenção em apenas alguns aspectos da realidade subjacente e abstraímos (retiramos) outros. A escolha de que aspectos focalizarmos implica *subjetividade* e pode não ser trivial a questão dos aprendizes focalizarem os mesmos aspectos da realidade focalizados por aqueles que produziram o conhecimento matemático: a realidade é intrinsecamente multifacetada em sua natureza. Isso implica a necessidade dos educadores esclarecerem expressões comumente usadas, tais como “descoberta matemática”. Qual é o significado de descoberta? Trata-se da descoberta das mesmas coisas que os matemáticos têm produzido ou não?

As práticas educacionais têm caracterizado-se, ao que parece, por uma aglutinação mais ou menos consistente de várias teorias educacionais. Isso não parece ser uma característica exclusivamente brasileira. A partir dos anos 80, com a crescente ênfase nas propostas teóricas construtivistas, passou a haver entre os professores também uma retomada paralela do ideário escolanovista fazendo com que, na prática de ensino, as intenções dos discursos teóricos dessas duas tendências, bem como a sua prática, quase se confundissem. Na Inglaterra, por exemplo, apesar de haver ainda, sob certos aspectos, fortes resquícios da pedagogia tradicional, tornou-se comum nas boas escolas públicas a adoção de “sessões de práticas de laboratório” e de “resolução de problemas” muitas vezes municiadas por salas bem equipadas com materiais didáticos manipulativos e atividades informatizadas. Como observado *in loco* em escolas públicas desse país (Medeiros, 1992), apesar de todo o aparato material, as atividades de resolução de problemas que visavam a “descoberta” pelos alunos de padrões ou regularidades matemáticas em problemas apresentados pela professora (a qual ausentava-se de interferir), caracterizavam-se por uma ausência total de controle sobre o que de fato estava ou não sendo aprendido. Os acertos eram valorizados por meio de palavras elogiosas e os erros eram ignorados. A idéia preconizada era a de que aos alunos cabia “descobrirem” a Matemática por eles mesmos. Havia o sentimento, por parte de professores, de que o sucesso dos alunos estava sendo alcançado. Não havia, portanto, clareza sobre uma ampla existência de erros nas tentativas de resolução dos alunos e, com isso, o potencial educacional e epistemológico do “erro” era ignorado.

A prática de crianças lidarem sozinhas com materiais manipulativos ou com computadores modernos, ou tentarem resolver problemas matemáticos sozinhas não implica que esteja havendo uma aprendizagem significativa (vide Ausubel, 1980). O estudo de Medeiros (1992), envolvendo uma investigação sobre possíveis causas de erros cometidos em abordagens a determinados problemas matemáticos, exibe um quadro em que alunos ingleses considerados de alto nível ("top level") bastante acostumados àquelas sessões de resolução de problemas matemáticos, apresentam um amplo conjunto de percepções alternativas inadequadas. Tal estudo, dentre outras conclusões, apresenta a necessidade de uma participação epistemológica mais intensiva por parte dos professores em tais atividades. A avaliação comumente realizada pelos professores trazia a concepção implícita de que "tudo valia", não enfatizava a veiculação dos conteúdos e o importante era o aprendizado informal de estratégias, sem propriamente haver uma sistematização dos conteúdos. Aos alunos cabia "descobrirem" sozinhos as relações matemáticas e os princípios generalizadores, escolher estratégias, obterem as respostas, e não chegavam a saber por que o que tinham feito estava certo ou errado.

Se tivermos em mente a questão da avaliação e o contexto escolar em que o objetivo de apreensão, pelos alunos, dos conteúdos e métodos da matemática "oficial" seja considerado, uma confrontação entre as percepções alternativas dos sujeitos sobre as situações problemáticas estudadas e o caráter do "estar errado" e do "estar correto" aí envolvida parece ser inevitável. Tudo não vale! O caráter do "estar errado" nas avaliações pode ser tratado pelo menos de duas maneiras mais ou menos produtivas: 1. considerando-se meramente as respostas finais dos alunos, prática pouco produtiva que parece ser ainda muito comum também nas nossas escolas e que procura simplesmente observar se tais respostas correspondem ou não àquelas dos livros adotados; 2. abordando-se de uma forma ampla, primeiro, os vários requisitos verbais dos enunciados dos problemas, os quais podem induzir a conotações variadas e, segundo, os múltiplos aspectos da realidade em que o problema se insere, que poderiam ser focalizados de forma compatível com a possível intenção do autor da situação problemática e com determinadas respostas finais. É importante, ainda, que o educador procure analisar a natureza de cada erro apresentado, pois, numa certa tentativa de resolução de um problema matemático, pode haver erros que dizem respeito à natureza da estrutura matemática pretendida pelo autor de tal problema, erros que dizem respeito à estratégia inadequada adotada e erros relativos à falta de atenção e descuido nos cálculos etc.

A negação do "tudo vale" incorpora a visão lakatosiana sobre a matemática a ser ensinada como sendo aquilo que os matemáticos fazem e têm feito (Lakatos, 1976). É papel da instituição escola veicular o conhecimento elaborado, seja científico, matemático, artístico etc. Cabe à escola contribuir para uma adoção pelo aluno do que seria o pensar elaborado nas várias esferas do conhecimento; porém, não se ausentando de tentar veicular, o máximo possível, os conteúdos específicos. Não se trata de elegermos "quantidade" em detrimento da "qualidade"; mas de tentativamente elegermos "qualidade com o máximo de quantidade" que os vários fatores e barreiras ao trabalho educativo permitirem.

Como a realidade é multifacetada e os alunos possuem conhecimentos e experiências prévias, sob certos aspectos, nem sempre idênticos, não há quaisquer garantias de que o aluno sozinho e no tempo limitado de sua escolaridade consiga, sem a participação de alguém mais experiente, descobrir os padrões e princípios subjacentes às atividades intelectuais no campo matemático. Os alunos deveriam ser requisitados/convidados, em termos educacionais, a olharem para os mesmos aspectos da realidade que os matemáticos têm focalizado na produção de seus *modelos*. Um problema, porém, ainda persiste: o que é que os matemáticos fazem ao resolverem problemas? Eles realmente simplesmente adotam as fases apresentadas no modelo de Polya ou outras apresentadas por seus seguidores? Uma resposta o mais completa possível à primeira dessas duas questões é algo difícil ainda a se atingir. É intenção, neste presente texto, contribuir para o encaminhamento de uma resposta a essas perguntas mostrando, no contexto de resolução de um caso de problema verbal, primeiro, que há uma grande complexidade cognitiva subjacente à questão da adoção ou não de procedimentos e, segundo, que o resolvedor bem sucedido de situações problemáticas matematizáveis produz *modelos mentais* que são verdadeiras *redes metafóricas*.

## 1.2 Analogias, Modelos, Metáforas e a Resolução de Problemas Matemáticos

Tem havido uma referência contínua à expressão *modelo mental* como sendo algo construído pelos aprendizes ao focalizarem teorias e conceitos científicos e matemáticos ou ao abordarem situações problemáticas reais (Harrison & Treagust, 1996; Koyama,1997; Clement, 1985; Fichbein, 1990; Hong, 1993).

Geralmente, apesar da ambigüidade inerente, o uso da expressão *modelos mentais* tem sido tomado, aparentemente, como algo já garantido na literatura da educação nas ciências, havendo, no entanto, também aqueles que não concordam que o raciocínio das crianças seja governado por lógica ou *modelos mentais*, defendendo que esse raciocínio seria governado pela compreensão operacional de termos-chave de um dado problema (Carpendale, 1996). Dessa forma, podemos dizer que um *modelo mental* seria algo a ser atingido pelo aluno e não, necessariamente, já um ponto de partida ou algo tomado como inicialmente garantido.

Há uma gama muito variada de significados atribuídos à expressão *modelo mental* (Borges, 1997; Franco & Colinvaux, 1999). O pólo mais comum a que a expressão *modelo mental* encontra-se ligada diz respeito aos diferentes conhecimentos de diferentes sujeitos sobre um certo objeto de estudo e, neste caso, *modelo mental* tem sido aceito e entendido como sendo constituído por representações pessoais e privadas de um indivíduo. Ao que parece, entretanto, o termo *modelo mental* precisa incorporar algo mais em sua concepção/definição, senão ele aproximar-se-ia por demais da idéia de "concepção alternativa", tão usada nas pesquisas educacionais das últimas décadas. Em assim sendo, para que uma denominação diferenciada?

O constructo *modelo mental* está sendo entendido no presente texto como um instrumento cognitivo que incorpora algo mais do que uma mera "representação mental" ou uma "mera imagem mental" de um objeto de estudo.

O uso comum dessas duas expressões "imagem mental" e "representação mental" também apresenta uma certa ambigüidade e elas não têm em comum apenas o adjetivo. Elas têm em comum, por exemplo, a existência de posicionamentos teóricos diferentes quanto aos seus significados, usos e relacionamentos com os objetos que lhes dão origem. A questão sobre qual conotação está exatamente sendo feita no uso de termos como "imagem" e "representação" é muito complexa. Segundo Reber, "representação" é

> *algo que toma o lugar de, simboliza ou representa uma outra coisa. Em estudos da percepção e da cognição vê-se, freqüentemente, referência à 'representação mental' de um evento-estímulo que, dependendo da orientação teórica, pode ser caracterizada como um mapeamento direto do estímulo (realismo direto), uma elaboração do estímulo (construtivismo), um código mental dele (idéia, imagem) ou uma caracterização abstrata dele (proposição). Na teoria psicanalítica, os sonhos, as memórias, as fantasias e outras coisas semelhantes são também chamadas representações de fatores inconscientes e impulsos reprimidos* (1985, p. 639).

Na linguagem comum, o termo "imagem" tem sido utilizado como sinônimo de réplica, cópia, reprodução, duplicata etc. Algumas variações de uso técnico-científico são "imagem ótica" e "imagem retinal". Um uso bastante comum na psicologia cognitiva contemporânea é o de atribuir-se o significado à imagem como uma gravura na cabeça que constitui uma representação mental tipo "cópia" de experiência sensorial prévia. Entretanto, algumas observações apontadas por Reber merecem ser aqui introduzidas: a gravura não é uma gravura literal, o que existe é um tipo de gravura que se apresenta "como se" fosse o objeto representado. Há uma "correspondência ou semelhança" (*analog*, substantivo no inglês, é um termo por vezes traduzido imprecisamente como análogo – que é um adjetivo no português) entre a gravura mental e o objeto representado.

> *Uma coisa ou evento é dita constituir uma correspondência ou semelhança de uma outra se houver uma correspondência coerente entre as suas partes, funções, papéis etc.* (...) *existe uma relação de analogia entre a asa do morcego e as asas de um pássaro* (Reber, 1985, p. 31).

Assim, o processo de imaginar (formar imagens), como apontado por Reber, "*é um processo cognitivo que opera 'como se' houvesse uma gravura mental que estivesse em correspondência com uma cena do mundo real*" (op. cit., p. 344).

O uso do termo "representação mental" torna-se mais amplo do que o uso de "imagem mental", isto é, parece válido afirmarmos que toda imagem mental é uma representação mental, mas a recíproca não é verdadeira na medida em que "representação mental" pode incorporar vários tipos de "substituição" de uma coisa por outra quando estas estão sob alguma correspondência. Na representação mental, essa correspondência não tem de expressar a característica de similaridade entre a representação e o objeto representado. Assim, temos em Matemática os numerais, por exemplo, que são de certa forma meros desenhos, re-presentando a idéia (abstrata) de "número". Não podemos dizer, neste caso, que esta representação como tal guarda alguma semelhança com o objeto teórico representado. Este tipo de representação, tal como tantas outras utilizadas pelas ciências em geral e pela Matemática, é uma representação "simbólica", pois a relação estabelecida entre os objetos sob comparação é uma relação arbitrária, isto é, outros signos (arbitrários) poderiam ter sido, igualmente, escolhidos como representação do número. Na verdade, sabemos que houve historicamente outras representações simbólicas para a idéia/conceito de "número".

O ato de imaginar (formar imagens) pode também desvincular-se da existência do referente real e a expressão corriqueira "dar asas à imaginação" é bastante pertinente, pois não temos de entender a imagem como tendo como referente, necessariamente, uma representação visual. Podemos mesmo, como sugere Reber na mesma obra citada acima, formar imagens auditivas de tons conhecidos ou, ainda, imagens táteis. Um exemplo comum que poderíamos citar de formação de imagens táteis é o da brincadeira de "adivinhar" em que as crianças, sem ver, dizem quais nomes foram escritos em partes do corpo (tais como as costas). Há, também, nessa mesma obra, a sugestão da possibilidade de formarmos imagens gustativas ou olfativas e até mesmo termos "gravuras na cabeça" de fantasias, tais como a de um unicórnio atuando como um ciclista e, acrescentamos, a medusa da mitologia etc.

*Modelo mental* está sendo focalizado aqui como incorporando a concepção da formação de um "todo" representado mentalmente, relativo a um mero objeto físico, evento (ou fenômeno), ou teoria já elaborada por um indivíduo ou por uma comunidade como a dos cientistas. Esse "todo" constitutivo do *modelo mental* apresenta-se como uma verdadeira "teia" cognitiva de significados estrutural e coerentemente interligados ou *estrutura cognitiva* elaborada em função das "partes" desse objeto/fenômeno/teoria e que é formada fazendo-se uso do interrelacionamento de vários instrumentos cognitivos: representações ("re-presentificações") mentais, imagens mentais, idéias, conceitos, palavras, palavras-conceito (termo utilizado por Ausubel, 1980), denotações, conotações e inferências. A "teia" cognitiva ou *modelo mental* re-presenta esse objeto, fenômeno ou teoria na mente do indivíduo, isto é, resgata-o mentalmente. Considerando-se esta conceituação, parece factível pensarmos que um certo indivíduo pode lidar com representações mentais sobre um dado objeto de estudo ou de partes desse objeto, mas que não necessariamente apresente *modelos mentais* a seu respeito, isto é, ele pode não apresentar algo mais complexo que incorpore as representações das "partes" do objeto de estudo estrutural e coerentemente interligadas. Desse modo, um indivíduo pode resgatar mentalmente uma cidade por meio da vivência de sua vista aérea, mas não significa que conheça a interligação de suas ruas e de outras características suas. Alguns sujeitos podem até apresentar *modelos mentais* alternativos autoconsistentes. Mas, tanto o pressuposto de existência "garantida" de *modelos mentais* (no sentido atribuído no presente texto) de aprendizes, não especialistas, como o pressuposto de sua inevitável privacidade (algo típica e exclusivamente individual e, portanto, não compartilhado), induzindo numa postura filosófica *relativista* a olhar o sujeito como uma "ilha", parecem ainda carecer de peças de evidência empírica convincentes. O "tudo vale", tal privacidade e esta metáfora aqui problematizada serão focalizadas a seguir.

Se alguém considerar casos simples, como o exemplificado por Lacey (1986, p.97) relativo ao questionamento sobre "*se Oxford está à direita de Cambridge*" e concluir que uma decisão sobre a localização dessas duas cidades "*... depende de onde se esteja olhando*", isto é perfeitamente aceitável. Tanto os construtivistas como os realistas

> *estão igualmente impressionados pela dependência da teoria dos métodos científicos e mantêm que as reconstruções empiricistas que objetivam uma concepção não-metafísica do empreendimento científico são inadequadas para os fatos da prática científica e para a história da ciência* (Boyd *et al*, 1991, p. 11).

Mas, uma dificuldade inevitável a ser enfrentada no questionamento acima acerca do posicionamento de uma cidade em relação à outra é a de qual deveria ser a conclusão se diferentes pessoas olhassem para o mesmo aspecto dessas cidades (as suas posições geográficas), a partir de um mesmo ângulo ou ponto de vista, isto é, neste caso, de um mesmo lugar. Como defendido por Husserl,

> *o mesmo conteúdo de julgamento não pode* (...) *ser ao mesmo tempo "verdadeiro" e "falso". Se o relativista atribuir a essas palavras o significado apropriado, a sua tese estará em conflito com o seu próprio sentido* (1970, p. 140).

O subjetivista mantém a crença de que o sujeito é a força definitiva do conhecimento independentemente do objeto de estudo e a verdade é vista *como "verdade para ele próprio ou para ela própria*" ao invés de "*verdade em si mesma*" (Husserl, op. cit.) e ele ou ela "*não se curvará à objeção comum de que ao erigir a sua teoria, ele/ela está fazendo uma defesa visando convencer aos outros, uma defesa que pressupõe essa própria objetividade da verdade que a sua tese nega*" (Husserl, op. cit., p. 139).

A ciência é comumente aceita como apresentadora de modelos mentais (sobre variados objetos de estudo) de coletividades de especialistas que visam o consenso e que, portanto, não são nessa esfera exatamente total e exclusivamente individualizados. É interessante observarmos que ao compararmos uma teoria considerada científica com a realidade física que ela tenta explicar, essa teoria científica não deixa de ser algo mental, o que não significa estarmos adotando a idéia de que ela é algo privado e produzido independentemente do objeto real que se tenta explicar ou compreender. Ela é mental; porém, não exclusivamente individual (privada). "Mental" não é sinônimo de "individualizado". Uma teoria, enquanto teoria considerada científica, é compartilhada mentalmente por uma coletividade de especialistas que busca explicitar sua compreensão subjetiva por meio de uma comunicação tentativamente intersubjetiva. Além disso, uma teoria em seu processo histórico de elaboração não se inicia, necessariamente, com o consenso. O consenso é algo que se busca atingir no empreendimento científico. Quando esse consenso ocorre, tarefa não isenta de disputas epistemológicas, passamos a referirmo-nos à produção intelectual compartilhada pelos especialistas como "modelo consensual".

Se, por um lado, para que uma teoria seja considerada científica, há a necessidade do compartilhamento das idéias pelos "pares" da coletividade de praticantes, por outro lado, há, certamente, a possibilidade humana de existência isolada de modelos explicativos dos fenômenos apresentados por determinados indivíduos. Tais indivíduos tanto podem ser iniciantes (alunos) brilhantes na atividade de apropriação do conhecimento em sala de aula ou cientistas criativos e precursores de idéias que podem compor o quadro conceitual de certas teorias sujeitas até mesmo a não serem compreendidas e, portanto, não compartilhadas por outrem em um determinado tempo histórico. Segundo Strasser (1963), esse momento histórico caracteriza-se pelo que "*os contemporâneos gostam de referirem-se como 'descobertas revolucionárias*" (p.223). Strasser acrescenta que

> *uma descoberta essencialmente nova tem de ser expressa em uma nova "linguagem" e corporificada em um novo aparato científico. Conseqüentemente, ela não pode ser verificada através dos métodos científicos existentes. A emancipação intelectual do descobridor e desbravador autêntico é possível apenas porque, em última análise, esse homem sabe que ele não tem de justificar-se a si mesmo diante de seres humanos e suas instituições mundiais. A necessidade e a universalidade de seu pensamento não está mais baseada na concordância de uma sociedade; mas, sobre uma visão transcendente (p. 223).*

Esta é a situação em que o indivíduo traz contribuições importantes para o conhecimento pela façanha de apresentação de totalidades alternativas ainda não percebidas pelo grupo do qual ele ou ela é membro. Na prática comum do fazer científico, entretanto, se por um lado, o sujeito cognoscente é um indivíduo, por outro lado ele também é um membro de um determinado agrupamento cultural com variadas influências exercidas sobre si. Embora esse indivíduo não tenha o seu pensamento determinado pela cultura de seu grupo social, ele sofre múltiplas influências. Dessa forma, a negação da metáfora do sujeito cognoscente como uma "ilha" estabelece-se aqui no sentido de que "ilha", enquanto fenômeno geográfico, traz subjacente a idéia de isolamento do continente e essa metáfora (o indivíduo não é uma "ilha") traz a conotação de que o indivíduo não está isolado do grupo cultural em que ele se insere.

Por que parece ser sensato denominarmos a concepção, aqui mencionada anteriormente, do modelo mental como sendo essencialmente privado, de relativista? Focalizando-se o relacionamento sujeito–sujeito na esfera da produção do conhecimento, o relativismo epistemológico consiste na "*visão de que o posicionamento da aceitabilidade ou não-aceitabilidade do conhecimento é relativa a um grupo ou comunidade particular e que não há padrões epistemológicos objetivos*"(Boyd *et al*, 1991, p. 780).

Uma extensão dessa postura relativista, bastante comum entre professores, é: como para "para cada aluno há uma cabeça" e "cada cabeça é um mundo", conclui-se que numa sala de aula há muitos mundos isolados, isto é, "ilhas". Essa visão, ao nosso ver equivocada, tem dificultado a existência de práticas educacionais dialógicas e intersubjetivas, dada a relação "plurívoca" existente entre o(a) professor(a) unitário(a) e os vários alunos e que parece impor a impossibilidade de tais práticas libertadoras. Ao que parece, entretanto, a crença na ampla existência de modelos explicativos dos fenômenos, exclusivamente individuais, apresentados pelos indivíduos torna-se pouco sustentável se focalizarmos as concepções dos sujeitos sobre a "estrutura" do fenômeno em estudo e não, exclusiva e principalmente, suas concepções sobre detalhes periféricos desse fenômeno. Esses detalhes periféricos passíveis de serem focalizados, realmente são abundantes e podem desviar-nos da percepção da essência que estamos procurando em cada fenômeno estudado.

Medeiros (1992) apresenta vários exemplos que fortalecem a visão de que há abordagens compartilhadas (isto é, não completamente isoladas ou privadas) apresentadas por subconjuntos do conjunto total de alunos, em sala de aula, ao focalizarem situações problemáticas matematizáveis.

Considerando-se a relação subjetividade/objetividade, um *modelo mental* é uma *metáfora* de um objeto, fenômeno ou teoria. As *metáforas* têm sido estudadas por lingüistas e por filósofos (por exemplo, Black, 1979; Low, 1988, Mac Cormac, 1988; Cooper, 1986; Ricouer, 1978). Esses estudiosos têm acentuado o fato de que os seres humanos comunicam-se livremente com outros, alertas ou não, construindo *metáforas*. A influência recíproca entre a decodificação e a codificação de mensagens ocorre por meio do relacionamento entre o significado pretendido e o significado interpretado. Assim, a natureza *denotativa* das palavras é comumente associada pelos sujeitos com os seus significados *conotativos*. A *denotação* significa "*a coisa que é realmente nomeada ou descrita por uma palavra, ao invés dos sentimentos ou idéias que são sugeridas por uma palavra*" enquanto que a *conotação* é "*qualquer dos sentimentos ou idéias que são sugeridos por uma palavra, ao invés do significado real da palavra*" (Longman Dictionary of Contemporary English, 1987). Podemos dizer que o relacionamento entre o significado conceitual ou denotativo e o significado conotativo é tal que

> *enquanto o significado conceitual é substancialmente parte do 'sistema comum' da linguagem compartilhada pelos membros de uma comunidade da fala, o significado associativo é menos estável e varia com a experiência do indivíduo* (Leech, 1981, p. 19). *O significado conotativo é o valor comunicativo que uma expressão possui em*

> *virtude daquilo a que ela refere-se, para além de seu conteúdo puramente conceitual* (...) *conotações estão aptas a variarem de idade a idade e de sociedade a sociedade* (...) *elas variam, consideravelmente, de acordo com a cultura, período histórico e a experiência do indivíduo* (Leech, op. cit., p. 12-13).

Isso significa dizer que as palavras são usadas tanto em um sentido estrito como em um sentido amplo dependendo dos significados a elas atribuídos. Essa é a razão por que quando dizemos que "chove a cântaros", não estamos dizendo que potes caem do céu, mas que chove torrencialmente.

Como uma forma de linguagem figurativa, a *metáfora* é "*um instrumento lingüístico onde um conceito abstrato é expresso por meio de uma analogia*" (Reber, 1985, p. 438) com outras expressões. *Metáforas* são "*violações da literalidade e é a partir dessa forma de violação que elas suscitam seus efeitos emotivos e cognitivos*" (Reber, op. cit., p.438). A metáfora "*envolve o ver (e portanto o compreender) de uma coisa em termos de uma outra, é um fenômeno conceitual ao invés de um fenômeno exclusivamente lingüistico*"( Pimm, 1988, p.1). O termo *metáfora* não é apenas usado para referir-se a mensagens apresentadas em sentenças, não se refere apenas à semântica das palavras, mas tem também uma dimensão cognitiva. Além disso, a riqueza da idéia e do uso do termo *metáfora* não está limitada ao domínio da linguagem diária.

Os cientistas têm usado *analogias* para desenvolver as suas teorias. Por sua vez, tem sido ensinado à maioria das pessoas na escola sobre as células brancas do sangue e esses glóbulos têm sido apresentados pelos professores como um verdadeiro exército cuja função é defender o corpo humano contra inimigos, tais como os vírus e as bactérias. O modelo da bola de bilhar está presente na teoria cinética dos gases, dentre outros exemplos.

Uma *analogia* é, pois, uma correspondência estabelecida entre duas coisas sob comparação. Mais especificamente, uma analogia

> *é uma descrição, argumento ou explicação baseada em uma comparação sistemática de uma coisa com uma outra coisa já conhecida. O raciocínio analógico assim desenvolvido é uma heurística útil para revelar correspondência entre coisas... (Reber, 191985, p. 31).*

Em Matemática, a idéia de um número negativo tem sido, histórica e usualmente, associada com a idéia de um débito. Uma analogia tem sido também feita entre a prova por indução e um dominó, e assim por diante. Mas as analogias nunca são completas. Se assim o fossem, os objetos comparados tornar-se-iam uma réplica mútua de cada outro. Essa idéia não aceitável de uma réplica tem a ver com a visão da ciência ou da Matemática enquanto um conhecimento completamente *objetivo* quando surgido da realidade concreta.

Não parece ser razoável pensarmos a *objetividade* matemática como a "concordância total do pensamento com o objeto completo a que esse pensamento se relaciona", isto é, a matematização de uma situação real enquanto uma réplica dessa própria situação, porque uma situação real é mais complexa, mais rica do que a visão dela com que os matemáticos lidam. A forma em que um matemático olha para um fenômeno real não dá conta de todos os seus "lados", considerando-se o fenômeno como um todo. O olhar do matemático lançado para uma situação real é sempre seletivo.

A idealização de uma situação problemática real tem sido usual e simplesmente chamada de um *modelo* na educação matemática. Os *modelos* produzidos jogam um papel importante na resolução de problemas inseridos em contextos reais. Tal como ocorre na construção de *metáforas*, objetivando a comunicação, no uso diário da linguagem ordinária, os *modelos* baseiam-se em analogias que focalizam similaridades e diferenças entre duas situações que estejamos comparando: a original e a representação dela. Um *modelo* tal como a *metáfora* no domínio da resolução de problemas é, de uma certa forma, uma "violação" da riqueza de uma situação real inteira estudada que é propositadamente, e de acordo com certos objetivos, vista parcialmente. A forma com que um matemático lida com uma situação problemática da vida real não pretende ser exaustiva no sentido de que ele focaliza a atenção apenas naqueles aspectos da situação que se prestam a uma matematização. O matemático desnuda as situações reais, em que os problemas estão inseridos, de algumas de suas características para favorecer outras. Há um "empobrecimento" da realidade em sua idealização. Assim, embora certas características possam ser importantes no contexto inteiro de uma situação da vida real, elas podem ser descartadas na construção de um modelo matemático. O ponto difícil é: que características selecionar? A escolha adequada de que aspectos, dentre tantos outros, pode não ser trivial para iniciantes.

É válido salientarmos que dadas uma situação e a sua representação, tanto a situação como a sua representação podem ser referidas como um *modelo* ou como uma *metáfora* da outra. Mas, estes não são as próprias situações originais com todas as suas características, ambos são apenas representações delas baseadas em analogias estabelecidas sobre apenas alguns aspectos da situação original.

O ato de estabelecimento de uma analogia significa o ato de comparar uma coisa com uma outra que de alguma forma são semelhantes e de alguma outra forma são diferentes, especialmente com o objetivo de explicá-las. Há um impacto emocional diferente dos modelos e das metáforas sobre as pessoas, pois enquanto os modelos são estabelecidos e aceitos pelas suas semelhanças com os referentes originais que representam, as metáforas são captadas inicialmente pelas pessoas por meio das diferenças com os objetos representados. O problema é que explicações e teorizações sem metáforas

> *seriam difíceis, senão impossíveis, pois, com o objetivo de descrevermos o desconhecido, nós devemos fazer uso de conceitos que nós conhecemos e compreendemos e esta é a essência da metáfora – uma justaposição incomum do familiar e do não-familiar (Mac Cormac, 1988, p. 9).*

Entretanto, não parece ser suficiente dizermos como é comumente expresso que

> *embora a linha demarcatória não seja perfeitamente clara, a diferença entre uma analogia e uma metáfora depende do grau de diferença entre os dois referentes. Referentes que diferem substancialmente podem ser chamados metáforas enquanto aqueles que possuem mais similaridades são analogias (Mac Cormac, op. cit., p. 24).*

Como apontado por Mac Cormac, nessa mesma obra, a analogia é uma condição necessária para a metáfora, mas esta última não se constitui em apenas um subconjunto das analogias. A metáfora possui condições necessárias adicionais como a de, por exemplo, acarretar uma certa tensão emocional dentro de nós. Quando nós manipulamos um brinquedo que seja um modelo (material) de um avião, construído em escala, nós não nos chocamos com as possíveis diferenças entre ambos, embora saibamos que o modelo real vôa em longas distâncias, é feito de outro material, é muito maior etc. Na situação em que expressamos, por exemplo, que uma certa senhora atuante na esfera política é "uma dama de ferro", há um impacto emocional típico das metáforas. De uma mesma forma, ao apresentarmos a um iniciante uma matematização adequada de uma situação problemática real a ser resolvida ou uma demonstração de um teorema, isso pode requerer um certo tempo para que o mesmo se sinta psicológico-cognitivamente "confortável".

O uso dos termos *modelo* e *metáfora* diferencia-se basicamente pela intensidade em que as semelhanças e diferenças existentes entre os objetos comparados esteja sendo estabelecida. Na metáfora, a ênfase nas diferenças é maior e isto implica um certo impacto emocional no ouvinte ou no leitor de uma metáfora.

Eliade (1986) apresenta uma noção de *modelo* como sendo aquele instrumento cognitivo produzido através de uma re-descrição da situação real "*conduzida por uma rede metafórica ao invés de por uma afirmação metafórica isolada*" (p. 216).

Complementando o objetivo apontado em 1.1 acima, buscamos no presente trabalho apresentar elementos fortalecedores da visão da formação de "metáforas matemáticas" ou "redes metafóricas matemáticas", exemplificada na resolução de uma situação problemática real matematizável sob o prisma do modelo teórico matemático denominado *análise combinatória*.

O uso das expressões "metáfora matemática" e "rede metafórica matemática" como referências àquela idealização da situação real pelo matemático, acima referida, parece-nos ser preferível ao invés de "modelo matemático" ou simplesmente "modelo". Uma das razões é que os referentes (matematização e situações problemáticas reais) submetidos às analogias são bastante diferentes entre si (e isso é típico das metáforas!); uma outra razão é que as primeiras expressões mantêm uma semelhança com a expressão "rede metafórica" e também acentuam a questão do papel da linguagem na resolução de problemas parecendo possuir um forte potencial explicativo na educação matemática. Finalmente, uma terceira razão para a sugestão que fazemos do uso do termo "metáfora" ser preferencial é que apesar do fato das expressões *modelos teóricos* ou *modelos mentais* serem também comumente usadas na literatura e difíceis de caírem em desuso, a palavra isolada 'modelo' pode trazer à mente, em alguma circunstância, a conotação exclusiva de alguma coisa concreta e manipulável, uma representação tocável, apreensível pelos sentidos tal como, por exemplo, uma representação concreta (reduzida em tamanho) de um aeroplano (cf. Langford, 1971) e essa conotação exclusiva seria pouco produtiva no desvelamento de como ocorre a produção do conhecimento.

### 1.3 Os Requisitos do Problema e suas Soluções como 'Modelos Mentais' ou 'Redes Metafóricas'

Problema: Em uma festa escolar existem 32 pais presentes. Se cada pai apertar a mão (uma vez) com cada outro pai, quantos apertos de mão aconteceriam, no total, nessa festa?

Esse problema, porém, com dados numéricos diferentes, foi utilizado por LeBlanc (1977) para ilustrar o que ele denominou de "problema processo"; mas, considerando-se as definições dos problemas simbólicos apresentadas na introdução deste presente trabalho, ele também pode ser caracterizado como "problema verbal" inserido em um contexto real.

O potencial explicativo da análise apresentada a seguir poderá ficar mais perceptível se o leitor focalizar a estratégia de resolução "listagem dos agrupamentos" possíveis aplicável a este tipo de problema. A estratégia do "uso de fórmulas" de certa forma oculta a heurística a ela subjacente.

As resoluções de problemas ligados a situações reais, como a do problema acima, são marcante e inevitavelmente influenciadas pelos *campos perceptuais ou de percepção* (formas de olhar para os problemas) dos sujeitos e pelos *campos observacionais* (as características próprias) dos problemas. O *campo observacional* ou *campo de investigação* de cada problema desse tipo é constituído por um *contexto verbal* (palavras e numerais e suas denotações) e o *contexto real* (da vida real) em que o problema está inserido (Medeiros, 1992). Quando estamos tentando resolver uma situação problemática como essa, não observamos diretamente nem as entidades da realidade (por exemplo, pessoas, bonecas, jogadores, festas, fileiras etc.) envolvidas no processo de contagem dos agrupamentos com que os possíveis problemas do tipo acima estão envolvidos, nem as relações necessárias que interessam entre essas entidades em uma matematização adequada. No ato de resolução desse tipo de problema, as entidades da realidade podem ser chamadas de entidades "pensadas" pois elas não são necessariamente observáveis na situação vivida, por exemplo, em sala de aula. Os signos do *campo observacional*, no caso numerais e palavras, são meios que trazem às mentes daqueles que tentam resolver os problemas as imagens mentais e outras representações mentais dos objetos teóricos matemáticos e dos elementos (pessoas, objetos reais etc.) a serem contados mediante certos tratamentos, e não tais elementos propriamente ditos. O *campo perceptual* do sujeito é constituído por: 1. o conjunto de significados (formados pelas denotações – quando o sucesso do entendimento é atingido – e pelas conotações) atribuídos ao contexto verbal do problema; 2. as imagens mentais e outras representações mentais dos objetos teóricos matemáticos e dos elementos (pessoas, objetos reais etc.) a serem contados e 3. as *inferências* feitas a respeito dessas entidades reais.

As percepções dos sujeitos não ocorrem independentemente desse objeto de estudo (os problemas), mas em virtude deles e em conjunção com eles. Além disso, da mesma forma em que embora seja razoável a asserção de Scheerer (1987) – inspirada nos estudos clássicos da Gestalt – de que um problema possui a sua própria estrutura que aponta para a sua solução, também é razoável pensarmos que essas mesmas situações problemáticas podem convidar e conduzir alguém a cometer erros. Os problemas do tipo acima possuem "significados ocultos" aos quais o sujeito pode associar inferências falsas.

O *modelo mental* matemático (*metáfora* matemática) a ser construído para a solução desse tipo de problema é a *metáfora* do tipo combinatorial. Certamente,

> *a solução de problemas por métodos matemáticos é possível quando e apenas quando pode ser assumido que os fenômenos envolvidos no problema podem ser considerados como os elementos de algum sistema matemático (Sydney, 1990, p. 1).*

A matemática é utilizada para resolverem-se problemas de um certo tipo.

Com o objetivo de construir a *metáfora* matemática adequada a esse tipo de problema, aqui abordado, é requisitado do sujeito apreender os significados denotativos das palavras e das expressões verbais através dos quais as mensagens desses problemas são expressas e através dos quais o sujeito adentra nas situações da vida real subjacentes. Nesta abordagem mental à realidade subjacente a cada problema, é requerido do sujeito selecionar alguns de seus aspectos e fazer algumas inferências sobre eles enquanto outros aspectos são descartados. A partir daí, uma busca de referentes matemáticos (duplas, triplas etc.) também necessita ser desenvolvida para representar as relações estabelecidas entre cada conjunto de dois, três etc. elementos envolvidos nos possíveis agrupamentos. Uma dificuldade central nesse processo de matematização ou idealização da situação é quais relações entre as entidades pensadas da realidade devem ser selecionadas e associadas a certos objetos matemáticos que o sujeito possua em sua própria cultura matemática. Além disso, há também a interferência da cultura em um sentido mais amplo, que se refere a aspectos do comportamento social, tais como a forma de "apertar as mãos" e o momento adequado de fazê-lo em uma festa. Uma certa forma de apertar as mãos é algo considerado normal ou "o certo", porque essa forma é culturalmente determinada e convencionalmente aceita pelo agrupamento social.

A escolha de determinadas relações adequadas relativas às entidades do contexto real de problemas desse tipo, em vez de outras, não são apenas dependentes de conceitos tais como *ordem*, é também um produto da *intencionalidade* do sujeito. Em outras palavras, os aspectos da realidade escolhidos pelo sujeito espelham a *direcionalidade* de sua atenção, os "lados" das situações problemáticas sobre os quais ele está consciente, em alerta. A resolução de um problema requer não apenas conhecimentos conceituais isolados, mas a formação de uma verdadeira "teia" ou estrutura cognitiva ligando os mais diversos elementos, ou seja, requer a formação de um *modelo mental* ou *rede metafórica*. Não é suficiente em uma abordagem de resolução de um problema deste tipo, ora em foco, fazermos uma utilização de objetos matemáticos adequados tais como pares ordenados, pares com elementos repetidos ou não, é preciso lidarmos sempre coerentemente, na listagem dos agrupamentos, com as *relações de ordem* e de *dependência ou independência* de eventos no "todo" formado. A importância da posse de um conceito está na rede de relações que o circundam.

Embora não seja, de forma alguma, um processo rígido do tipo "passo a passo", a *rede metafórica* que parece ser estabelecida quando tentamos resolver com sucesso este tipo de situação problemática (com o contexto verbal atuando como mediador do contexto real) pode ser aproximadamente sumarizada como segue:

Contexto verbal: o processo de leitura envolve a apreensão dos significados denotativos (significados estabelecidos na esfera da língua portuguesa "oficial" ou na esfera de termos da matemática "oficial");

Contexto real:

•O processo de "leitura" envolve, inicialmente, representações mentais dos elementos da vida real subjacente, no presente problema: os pais, a festa, os apertos de mão etc. Essas representações constituem imagens que não são exatamente cópias e não captam toda a riqueza da situação da vida real. Essas imagens são metáforas: embora elas mantenham semelhanças, elas apresentam variadas diferenças com relação aos elementos reais representados;

•Alguns aspectos das entidades reais são abstraídos (descartados), enquanto outros aspectos são escolhidos e enfatizados; por exemplo, não importa se os pais são ricos, gordos, altos, ou simpáticos; mas, importa que cada pai é um indivíduo e nesse sentido deverá ser representado, convenientemente, em um processo de listagem das possibilidades; esse processo de escolha de que aspecto relevar é tipicamente metafórico;

•Inferências úteis e adequadas são estabelecidas a respeito das relações entre as entidades reais específicas escolhidas da realidade, isto é, inferências precisam ser feitas a respeito da dependência ou da independência dos eventos e a respeito de questões relativas à ordem dos elementos. Dessa forma, se na interpretação sobre a festa for considerado que o pai A (numa expressão de possível alegria) aperta as suas próprias mãos, isso implicará que o par (A,A) deverá ser incluído no processo de contagem das possibilidades de apertos de mão. Por outro lado, se a interpretação sobre a festa considerar que o pai A em um certo momento aperta as mãos do pai B e tem, em outra ocasião, as suas mãos apertadas pelo pai B novamente, a ordem dos elementos deverá ser considerada no processo de contagem das possibilidades;

•Símbolos convenientes (signos arbitrários) são escolhidos para representar os elementos (entidades reais a serem incluídas nos agrupamentos sob contagem) mencionados no problema. Isso significa ser fundamental, em um processo de listagem das possibilidades, que não se represente cada pai por desenhos de bonequinhos iguais e repetidos ou por barrinhas iguais (comportamento comum entre iniciantes). Não apenas cada pai deverá ser representado por seu signo individualizado e arbitrário (simbólico), como ele precisa diferenciar-se dos outros símbolos representativos dos outros pais. Na ausência desse tipo de representação, a contagem dos agrupamentos envolvendo um grande número de elementos no processo de listagem tornar-se-ia difícil, senão impossibilitada. Esse tipo de representação necessária, arbitrária e individual mantém uma analogia com a individualidade dos pais; mas, por outro lado, afasta-se fundamentalmente de uma analogia baseada apenas na relação de semelhança de outros aspectos dos referentes e típica dos ícones, tal como uma fotografia. Assim, esse ato intelectual do processo de matematização, que é a escolha dos signos representativos dos elementos a serem contados, constitui uma metáfora;

•Referentes matemáticos (duplas, triplas etc.) são escolhidos para representar os agrupamentos e os relacionamentos escolhidos entre os elementos. Isso significa que parte do contexto verbal do problema tal como, neste caso, “se cada pai apertar as mãos (uma vez) com cada outro pai” requererá um tratamento metafórico, isto é, o resolvedor deverá buscar, na esfera dos seus conhecimentos matemáticos prévios, certos instrumentos que possam ser colocados numa situação de analogia com tal expressão verbal acima mencionada, e que é condição do problema colocado. O instrumento adequado para o presente problema é a idéia da formação de duplas. É claro que o par (A,B) guarda uma certa relação de semelhança com um par verdadeiro de pais; mas guarda, fundamentalmente, várias diferenças e, por isso, é uma metáfora;

•Um trabalho coerente geral é desenvolvido dentro da estrutura (forma em que as partes são interligadas formando um “todo”) ou do encadeamento de idéias do *modelo mental* ou *rede metafórica* formada.

Esse trabalho intelectual não necessariamente ocorre de forma completamente consciente para o sujeito que aborda a situação problemática, ao ponto de explicitá-lo verbalmente para outrem, mesmo no caso daquele bem sucedido.

Com relação ao problema aqui estudado, o trabalho coerente dentro do *modelo mental* ou *rede metafórica* formada pode requerer uma busca de padrões (regularidades) e o uso de um critério de listagem dos agrupamentos para facilitar o trabalho inteiro, se adotarmos a estratégia de listagem das possibilidades. Quando as soluções para esse tipo de problema baseiam-se na utilização direta de fórmulas, a *rede metafórica* utilizada não se mostra tão evidente. Tal rede cognitiva fica mais clara quando é adotado o procedimento da listagem de possibilidades. A utilização exclusiva de fórmulas não externaliza os instrumentos cognitivos que foram adotados pelo resolvedor de problemas do tipo aqui abordado. Não se torna claro, para um avaliador e, às vezes, para o próprio resolvedor, o que conduziu alguém a escolher uma certa fórmula e não uma outra. Como mostrado por Medeiros (1992), um resultado muito comum apresentado por resolvedores de problemas do tipo acima é a troca das estruturas combinatoriais de situações problemáticas reais aparentemente semelhantes. Essa troca inadequada, da estrutura combinatorial de "arranjo" com "combinação", e vice-versa, é muito comum entre iniciantes no estudo desse tópico matemático. Comumente, a escolha de uma certa fórmula ou algorítmo, parece ser feita com base em uma espécie de "intuição" em que a discussão feita acima a respeito do processo de leitura dos contextos verbais e dos contextos reais das situações problemáticas não está clara para os iniciantes em resolução de problemas verbais.

### 1.4 'Armadilhas' do problema e aspectos da produção de modelos mentais ou redes metafóricas

As soluções de problemas do tipo apresentado acima trazem explícita ou implicitamente a idéia da formação e contagem de agrupamentos. De um ponto de vista da idealização matemática pertinente, a estrutura matemática aceita como sendo adequada para uma solução é a da "metáfora combinatorial", isto é, uma *combinação* (*C*32,2).

Os contextos *verbal* e *real* desse problema apresentam "armadilhas" que, aliadas ao *campo subjetivo* daquele que o aborda, podem induzi-lo a estruturá-lo numa outra metáfora combinatorial, a de um *arranjo* (*A*32,2). Esta última alternativa não é comumente aceita como solução. Em qualquer das duas abordagens, na resolução matemática do problema, são descartadas ou abstraídas certas características, tais como se há ou não uma quantidade adequada de comida na festa, se os pais são ricos ou pobres, felizes ou infelizes etc.

Algumas soluções para esse problema incluem as três seguintes. Como já mencionado, a *rede metafórica* constituída torna-se mais clara na terceira abordagem.

$$Cn,r=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{32!}{2x(32-2)!}=\frac{32x31}{2} = 496 \text{ apertos de mão}$$

Abordagem 1: A forma mais direta e formalizada de resolver essa situação problemática é, uma vez identificada como envolvendo uma combinação, simplesmente, a aplicação da fórmula:

Abordagem 2: Se alguém não está familiarizado com a fórmula envolvendo a contagem de agrupamentos, o problema pode ser por ele "atacado" em um modo mais analítico, tratando a informação do enunciado do problema e interpretando os aspectos relacionados às situações do dia-a-dia e às convenções sociais. *Conotações* e *inferências,* as quais subjazem esta situação e são essenciais para uma solução, são feitas sobre a base de observação da vida diária em sociedade e convenções do comportamento social, a saber:

•Nenhum dos pais aperta as suas próprias mãos. Isso implica, numa matematização conveniente, a busca da *metáfora* segundo a qual "não haverá elementos repetidos nos pares cujos elementos representarão os pais";

•A condição expressa verbalmente de que "cada pai aperta as mãos apenas uma vez com cada outro pai", incorpora a *denotação* que significa "um par de pais define um aperto de mão" na matematização. A *ordem* dos elementos em cada aperto de mão (ou par) não importa, não deverá ser considerada. A expressão "não importa" incorpora a denotação de que não deverão ser contados os pares cujos elementos já façam parte de algum agrupamento, simplesmente com as posições trocadas entre si nas duplas. A expressão "uma vez" implica a não existência de permutações entre os elementos de cada par. Pares tais como (A, B) e (B, A) não podem ambos, concomitantemente, serem incluídos no processo de contagem. Entretanto, essa última inferência pode ser mais difícil de ser alcançada por aqueles que estejam iniciando suas abordagens a problemas como esse. Uma vez aceita que a *ordem* não importa, o sujeito deveria notar que quando ele considera quaisquer dos pais como sendo o primeiro, esse pai apertará as mãos com os outros 31 pais. O próximo que já apertou as mãos com o primeiro, apertará as mãos com os 30 pais restantes, e assim por diante. Assim, seria obtida a série: 31 + 30 + 29 + 28 + .....+ 2 + 1. Esse é um outro problema para o sujeito "dar conta". Colocando-se de lado a idéia de somarmos um por um, tais números, o sujeito poderia usar diretamente a fórmula de uma progressão aritmética ou proceder numa abordagem gaussiana. Aplicando-se a fórmula, isso conduzir-nos-ía a:

$$S= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 31)x31}{2} = \frac{32x31}{2} = 496 \text{ apertos de mão}$$

Se a fórmula da progressão aritmética não estiver psicologicamente disponível no campo perceptual ou repertório de conhecimentos prévios do sujeito, ele poderia seguir a forma alternativa e carregada de *insight* da "abordagem gaussiana" percebendo o padrão ou regularidade subjacente a uma série desse tipo, isto é, que os dois extremos da série (1 e 31) adicionados geram 32, o mesmo resultado é obtido quando o segundo número (2) é adicionado ao penúltimo número (30), e assim por diante. Essa abordagem é similar àquela registrada a respeito do *insight* do jovem matemático C. F. Gauss (1777-1855), sobre o qual é dito ter abordado o problema de descobrir, na forma mais rápida possível, a soma dos números inteiros de 1 a 1000. Uma análise psicológica marcante da abordagem perspicaz de Gauss, na solução desse problema, foi apresentada por Max Wertheimer (um dos idealizadores proeminentes da teoria psicológica da Gestalt) em sua obra *Productive Thinking* (1959, p.108 – 142). Uma característica mais difícil de ser percebida é que, neste processo, como a série apresenta um número ímpar de termos (31), o termo do meio (16) estaria não pareado. Assim, a soma da série produz:

| (32 | + 15) | + 16 | = 496 possibilidades |
|---|---|---|---|
| (Soma de cada par considerado) | (Total de pares) | (Termo do meio) | |

Abordagem 3: Uma forma alternativa de busca de solução desse problema poderia ser a tentativa de listagem de todos os pares (apertos de mão) possíveis. Nesse caso, uma exigência impõe-se, que é a necessidade de escolha de um critério conveniente de listagem dos pares. Além disso, como já mencionado anteriormente, há a necessidade de que os 32 pais envolvidos sejam representados com referentes arbitrários, ou seja simbólicos, sem que nenhum deles esteja repetido para pais diferentes. Esses dois cuidados são decisivos para o sucesso quanto à percepção de um padrão ou regularidade ou mesmo para evitarmos de nos perderna tentativa de listar todas as possibilidades.

Representando-se os 32 pais com numerais de 1 a 32 e adotando-se o critério de fixarmos um primeiro numeral e variarmos os demais, os seguintes pares são obtidos formando a seguinte *configuração triangular*:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,2 | | | | | | | | | | |
| 1,3 | 2,3 | | | | | | | | | |
| 1,4 | 2,4 | 3,4 | | | | | | | | |
| 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | | | | | | | |
| 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | .. | | | | | | |
| 1,7 | 2,7 | 3,7 | 4,7 | .. | .. | | | | | |
| 1,8 | 2,8 | 3,8 | 4,8 | .. | .. | .. | | | | |
| 1,9 | 2,9 | 3,9 | 4,9 | .. | .. | .. | .. | | | |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | | |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | |
| 1,32 | 2,32 | 3,32 | 4,32 | .. | .. | .. | .. | .. | .. | 31,32 |

31 + 30 + 29 + 28 + ..........................................................................+ 1

No *modelo mental* ou *rede metafórica* subjacente às soluções acima apresentadas podemos perceber a necessidade do sujeito cognoscente lidar concomitantemente com características do *contexto verbal* e do *contexto real* do problema.

Algumas “armadilhas” desse tipo de problemas que podem ser apontadas são, por exemplo, o fato de que embora seja mencionado no enunciado do problema que cada par de pais aperta as mãos apenas uma vez, questões relativas à convenção de comportamento social em uma festa não são enfatizadas. Aliás, um problema só é problema porque tudo não é dito para o encaminhamento de sua solução. Entretanto, aspectos de convenção social dos comportamentos coletivos estabelecidos em uma certa cultura podem exercer alguma influência quando pessoas abordam problemas do tipo aqui referido. Se alguém, principalmente o iniciante em resolução de problemas, fixasse a atenção em regras ligadas ao comportamento social do agrupamento humano em que ele se insere, ele poderia ter algumas dúvidas, tais como perguntar-se sobre quem, na festa, tomará a iniciativa de primeiro “apertar as mãos” de cada outro componente da festa: a pessoa que está chegando à festa ou cada um daqueles que já lá estão? Se, na abordagem desse problema, fosse levada em consideração as possibilidades de “iniciativa de apertar as mãos” (a tomada de iniciativa), como sendo algo central, isto é, se o sujeito fosse “desencaminhado” pelo foco no problema em termos dessa “tomada de iniciativa” (que seriam duas possíveis), em vez de abstraí-la, a *ordem* dos elementos importaria. Nesse caso, faria sentido considerarmos os pares ordenados na contagem das possibilidades. O *modelo mental* ou *metáfora* matemática produzida seria a de um *arranjo* (resposta: 992 apertos de mão) e não mais uma *combinação*. A configuração geométrica (imagem visual) obtida no processo de listagem seria *retangular*, um retângulo sem a diagonal. De uma mesma forma, se em uma determinada cultura fosse uma prática comum nas festas, o indivíduo apertar as suas próprias mãos, teríamos A apertando as mãos de A; B apertando as mãos de B, e assim por diante. Isso acarretaria que os pares (A,A), (B,B) etc. deveriam ser incluídos no processo de contagem. O *modelo mental* ou *metáfora* matemática produzida seria a de um *arranjo com* *repetição* (resposta: 1024 apertos de mão). A configuração geométrica obtida seria também, nesse caso, retangular; porém, um retângulo incluindo a sua diagonal. Neste processo de "leitura" do *contexto real* do problema, a cultura à qual o indivíduo pertence com toda a sua prática de vida, pode interferir no tipo de *idealização matemática* ou *modelização matemática* produzida.

Esse tipo de problema inserido em contextos da vida real e envolvendo a contagem de agrupamentos, apresenta "armadilhas" que têm de ser superadas nas buscas de solução. A resolução de problemas desse tipo numa estrutura coerente requer dos sujeitos o discernimento claro a respeito de duas características centrais: 1. a *dependência* e a *independência* dos eventos e 2. a questão da *ordem* dos elementos nos pares formados. A informação completa necessária para a solução requer considerarmos os relacionamentos acima entre as entidades da realidade e essa informação nunca é diretamente afirmada nos enunciados dos problemas porque a sua ausência é parte da razão por que essas situações são chamadas "problemas". As *inferências* necessárias para alguém decidir sobre a *dependência* ou *independência* dos eventos bem como sobre a *ordem* não são evidentes nas palavras isoladas mencionadas nos enunciados dos problemas.

A forma em que os problemas são postos pode mais ou menos sugerir certas idéias que não são necessariamente percebidas pelo iniciante em resolução de problemas, mesmo quando são diretamente afirmados. Neste problema, aqui em foco, há uma informação diretamente afirmada que, uma vez percebida, pode ser determinante para que a questão da *ordem* seja resolvida: a informação de que cada pai apertará as mãos dos outros pais apenas uma vez. Mas, a questão da *independência* ou *dependência* dos eventos tem de ser *inferida* pelo sujeito a partir das características do *contexto real* subjacente ao *contexto verbal*. Não pretendemos, entretanto, sugerir que as dificuldades inerentes à resolução de problemas seriam prontamente superadas caso a informação necessária para tal resolução fosse diretamente fornecida nos seus enunciados e que, com isso, as questões relativas ao *campo de observação* minimizariam as possíveis conotações inadequadas pois, mesmo assim, as fontes de dificuldades que residem no *campo perceptual* do sujeito poderiam não ser eliminadas sem um grande esforço.

A compreensão das mensagens escritas dos problemas e as conseqüentes abordagens adequadas são dependentes do contexto verbal (lingüístico) e do contexto real (situação real subjacente), bem como dos conhecimentos prévios daqueles que tentam resolvê-lo. Dessa forma, a complexidade envolvida no ato de resolução de problemas extrapola a questão da mera utilização ou não de certas estratégias. As origens das dificuldades maiores enfrentadas adentram outras esferas cognitivas.

## Considerações finais

Toda busca de conclusão de um estudo, à guisa de um resumo do argumento e/ou de uma explicitação dos temas nele abordados parece remeter o(a) autor(a) a uma difícil tarefa que é a de, por um lado, não desconsiderar questões importantes abordadas e, por outro lado, não se tornar repetitivo(a). Tentando evitar isso, podemos dizer que desenvolvemos, neste presente estudo, a temática dos modelos mentais, bastante mencionada na literatura, articulando-a com uma discussão acerca de procedimentos na resolução de problemas matemáticos. Para isso, expusemos controvérsias registradas na literatura sobre a efetividade da ênfase no ensino de estratégias para a atividade de resolução de problemas matemáticos e abordamos questões relativas ao processo de idealização de uma situação problemática real passível de receber um tratamento matemático, aceito na assim chamada Matemática "oficial". Problematizamos e tentamos ampliar (por exemplo, com a introdução das dimensões epistemológicas subjetiva, cultural e objetiva) tanto a discussão sobre modelos como a discussão sobre a resolução de problemas matemáticos verbais. Analisando essa atividade de idealização matemática, utilizamo-nos do constructo *modelos mentais*, redefinindo-o e comparando-o com os instrumentos cognitivos "metáfora" e "redes metafóricas" para, então, argumentarmos e tentarmos mostrar, em uma situação problemática específica, que quando resolvemos problemas matemáticos verbais o fazemos a partir de *metáforas* constitutivas de verdadeiras "redes metafóricas". Assim, é questionada a ênfase unilateral comumente colocada no ensino de estratégias de resolução de problemas matemáticos, dada a complexidade envolvida na produção do conhecimento.

Analisamos as dificuldades inerentes à resolução de um certo tipo de problemas verbais e focalizamos, brevemente, as relações sujeito–objeto e sujeito–sujeito na produção de uma "idealização matemática", afirmando a interferência de "armadilhas" da situação problemática real abordada e da subjetividade dos indivíduos que a abordam. No bojo da discussão, esta análise esteve alimentada, dentre outros fatores, por uma visão de produção do conhecimento não relativista, questionadora da visão da existência corriqueira de modelos mentais (enquanto uma "teia" cognitiva de significados estrutural e coerentemente interligados ou estrutura cognitiva) totalmente "privados".

Gostaríamos de esclarecer que exibimos, no presente texto, um certo lado do processo de resolução de problemas verbais (inseridos em contextos reais) o qual poderia incorporar a possibilidade de existência de determinadas conotações e inferências apresentadas pelos sujeitos "resolvedores" e que podem ser induzidas por possíveis "traços" culturais ou certos comportamentos (tal como a prática de apertos de mão em uma festa), imaginados como típicos/exclusivos, de um certo agrupamento sócio-cultural. Isso, certamente, conduziria para a percepção de estruturas matemáticas diferentes e alternativas na resolução de um mesmo problema matemático em foco. Mas esse posicionamento não se apresenta, para nós, como um posicionamento relativista; pois uma coisa é reconhecermos a influência (verdadeira) da cultura na nossa percepção do mundo, outra coisa é pensarmos que tais modos diferentes de perceber o mundo sejam algo necessariamente privativo de um indivíduo ou de um determinado agrupamento sócio-cultural. Na verdade, a matemática é uma linguagem (que é – antropologicamente – um elemento da cultura), mas é também lógica; e há sempre a possibilidade de comunicação humana. Para esta comunicação ocorrer, faz-se necessário que os diferentes indivíduos coloquem-se no mesmo "ângulo de visão" dos outros indivíduos e esforçem-se para focalizar o mesmo "lado" do objeto estudado por eles posto em foco. Não vivemos em um "asilo" constituído de seres incomunicáveis. Por outro lado, ao referirmo-nos aqui à influência cultural na produção do conhecimento, isso não implica que estejamos simplesmente adotando a teorização (bastante difundida) da tendência da "etnomatemática", pois em uma boa parte de estudos nesse campo, parece haver a ausência de apresentação de "peças de evidência empírica" para a existência de "Matemáticas diferentes". O mais comum em tais estudos é a apresentação de um "fazer a Matemática" (de grupos humanos abordados), considerado ser diferente do modo "oficial", mas que, possivelmente, tornar-se-ia questionável se o foco da observação e análise dos seus autores fosse colocado nos aspectos essenciais (estrutura matemática, por exemplo) das abordagens dos sujeitos às diversas situações matemáticas. Talvez a diferença existente entre as percepções matemáticas dos grupos se mostrasse estar residindo em uma questão da linguagem usada pelos diferentes grupos ou no fato de que os "lados" da situação problemática matemática (em foco) não são exatamente os mesmos abordados pelos diferentes sujeitos dos grupos sociais. Mas, este aqui não é o fórum indicado para essa complicada discussão; isso constitui-se bem mais em uma sugestão para futuros estudos em paralelo àquelas sugestões que seguem abaixo.

Gostaríamos de registrar aqui a importância de nós, pesquisadores na área da educação em ciências em geral e da Matemática, percebermos que o caso de simplesmente apresentarmos novas denominações e adjetivações para os possíveis "processos" e características da produção do conhecimento tais como, dentre outras, a de "modelo mental" pode não estar sendo tão produtivo quanto poderia ser se adicionássemos, como tarefa para a nossa prática de pesquisa, uma busca contínua de "peças de evidência empírica", necessárias para o fortalecimento das teorias preconizadas.

A crítica acima exposta aplica-se, certamente, às concepções apresentadas no presente trabalho, cabendo aos possíveis simpatizantes das idéias aqui expostas uma busca de peças de evidência empírica para o constructo das *redes metafóricas* relativas aos diversos tópicos teóricos, científicos e matemáticos cujo relacionamento com o mundo real pareça claro, seja este "concreto" ou social.

Em uma continuidade deste presente estudo, além da sugestão acima colocada sobre a questão "etno", algumas tarefas paralelas extras e aparentemente promissoras de pesquisa (tendo sempre em vista a busca de peças de evidência empírica) seriam: 1. coletarem-se as matematizações de situações problemáticas do tipo aqui abordada ou de outros tipos, produzidas por alunos, analisando-se em que extensão elas se constituem em *modelos mentais* no sentido em que essa expressão está aqui sendo utilizada; 2. considerando-se tanto o *campo observacional* das situações problemáticas verbais como o *campo perceptual* dos sujeitos, analisarem-se as possíveis diferentes fontes de dificuldades enfrentadas pelos estudantes e exibidas em suas tentativas de resolução; 3. examinar-se em que extensão a utilização de *imagens visuais* (configuração triangular, configuração retangular etc.) como aquelas relacionadas na seção 1.4 poderia ajudar aos estudantes a lidarem mais adequadamente com problemas envolvendo análise combinatória básica e focalizando as matematizações do tipo combinação, arranjo etc. em intervenções pedagógicas em sala de aula; 4. analisar-se em que extensão a recomendação comum da estratégia de resgate mental/utilização de um "problema similar" – que tenha sido abordado com sucesso no passado – constitui-se em uma verdadeira ajuda na resolução de um problema "semelhante" sob abordagem; 6. transformando-se as *imagens visuais*, acima mencionadas, em configurações exibidas no plano empírico-concreto, sob a forma de materiais manipulativos (modelos), examinar-se em que extensão o uso de tais materiais poderia ajudar aos alunos que enfrentam dificuldades ao tentarem compreender as situações problemáticas teóricas e suas soluções, e 7. realizarem-se essas sugestões de pesquisa para outros tópicos matemáticos buscando-se observar se problemas relacionados a cada tópico específico requerem/não requerem procedimentos e estratégias específicos para as suas soluções.

## Referências bibliográficas

AUSUBEl, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. Trad. Eva Nick. *Psicologia Educacional.* Rio de Janeiro: Editora Interamericana, 1980.

BENKO, A.; LOAIZIA, R.; LONG, R.; *et al*. *Math word problem remediation with elementary students*. Illinois: Saint Xavier University, IRI/Skylight, 1999. (Master's Action Research Project)

BLACK, M. More about metaphor. In: ORTONY, A. (ed.) *Metaphor and Thought*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

BOYD, R. *et al.* (ed.) *The Philopsophy of Science*. Cambridge: The MIT Press, 1991.

BORGES, A. T. Um estudo de modelos mentais. *Investigações em Ensino das Ciências*, v. 2, dez. 1997.

CARPENDALE, J. I.; Language and operations in children's class inclusion reasoning: the operational semantic theory of reasoning. *Developmental Review*, v. 16, n. 4, p. 391-415, Dec.1996.

CHAPMAN, O. Inservice teacher development in Mathematical problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 2, n. 2, p. 121-42, 1999.

CLEMENT, J. A method experts use to evaluate the validity of models used as problem representations in Science and Mathematics. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONL RESEARCH ASSOCIATION, april 1985, Chicago.

COFFMAN, J. *What to Solve?* Oxford: Oxford University Press, 1990.

CCOPER, D. E. *Metaphor*. England: Basil Blackwell Publisher Ltd, 1989.

ELIADE, M. Metaphor and Reference. In: RICOEUR, P. (ed). *The rule of metaphor*: multidisciplinary studies of the creation of meaning in language. London: Routledge & Kegan Paul, 1986.

FICHBEIN, E. The autonomy of mental models for the learning of mathematics. *International Journal of Mathematics Education*, v. 10, n. 1, p. 23-30, Feb. 1990.

FRANCO, C.; COLLINVAUX, D. Grasping Mental Models. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 2, 1999, Valinhos. *Atas*... Valinhos, 1999.

GAROFALO, J.; LESTER, F. Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 16, n. 3, p. 163-176, 1985.

HARRISON, G.; TREAGUST, F. Secondary students' mental models of atoms and molecules: implications for teaching Chemistry. *Science Education*, v. 80, n 5, p.509-34, Sep. 1996.

HART, K.(ed). *Children's Understanding of Mathematics:* 11-16. London: John Murray, 1987.

HONG, E. Mental models in word problem solving: an analysis of Korean Elementary Students. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1993, Atlanta. 37 p.

HUGGINS, L. *The influence of specific thinking skills training on Mathematics problem solving performance*. University of South Carolina, 1988.

HUSSERL, E. *The crisis of european sciences and transcendental phenomenology.* Illinois: Northwestern University Press, 1970.

JEFFERSON, D. Experiment using schematic mapping skills to teach problem solving skills in vocational education. PhD Thesis. DAI, v. 50 A, 673, 1990.

KOYAMA, M. Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process model by analyzing an elementary school mathematics class. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, v. l5, p.21-33, Mar. 1997.

LACEY, A. *A dictionary of Philosophy.* London: Routledge & Kegan Paul, 1986.

LAKATOS, I. *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

LANGFORD, G. *Philosophy and Education.* London: Mcmillan, 1971.

LEBLANC, J. You can teach problem solving. *Arithmetic Teacher*, p. 16-20, nov.1977.

LEECH, J. *Semantics:* the study of meaning. England: Penguin Books, 1981.

LONGMAN DICTIONARY OF CONTEMPORARY ENGLISH, New Edition, England: Longman, 1987.

LOW, G.D. On teaching metaphor. *Applied Linguistics*, v. 9, n. 2, p. 125-147,1988.

MAC CORMAC, E. R. *A Cognitive Theory of Metaphor.* London: The MIT Press, 1988.

MASON, J. Modelling: what do we really want pupils to learn? In: PIMM, D. (ed.) *Mathematics, Teachers and Children.* Great Britain: The Open University, 1988.

MEDEIROS, C.F. *An Investigation into Errors Made in Attempts to Solve Mathematical Problems*. PhD Thesis, Center for Studies in Science and Mathematics Education, Leeds, England, 1992.

ORTON, A. *Learning Mathematics.* London: Cassell Educational Limited, 1987.

PIMM, D. Mathematical Metaphor. *For the Learning of Mathematics*, v. 8, n. 1, p. 30-34, 1988.

POLYA, G. *How to solve it.* New Jersey: Princeton University Press,1973.

________. *Mathematical Discovery.* New York: John Willey & Sons, 1968.

REBER, A. *The Penguin Dictionary of Psychology.* England: Viking, 1985.

RICOUER, P. *The Rule of Metaphor:* multidisciplinary studies of the creation of meaning in language. London: Routledge & Kegan Paul, 1986.

SCHEERER, M. Problem Solving. *Scientific American*, v. 208, p. 118-128, 1987.

SHAPPIRO, W., Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Quebec, Canada, April 19-23, 1999.

SCHOENFELD, A. Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, v. 7, p. 329-366, 1979.

STRASSER, S. *Phenomenology and the Human Sciences.* Pittsburg: Duquesne University Press, 1963.

SUYDAM, M. Update on research on problem solving: implications for classroom teaching. *Arithmetic teacher*, v. 30, p. 56-60, fev. 1982.

SYDNEY, C. *Fundamental Mathematics:* the principles and their applications to basic topics. London: Draft Edition, Rotex Publications, 1990.

THOMSON, R. *The Psychology of Thinking.* Middlesex: Penguin Books, 1969.

VERCHAFFEL, L.; CORTE, E.; VIERSTRAET, H. Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving non-standard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 30, n. 3, p. 265-85, May 1999.

WERTHEIMER, M. *Productive Thinking.* New York: Harper & Brothers Publishers, 1959.

Artigo Recebido em: 30/08/00
Artigo Aceito para Publicação em: 08/06/01