

Processo de Meixner: Teoria e Aplicações no Mercado Financeiro Brasileiro [♦]

José Santiago Fajardo Barbachan^{*}

Felipe Gomes Pereira Coutinho^{**}

Resumo

Modelos consagrados e amplamente utilizados no mercado, como o modelo de Black-Scholes, assumem que os retornos diários dos ativos têm distribuição Normal. Na prática, porém, evidencia-se que esses retornos são frequentemente assimétricos e com caudas mais pesadas. Sendo assim, este trabalho busca avaliar se a distribuição de Meixner seria mais apropriada para a modelagem dos retornos. Adicionalmente, será analisado se o processo de Lévy que surge a partir dessa distribuição, o processo de Meixner, é eficiente na precificação de derivativos financeiros. Para tanto, propõe-se a substituição do movimento Browniano pelo processo de Meixner em Black-Scholes.

Palavras-Chave

processo de Meixner, apreçamento de opções, caudas pesadas

Meixner Process: Theory and Applications to Financial Brazilian Market

Abstract

Well-known models that are extensively used by market traders, such as the Black-Scholes model, assume that the daily log-returns of assets follow a Normal distribution. Empirical evidences, however, show that return rates are frequently asymmetric and have fatter tails. Hence, this work aims to investigate if the Meixner distribution would be more appropriate to fit daily log-return. Additionally, it will be explored if the Lévy process risen from this distribution, the Meixner process, is efficient to price financial derivatives. Therefore, this study proposes the replacement of the Brownian motion by the Meixner process in Black-Scholes.

Keywords

Meixner process, option pricing, heavy tails

JEL Classification

C02, C13, G13

[♦] Artigo recebido em fevereiro de 2010 e aceito para publicação em novembro de 2010. Agradecemos pelos comentários do parecerista, que ajudaram a melhorar o presente trabalho. J. Fajardo agradece também o apoio financeiro do CNPq do Brasil. Erros remanescentes são de responsabilidade exclusiva dos autores.

^{*} Fundação Getúlio Vargas - Escola Brasileira de Administração Pública e de Empresas - E-mail: josé.fajardo@fgv.br - Endereço para contato: Praia de Botafogo 119 sala 534. CEP: 22253-900. Botafogo - Rio de Janeiro - RJ.

^{**} Fundação Getúlio Vargas - Escola de Pós-Graduação em Economia - E-mail: f.coutinho@fgmail.br - Endereço para contato: Praia de Botafogo 119 sala 534. CEP: 22253-900. Botafogo - Rio de Janeiro - RJ.

1 Introdução

O modelo de Black e Scholes (1973), embora sejam bem conhecidas suas limitações, tem sido amplamente utilizado para a precificação de derivativos financeiros, devido a sua fácil implementação e ao fato da sua fórmula depender de um único parâmetro não observável. Dentro das muitas limitações, o modelo de B&S assume que a taxa de retorno logarítmica tem distribuição Normal. Porém, como é sabido, a maioria dos ativos financeiros não respeita essa hipótese.

Como alternativa ao modelo de Black e Scholes, Merton (1976), Jones (1984), Naik e Lee (1990) e Bates (1991) propuseram processos de difusões com pulos. Outros autores, como Heston (1993), apresentaram como opção os modelos de volatilidade estocástica. Madan, Carr e Chang (1998), Barndorff-Nielsen (1998), Eberlein, Keller e Prause (1998) defendiam os processos de Lévy com pulos puros. Além desses trabalhos, Bates (1996, 1997), Duffie, Pan e Singleton (2000), Barndorff-Nielsen e Shepard (2001), Carr, German, Madan e Yor (2002) usaram uma combinação desses três modelos.

Quando aplicados para precificação de opções, esses modelos mais realísticos chegam a utilizar até dez parâmetros, o que contrasta imensamente com o parâmetro único de Black-Scholes. O motivo para tantas variáveis seria justificado pela complexidade dos processos estocásticos. Segundo Bates (1996), Bakshi, Cao e Chen (1997), Carr, Geman, Madan e Yor (2002), a volatilidade estocástica seria necessária para explicar o comportamento dos preços das opções com longo prazo de maturidade e pulos seriam necessários para explicar as opções de curta maturidade.

No caso dos processos de Lévy estes conseguem capturar vários fatos estilizados das séries financeiras, entre elas o excesso de Curtose. Um membro desta classe de processos é processo obtido a partir da denominada distribuição de Meixner, a qual foi introduzida por Schoutens e Teugels (1998) e foi aplicada em finanças pela primeira vez por Grigelionis (1999). Em Schoutens (2001), foi feita uma modelagem financeira a partir da distribuição de Meixner e foi construído um modelo de precificação de opções, no qual o movimento Browniano foi substituído pelo processo de Meixner. Nesse estudo, a função de densidade, encontrada com caudas mais pesadas do que a distribuição Normal, alcançou excelente ajuste com os dados reais; usando preços de opções do S&P500, encontrou um erro de apreçamento médio de 15,66% para o modelo de Black e Scholes, enquanto para o modelo de Meixner encontrou um erro de apreçamento médio de 6%.

No Brasil, o primeiro trabalho usando processos de Lévy é devido a Fajardo, Schuschny e Silva (2001); eles foram os primeiros a testar a aderência de dados

brasileiros usando a distribuição Hiperbólica, subclasse da Generalizada Hiperbólica (GH) e a distribuição de Pareto. Em seguida, Fajardo e Farias (2004) expandiram a pesquisa à distribuição GH, não somente para a modelagem financeira como também para a precificação de derivativos. Como resultado, a GH mostrou-se muito adequada para modelar os retornos dos ativos brasileiros.

No presente trabalho complementaremos os estudos acima mediante: 1) a análise da aderência da distribuição de Meixner aos dados brasileiros e 2) a análise do desempenho do modelo de precificação de opções, na qual o movimento Browniano é substituído pelo processo de Meixner, usando dados de opções brasileiras. Tal desempenho será feito via análise de três medidas de erro de apreçamento. Vale destacar que tanto a estimação dos parâmetros como a obtenção dos preços das opções demandam a criação de programas e o uso de rotinas sofisticadas, os quais não estão disponíveis na literatura.

Como amostras foram adotadas quatorze ações das empresas mais representativas da BM&F Bovespa em um período de três anos, perfazendo 740 cotações diárias entre junho de 2006 e junho de 2009. No modelo de precificação de derivativos foram usadas trinta opções de compra de ações preferenciais da Vale e da Petrobras, de várias maturidades e diferentes preços de exercício. Por fim, todos os cálculos matemáticos e testes estatísticos foram feitos com a ajuda do programa Matlab.

O artigo está organizado da seguinte forma: na seção 2 é apresentado o processo de Meixner; na seção 3 descrevem-se os métodos de estimação dos parâmetros e a amostra de ações; na seção 4 são apresentados os resultados da aderência da distribuição de Meixner; é apresentada na seção 5 a precificação de derivativos e os resultados do desempenho usando uma amostra de opções brasileiras; finalmente, a seção 6 é dedicada aos comentários e conclusões finais.

2 Processo de Meixner

A distribuição de Meixner foi introduzida por Schoutens e Teugels (1998) a partir da teoria dos polinômios ortogonais, e foi usada pela primeira vez em modelagem financeira por Grigelionis (1999). Como a distribuição é infinitamente divisível, pode ser associada a um processo de Lévy, no caso o processo de Meixner, que não tem parte Browniana; ainda, a parte do “pulo puro” é determinada pela medida de Lévy.

Conforme Schoutens (2003), a função de densidade da distribuição de Meixner é determinada por quatro parâmetros: inclinação (α), simetria (β), escala (δ) e posição

(μ). Logo, uma variável aleatória segue a distribuição de Meixner (MXR) quando sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{(2 \cos(\beta/2))^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)} \exp\left(\frac{\beta(x-\mu)}{\alpha}\right) \left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x-\mu)}{\alpha}\right) \right|^2 \quad (2.01)$$

sendo

$$x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0, \infty), \quad \beta \in (-\pi, \pi), \quad \delta \in (0, \infty), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x-\mu)}{\alpha}\right) \right|^2 &= \left(\int_0^\infty \cos\left(\frac{x-\mu}{\alpha} \log y\right) y^{\delta-1} e^{-y} dy \right)^2 \\ &+ \left(\int_0^\infty \sin\left(\frac{x-\mu}{\alpha} \log y\right) y^{\delta-1} e^{-y} dy \right)^2 \end{aligned} \quad (2.02)$$

Segundo Grigelionis (2001), $MXR(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ tem caudas semi-pesadas.

Consequentemente, as caudas da função de densidade comportam-se da seguinte forma:

$$f(x, \alpha, \beta, \delta, \mu) \sim C_- |x|^{\rho_-} \exp(-\sigma_- |x|) \text{ quando } x \rightarrow -\infty \quad (2.03a)$$

$$f(x, \alpha, \beta, \delta, \mu) \sim C_+ |x|^{\rho_+} \exp(-\sigma_+ |x|) \text{ quando } x \rightarrow +\infty \quad (2.03b)$$

sendo

$$\rho_-, \rho_+ \in \mathbb{R} \text{ e } C_-, C_+, \sigma_-, \sigma_+ \geq 0$$

No caso de Meixner, temos:

$$\rho_- = \rho_+ = 2\delta - 1, \quad \sigma_- = (\pi - \beta)/\alpha, \quad \sigma_+ = (\pi + \beta)/\alpha \quad (2.04a)$$

A distribuição $MXR(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ admite momentos de todas as ordens. Como se pode observar na Tabela 1, a Curtose de Meixner é sempre maior que três, o que indica caudas mais pesadas do que da distribuição Normal.

Tabela 1 – Média, Variância, Curtose e Assimetria

	<i>Meixner</i> ($\alpha, \beta, \delta, \mu$)	<i>Normal</i> ($\hat{\mu}, \sigma^2$)
Média	$\mu + \alpha\delta \tan(\beta/2)$	$\hat{\mu}$
Variância	$\frac{\alpha^2\delta}{2} (\sec^2(\beta/2))$	σ^2
Curtose	$3 + \frac{2 - \cos(\beta)}{\delta}$	3
Assimetria	$\sqrt{\frac{2}{\delta}} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$	0

De acordo com Schoutens (2003, p.62), a função característica de Meixner pode ser descrita por:

$$\phi_x(\vartheta) = \left(\frac{\cos(\beta/2)}{\cosh \frac{\alpha\vartheta - i\beta}{2}} \right)^{2\delta} e^{i\vartheta\mu} \quad (2.05)$$

A partir da equação 2.05, chega-se à conclusão de que a distribuição de Meixner é infinitamente divisível, já que para cada número inteiro positivo n , $\phi(\vartheta)$ é também a n -ésima potência da função característica. Conseqüentemente, chama-se de processo de Meixner o processo de Lévy associado a essa distribuição. De acordo com Bertoin (1996, p.12), processo de Lévy é todo processo estocástico com incrementos estacionários e independentes. Em geral, os processos de Lévy possuem três partes independentes: o componente linear, o componente contínuo e o pulo puro. O processo de Meixner, especificamente, não tem parte contínua, e é um processo de puros pulos, os quais são explicados pela medida de Lévy:

$$\nu(dx) = \delta \frac{\exp(\beta x/\alpha)}{x \sinh(\pi x/\alpha)} dx \quad (2.06)$$

3 Metodologia de Estimação e Amostra

3.1 Método dos Momentos

No método dos momentos, vamos estimar os parâmetros amostrais $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\mu})$ para os parâmetros populacionais $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)$, de tal forma que a Média, Variância, Assimetria e Curtose amostrais e populacionais igualem-se. Assim:

$$\hat{\alpha} = \sqrt{m_2(2b_2 - 3b_1^2 - 6)} \quad (3.01)$$

$$\hat{\beta} = \text{sign}(b_1) \arccos\left(\frac{b_2 - 2b_1^2 - 3}{b_2 - b_1^2 - 3}\right) \quad (3.02)$$

$$\hat{\delta} = \frac{1}{b_2 - b_1^2 - 3} \quad (3.03)$$

$$\hat{\mu} = m_1 - \hat{\alpha}\hat{\delta} \tan\left(\frac{\hat{\beta}}{2}\right) \quad (3.04)$$

Sendo m_1 , m_2 , b_1 e b_2 iguais à Média, Variância, Assimetria e Curtose amostrais, tendo como condições necessárias:

$$2b_2 - 3b_1^2 - 6 \geq 0$$

$$b_2 - b_1^2 - 3 > 0$$

3.2 Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança é dada pela equação abaixo:

$$\ell(x; \theta) = n \log\left(\frac{(2 \cos(\frac{\beta}{2}))^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)}\right) + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu) + \sum_{k=1}^n \log\left|\Gamma\left(\delta + \frac{i(x_k - \mu)}{\alpha}\right)\right|^2 \quad (3.05)$$

Maximiza-se utilizando a função `fminsearch` do Matlab com os estimadores do MM como valores iniciais. Segundo Robbertse (2006). Podemos substituir μ por:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \alpha \delta \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (3.06)$$

Já que é a solução para:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta}(\theta) = 0$$

3.3 Desvio-Padrão

Para se calcular o desvio-padrão dos parâmetros estimados foi usado o método de *bootstrap* paramétrico. Foram seguidos os seguintes passos:

- i. Assume-se que $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\mu})$ representa o verdadeiro valor de $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)$;
- ii. Gera-se uma grande quantidade de números, no caso foram gerados $n=1.000$ amostras, com o mesmo tamanho da amostra em análise;
- iii. Calculou-se o desvio-padrão de cada parâmetro estimado aplicando-se as fórmulas:

$$\sigma(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\hat{\alpha}_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_k \right)^2} \quad (3.07)$$

$$\sigma(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\hat{\beta}_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_k \right)^2} \quad (3.08)$$

$$\sigma(\hat{\delta}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\hat{\delta}_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\delta}_k \right)^2} \quad (3.09)$$

$$\sigma(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\hat{\mu}_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\mu}_k \right)^2} \quad (3.10)$$

3.4 Amostra

Como se pode visualizar na Tabela 2, a amostra deste trabalho consiste em 14 ações das principais empresas listadas na BM&F Bovespa, que são as mais líquidas e que representam vários setores e instituições públicas e privadas; critério similar foi usado em Fajardo e Farias (2004). Os dados foram extraídos do sistema “Economática”, e consistem em 740 cotações diárias entre 29 de junho de 2006 e 29 de junho de 2009, a partir dos quais foram calculados 739 retornos logarítmicos.

Tabela 2 – Descrição da Amostra de Ações

Empresas Selecionadas	Ações	Período em Análise	Total de dias
Aracruz Celulose	ARCZ 6	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Banco do Brasil	BBAS 3	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Banco Bradesco	BBDC 4	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Cia. Energética de Minas Gerais (Cemig)	CMIG 4	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Companhia Siderúrgica Nacional (CSN)	CSNA 3	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Cyrela Brazil Realty	CYRE 3	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Gerdau	GGBR 4	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Investimentos Itaú	ITSA 4	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Itaú Unibanco Holding	ITUB 4	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Petrobras	PETR 3, PETR 4	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Usiminas	USIM 5	29/06/2006 - 29/06/2009	740
Vale	VALE 3, VALE 5	29/06/2006 - 29/06/2009	740

4 Resultados

4.1 Teste de Normalidade

Apesar de muitos modelos, como Black-Scholes, assumirem que os retornos têm distribuição Normal, na prática suas distribuições são frequentemente assimétricas e com caudas mais pesadas. Logo, é importante testar a normalidade de nossa amostra de retornos. Para isso, foram escolhidos os testes de Anderson-Darling (AD) e Kolmogorov-Smirnov (KS), além de um gráfico quantil por quantil.

Ambos os testes são usados quando se deseja saber se uma amostra de dados origina-se de uma distribuição específica, no caso a distribuição Normal. O teste de AD foi introduzido por Anderson e Darling (1952), e trata-se de uma modificação do teste de KS que dá mais importância às caudas. Uma vantagem de AD sobre KS é que o primeiro é um teste mais sensível, já que usa uma distribuição específica para o cálculo dos valores críticos.

Quando a estatística AD^1 do modelo de Anderson-Darling é maior do que o valor crítico para um dado nível de significância α , rejeita-se a hipótese de normalidade da distribuição. O mesmo raciocínio aplica-se para o teste K-S. Conforme a Tabela 3, os dois testes rejeitaram a hipótese de normalidade para toda a nossa amostra de 739 retornos para um nível de significância $\alpha=5\%$.

Tabela 3 – Teste de Kolmogorov-Smirnov e Anderson-Darling

A=5%	KS	AD
ARCZ6	0,4529	16,6123
BBAS3	0,4563	4,5528
BBDC4	0,4639	5,2960
CMIG4	0,4707	1,7616
CSNA3	0,4538	7,0132
CYRE3	0,4490	4,1178
GGBR4	0,4579	4,4450
ITSA4	0,4608	8,1914
ITUB4	0,4603	8,7151
PETR3	0,4557	8,1780
PETR4	0,4578	7,8641
USIM5	0,4583	5,0733
VALE3	0,4566	5,2476
VALE5	0,4587	5,5321

$$cv_{0,95}^{KS} = 0,0497 \quad cv_{0,95}^{AD} = 0,751$$

Com relação ao gráfico quantil por quantil (qq-plot), plota-se um gráfico da amostra versus a distribuição Normal quantil por quantil. Quanto melhor os dados ajustam-se à linha reta, mais plausível é a hipótese de que a amostra origina-se de uma distribuição Normal.

1 Assim como em Stephens (1974), considerou-se a estatística modificada de Anderson-Darling como sendo a multiplicação da estatística pela constante $\left(1 + \frac{4}{n} - \frac{25}{n^2}\right)$, onde n é o tamanho da amostra.

Na Figura 1, foi construído um qqplot dos retornos das ações da Aracruz (ARCZ6), Siderúrgica Nacional (CSNA3) e Usiminas (USIM5). Nela, observa-se que a distribuição Normal é incapaz de captar os valores mais extremos da distribuição, dado que seriam necessárias caudas mais pesadas para um melhor ajuste. Portanto, a distribuição Normal não parece ser ideal para modelagem desses retornos, o que confirma os resultados anteriores dos testes AD e K.

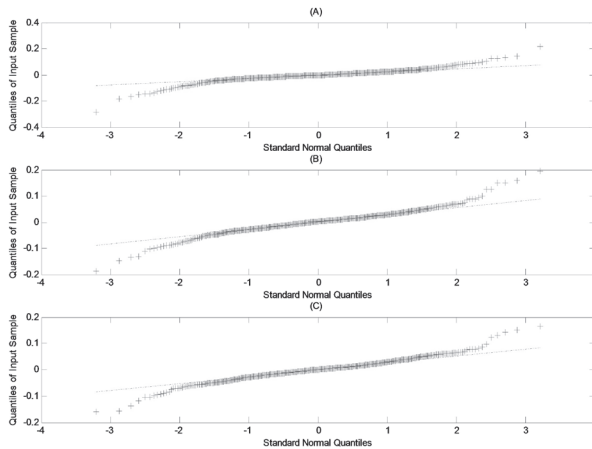


Figura 1 – QQ-Plot dos Retornos Logarítmicos Diários de ARCZ6 (A), CSNA3 (B) e USIM5 (C)

4.2 Estimação dos Parâmetros

Como explicado na Seção 3, foi feita a estimação de $MXR(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\mu})$ pelo Método dos Momentos (MM) e pela Máxima Verossimilhança (MV). Os resultados encontrados para os quatro parâmetros, seus respectivos desvios e a função de verossimilhança são apresentados no apêndice I. É importante destacar que os valores achados para a função de verossimilhança foram sempre maiores por MV, já que esse tipo de estimação usou os parâmetros estimados pelo MM como valores iniciais.

4.3 Gráfico da Distribuição Ajustada

Usando a fórmula da função de densidade de Meixner, é possível construir um gráfico comparando o ajuste da distribuição de Meixner *versus* o ajuste da distribuição Normal. Na Figura 2, foi feita a modelagem financeira dos retornos do

Banco Bradesco (BBDC4), Itaú-Unibanco (ITUB4) e Petrobrás (PETR4). Pode-se observar abaixo que a distribuição de Meixner apresenta um ajuste bem melhor aos dados empíricos do que a distribuição Normal. O motivo desse ajuste mais preciso seria porque a Meixner tem maior concentração de massa em torno do centro e caudas mais pesadas do que a Normal (curva mais fina).

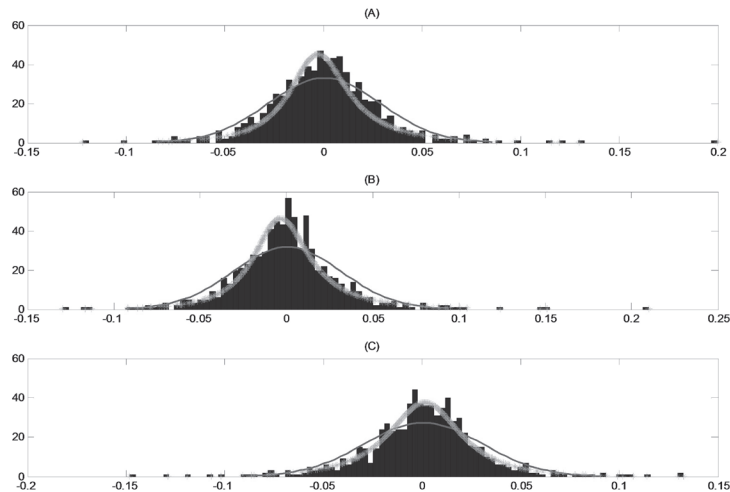


Figura 2 – Gráficos da Distribuição Ajustada dos Retornos Logarítmicos Diários de BBDC4 (A), ITUB4 (B) e PETR4(C)

4.4 Grau de Ajuste

Para verificar qual a estimação, método dos momentos (MM) ou máxima verossimilhança (MV) gera o melhor ajuste dos dados empíricos, foram adotadas quatro distâncias:² Kolmogorov (KS), Kuiper (KP), Anderson-Darling (AD) e Farias-Ornelas-Fajardo (FOF).³ A primeira corresponde à máxima distância entre as funções de densidade acumulada empírica e teórica. A segunda é semelhante à distância de Kolmogorov, mas considera a direção do desvio ao somar a maior distância para cima e para baixo. A terceira dá importância especial à distribuição das caudas e a última, ao considerar a direção do desvio e o peso das caudas, é capaz de capturar os pontos fortes da distância KP e AD ao mesmo tempo.

² Consultar o apêndice IV para as fórmulas das distâncias KS, KP, AD e FOF.

³ Ver Fajardo, Ornelas e Farias (2005, p. 25-38).

A hipótese nula adotada nos testes KS e KP é de que a distribuição teórica e a empírica são iguais. Logo, a boa estimação deve gerar p-valor superior a sua respectiva distância, isto é, não deve rejeitar a hipótese nula. Conforme o apêndice II, a hipótese nula da distância KS não foi rejeitada para toda a amostra. Por outro lado, a hipótese nula da distância KP foi rejeitada para os retornos das ações ARCZ6, BBDC4 e CYRE3, quando os parâmetros foram estimados pelo método dos momentos.

Entre método dos momentos e máxima verossimilhança, a melhor estimação é aquela que gera a menor distância entre a distribuição teórica e empírica. Dessa forma, o apêndice II revela que os métodos de Kolmogorov e Kuiper apontaram a estimação por MV como a mais precisa para toda a amostra de retornos, exceto para USIM5.

No entanto, pelas distâncias AD e FOF, a estimação por MM destaca-se como a mais precisa para a maior parte dos ativos. Quando maior peso é atribuído à distribuição das caudas, o MM somente não é indicado como o melhor ajuste para os retornos de ARCZ6, BBDC4, PETR3, PETR4 e ITSA4 (apenas por AD).

5 Modelo de Precificação de Derivativos

Assumiremos que o mercado consiste em um ativo livre de risco (título do governo) com processo de precificação $B_t = e^{rt}$ e um ativo arriscado (ação). O modelo que gera os retornos logarítmicos diários de $MXR(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ para essa ação é:

$$S_t = S_0 e^{M_t} \quad (5.01)$$

Seja $G(S_T)$ o *payoff* do derivativo no prazo de maturidade T , para uma opção de compra (*call*) européia com preço de exercício K , temos que $G(S_T) = (S_T - K)^+$. De acordo com o teorema fundamental da precificação de ativos,⁴ o preço livre de arbitragem de um derivativo no tempo $t \in [0, T]$ é dado por:

$$V_t = E_Q[e^{-r(T-t)} G(S_T) | \mathcal{F}_t] \quad (5.02)$$

Sendo que a expectativa é tirada com relação a uma medida martingala Q e que $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ é o filtro natural de $M = \{M_t, 0 \leq t \leq T\}$.

⁴ Ver Delbaen e Schachermayer (1994).

5.1 Transformada de Esscher

Uma medida martingala equivalente é uma medida de probabilidade que equivale à probabilidade histórica e sob a qual o processo de desconto $\{e^{-rt}S_t\}$ funciona como um martingala. Alguns poucos modelos, como Black-Scholes, assumem uma única medida martingala equivalente e são considerados completos. Porém, isso não ocorre para a maioria dos modelos financeiros mais realísticos, como Meixner, que possuem uma extensa classe de medidas martingais e são considerados incompletos.

Para precificar opções de ativos cujos retornos seguem um processo de Lévy, é necessário achar uma medida martingala equivalente. Nesse sentido, Esscher (1932) propôs uma transformação que mais tarde foi usada para a precificação de derivativos por Gerber e Shiu (1994 e 1996), pois é possível utilizar a transformada de Esscher para achar pelo menos uma medida martingala equivalente:

$$dQ = \frac{e^{\vartheta x}}{E(e^{\vartheta x})} dP \quad (5.03)$$

De tal forma que para se achar ϑ é preciso resolver a equação:

$$r = \ln \frac{M(\vartheta + 1)}{M(\vartheta)} \quad (5.04)$$

em que r é a taxa de juros livre de risco e M é a função geradora de momentos.

No caso de Meixner, a função M é conhecida e o parâmetro ϑ é dado por:

$$\vartheta^* = -\frac{1}{\alpha} \left(\beta + 2 \arctan \left(\frac{-\cos(\alpha/2) + \exp((\mu - r)/(2\delta))}{\sin(\alpha/2)} \right) \right) \quad (5.05)$$

5.2 Fórmula de Precificação de Opções

Vamos chamar de $c_{MXR}(S_0, K, r, T, \theta)$ o preço de uma opção MXR européia de compra, sendo S_0 o preço no tempo zero do ativo cujos retornos logarítmicos seguem a distribuição de Meixner; K é o preço de exercício, r é a taxa livre de risco contínua e capitalizada anualmente, T é o prazo de maturidade medido em anos e θ é o vetor de parâmetros da distribuição MXR. Analogamente, o preço de uma opção de venda corresponde a P_{MXR} .

Usando Q_{ϑ^*} como medida martingala equivalente, dada pela transformada de Esscher, o preço de uma *put* europeia é representado pelo valor esperado do *payoff* descontado, isto é:

$$p_{MXR}(S_0, K, r, T, \theta) = E^{Q_{\vartheta^*}}[e^{-rt} \max\{K - S_T, 0\}] \quad (5.06)$$

Reescrevendo a equação 5.06, vamos ter que:

$$p_{MXR}(S_0, K, r, T, \theta) = Ke^{-rt} \int_{\log(X/S_0)}^{\infty} f(x, \theta, \vartheta^*) dx - S_0 \int_{\log(X/S_0)}^{\infty} f(x, \theta, \vartheta^* + 1) dx$$

Onde

$$f(x, \theta, \vartheta^*) = \frac{(2 \cos(\frac{\alpha\vartheta^* + \beta}{2}))^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)} \exp\left(\frac{(\alpha\vartheta^* + \beta)(x - \mu)}{\alpha}\right) \left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x - \mu)}{\alpha}\right) \right|^2$$

Sendo

$$x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0, \infty), \quad \beta \in (-\pi, \pi), \quad \delta \in (0, \infty), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Por fim, o preço de uma *call* europeia pode ser obtido pela paridade put-call:

$$c_{MXR}(S_0, K, r, T, \theta) = S_0 \int_{\log(X/S_0)}^{\infty} f(x, \theta, \vartheta^* + 1) dx - Ke^{-rt} \int_{\log(X/S_0)}^{\infty} f(x, \theta, \vartheta^*) dx \quad (5.07)$$

5.3 Amostra de Opções

Para avaliar o desempenho do modelo de precificação de opções, foram adotadas como amostra trinta opções de compra de ações preferenciais da Petrobras (PETR4) e da Vale (VALE5), de vários preços de exercício e diferentes prazos de maturidade. Faz-se necessário destacar que as cotações de fechamento de PETR4 (R\$37,60) e VALE5 (R\$42,33) no dia 11 de novembro de 2009 foram adotadas como o preço da ação no tempo zero.

Conforme a Tabela 4, foi escolhida uma banda de preços de exercício (*strikes*) entre R\$34,00 e R\$42,00 para a companhia exploradora de petróleo, e entre R\$38,00 e

R\$46,00 para a mineradora. Além disso, foram selecionados três⁵ prazos de maturidade: 3, 27 e 43 dias úteis. Todos esses dados foram extraídos do banco de dados da Cedro Finances.

Tabela 4 - Preço de Fechamento em Reais (R\$) das Opções de Compra da Petrobras e da Vale em 11/11/2009

Opções	T=3	T=27	T=43
PETR 34	4,4	4,92	5,2
PETR 36	1,85	3,01	3,51
PETR 38	0,39	1,73	2,45
PETR 40	0,06	1,08	1,45
PETR 42	0,02	0,46	0,82
VALE 38	4,86	5,61	5,81
VALE 40	2,8	4,12	4,61
VALE 42	1,12	2,75	3,60
VALE 44	0,21	1,72	2,50
VALE 46	0,03	0,98	1,51

Fonte: Cedro Finances.

É importante observar que a escolha dos valores dos *strikes* não foi aleatória, e teve o objetivo de dividir a amostra em três grupos: no dinheiro (*at the money*), dentro do dinheiro (*in the money*) e fora do dinheiro (*out of the money*). Papéis com preço de exercício de R\$38,00 para Petrobras e R\$42,00 para Vale foram considerados ATM, já que o valor desses strikes aproxima-se da cotação inicial de PETR4 e VALE5. Logo, preços de exercício abaixo e acima desses valores foram considerados ITM e OTM, respectivamente.

5.4 Resultados

A partir dos parâmetros $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\mu}$ apresentados no apêndice I, foram calculados os Valores da Média, Desvio-Padrão, Assimetria e Curtose de Meixner, aplicando-se as fórmulas contidas na Tabela 1. Da mesma forma, foi estimada a medida de Esscher (Equação 6.05), usando taxa de juros diária de 0.0348%, que é equivalente a uma taxa anual de 8,75%. Os resultados obtidos encontram-se no apêndice III.

⁵ Opções com vencimento em 16 de novembro de 2009 (T=3), 21 de dezembro de 2009 (T=27) e 18 de janeiro de 2010 (T=43).

Agora precisaremos as opções de compra de ações da Petrobras e da Vale de várias maturidades e diferentes preços de exercício. Utilizando $S_0=37,60$ para PETR4, $S_0=42,33$ para VALE5 e 0,0348% como taxa de juros diária. Os resultados serão apresentados na Tabela 5.

Podemos observar que apreamento por Meixner apresenta boa precisão com as opções dentro do dinheiro e próximas da data de vencimento. Porém, perde tanto a capacidade de explicar os preços de mercados com o aumento da maturidade como a medida que os preços de exercício tornam-se fora do dinheiro. Esse resultado é compreensível, uma vez que o modelo de Meixner assume que o mercado é competitivo e papéis *out of the money* precisam de um modelo de funcionamento do mercado.

Tabela 5 - Estimação do Preço em Reais (R\$) de Opções de Compra da Petrobras e da Vale por Meixner (MM e MV) e Black-Scholes (BS)⁶

Opções	T=3				T=27				T=43			
	Empírico	MM	MV	BS	Empírico	MM	MV	BS	Empírico	MM	MV	BS
PETR 34	4,4	3,64	3,64	3,72	4,92	3,92	3,92	5,39	5,2	4,11	4,11	6,21
PETR 36	1,85	1,69	1,69	2,06	3,01	1,97	1,97	4,19	3,51	2,15	2,15	5,08
PETR 38	0,39	0,25	0,25	0,91	1,73	0,35	0,35	3,19	2,45	0,42	0,42	4,11
PETR 40	0,06	0,02	0,02	0,30	1,08	0,03	0,03	2,38	1,45	0,03	0,03	3,30
PETR 42	0,02	0,00	0,00	0,08	0,46	0,00	0,00	1,74	0,82	0,00	0,00	2,62
VALE 38	4,86	4,37	4,37	4,44	5,61	4,69	4,69	6,16	5,81	4,90	4,90	7,05
VALE 40	2,8	2,41	2,41	2,70	4,12	2,73	2,73	4,91	4,61	2,94	2,94	5,88
VALE 42	1,12	0,69	0,69	1,36	2,75	0,92	0,92	3,85	3,60	1,06	1,07	4,86
VALE 44	0,21	0,07	0,07	0,55	1,72	0,10	0,10	2,96	2,50	0,12	0,12	3,98
VALE 46	0,03	0,01	0,01	0,18	0,98	0,01	0,01	2,25	1,51	0,01	0,01	3,23

Quando comparado com o modelo de Black-Scholes, o apreamento por Meixner foi sempre melhor. Na Seção 5.6 é apresentada uma análise mais precisa.

5.5 Volatilidade Implícita

No mercado financeiro, os operadores de mercado sabem que a distribuição de probabilidade dos retornos dos ativos não obedece perfeitamente à distribuição Normal. Por isso, ajustam suas previsões usando o efeito sorriso da volatilidade.

⁶ Foram utilizadas as volatilidades de $\sigma = 0,6558$ para Petrobras e de $\sigma = 0,6365$ para Vale.

O formato da volatilidade implícita seria justificado porque ela cresceria tanto com o aumento quanto com a diminuição do *strike*. Adicionalmente, a volatilidade seria frequentemente assimétrica e diminuiria com a maturidade.

A volatilidade implícita do modelo de Meixner calculada na Tabela 6 é aquela que gera a mesma precificação obtida por Meixner usando o modelo de Black-Scholes. A partir dela e da razão entre o preço de exercício e cotação inicial da ação foram construídos os gráficos da Figura 3. É fácil observar que a precificação por Meixner incorpora um efeito sorriso e a volatilidade decresce com a maturidade, o que condiz com a realidade dos mercados.

Tabela 6 - Volatilidade Implícita das Opções de Compra da Petrobras e da Vale Precificadas por Meixner

Opções		Volatilidade Implícita		
		T=3	T=27	T=43
ITM	PETR 34	0,41	0,17	0,15
	PETR 36	0,31	0,11	0,09
ATM	PETR 38	0,25	0,08	0,06
OTM	PETR 40	0,32	0,10	0,08
	PETR 42	0,39	0,12	0,10
ITM	VALE 38	0,42	0,17	0,15
	VALE 40	0,34	0,12	0,11
ATM	VALE 42	0,26	0,09	0,07
OTM	VALE 44	0,29	0,09	0,07
	VALE 46	0,35	0,11	0,08

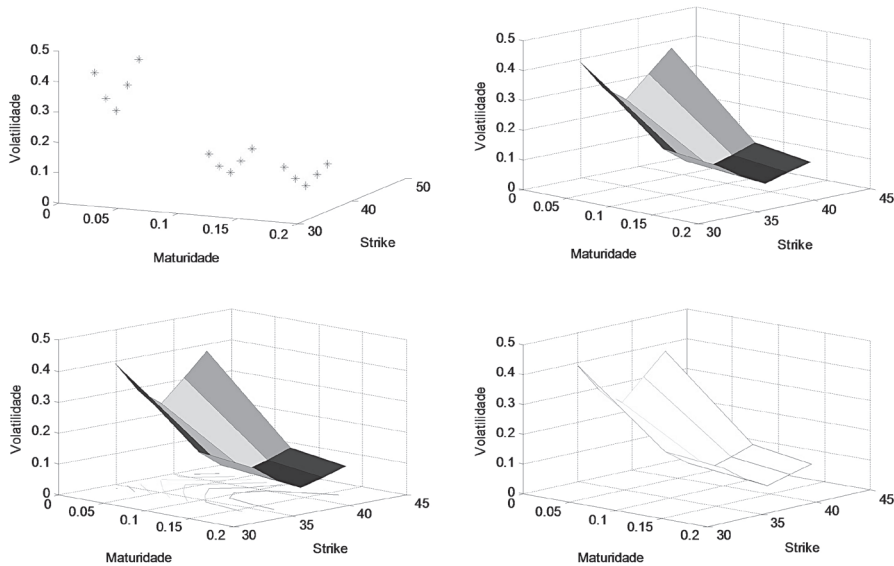


Figura 3 - Gráficos da Volatilidade Implícita de Opções de Compra da Petrobras Precificada por Meixner

5.6 Medidas de Erro

Com o objetivo de verificar a precisão do modelo teórico de apuração de opções, foram adotadas três medidas de erro: a Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE), o Erro Médio Absoluto (MAE) e o Erro Médio Absoluto Percentual (MAPE). As fórmulas dessas estatísticas são apresentadas no apêndice V. Na tabela abaixo, foram calculadas as medidas de erro para opções precificadas pelo modelo de Meixner (MM e MV) e pelo modelo de Black-Scholes (BS).

Tabela 7 - Medidas de Erro para Opções Precificadas pelo Modelo de Meixner (MM e MV) e pelo Modelo de Black-Scholes (BS)

Medida de Erro	Estimação	Petrobras				Vale			
		ITM	ATM	OTM	Geral	ITM	ATM	OTM	Geral
MAE	MM	0,90	1,18	0,63	0,85	0,96	1,60	1,10	1,15
	MV	0,90	1,18	0,63	0,85	0,96	1,60	1,11	1,15
	BS	0,85	1,21	1,09	1,02	0,73	0,87	1,03	0,88

(continuação)

MAPE	MM	0,23	0,66	0,91	0,59	0,21	0,58	0,87	0,55
	MV	0,23	0,66	0,91	0,59	0,21	0,58	0,88	0,55
	BS	0,23	0,95	2,40	1,24	0,15	0,32	1,72	0,81
RMSE	MM	0,98	1,42	0,81	1,02	1,07	1,82	1,38	1,37
	MV	0,98	1,42	0,81	1,02	1,07	1,82	1,38	1,37
	BS	0,97	1,31	1,29	1,18	0,84	0,97	1,19	1,02

Pelos resultados da Tabela 7, vemos que a precificação por Meixner é a mais precisa na maioria das vezes, uma vez que apresenta o menor desvio de preços teóricos para a maioria das medidas de erro. Em particular para a medida MAPE, que é a mais usada, em toda a amostra foi quase a metade do desvio em relação à BS. No caso da Petrobras também domino nas outras duas medidas.

Alguns autores questionam a eficácia das medidas de erro como MAE, MAPE e RMSE em quantificar a magnitude do erro de apreçamento. De acordo com French e Martin (1988), apesar das medidas de erro serem capazes de indicar a presença de erro no apreçamento de opções, elas falham em quantificar a grandeza desse erro. Isso ocorreria especialmente quando se deixa de lado o lucro potencial de uma opção.

6 Conclusão

Os primeiros resultados encontrados confirmaram a boa aderência do processo de Meixner a dados brasileiros, principalmente em função da assimetria negativa e à presença de caudas mais pesadas. Primeiro, o processo de Meixner é um bom candidato para modelar os retornos das séries financeiras brasileiras. Segundo, o modelo de Meixner obteve um bom desempenho na precificação das opções de compra da Vale e da Petrobras, que são as opções mais líquidas e procuradas no mercado brasileiro. Finalmente, o modelo de Meixner é capaz de capturar o sorriso de volatilidade. Poucos são os modelos que conseguem harmonizar estes três itens ao mesmo tempo; o modelo de Meixner é um deles.

Por outro lado, o uso de mais parâmetros e de funções de densidade altamente não lineares demanda o uso de rotinas de otimização mais sofisticadas, o que resulta num aumento do significativo do esforço computacional. Nesse sentido, seria necessário o desenvolvimento de procedimentos numéricos mais eficientes, sobretudo com vistas a futuras extensões para o caso multidimensional e para aplicações tais como gestão de carteiras e a mensuração do *Value at Risk*, como é

feito em Fajardo e Farias (2009) e Fajardo e Farias (2010) para o caso dos Processos Generalizados Hiperbólicos.

Referências

- ANDERSON, T. W. & DARLING, D. A. Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, v.23, n. 2, 1952, p. 193-212.
- BAKSHI, G.; CAO, C. & CHEN, Z. Empirical performance of alternative option pricing models. *Journal of Finance*, v. 52, n. 5, 1997, p. 2003-49,
- BARNDORFF-NIELSEN, O.E. Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*, v. 2, n. 1, 1998, p. 41-68.
- _____. & SHEPPARD, N. Non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 63, n. 2, 2001, p. 167-241.
- BATES, D. The crash of '87: was it expected? The evidence from options markets. *Journal of Finance*, v. 46, n. 3,p., 1991, 1009-44.
- _____. Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *Review of Financial Studies*, v. 9, n. 1, 1996, p. 69-108.
- _____. Post '87 crash fears in S&P 500 futures options. *NBER Working Paper*, n. 5894, jan. 1997.
- BERTOIN, J. Lévy processes. Cambridge University Press, 1996.
- BLACK, F. & SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, 1973, p. 637-654.
- CARR, P.; GEMAN, H.; MADAN, D.H. & YOR, M. The fine structure of asset returns: an empirical investigation. *Journal of Business*, v. 75, n. 2, 2002.
- DELBAEN, F. & SCHACHERMAYER, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, v. 300, 1994p. 463-520.
- DUFFIE, D.; PAN, J. & SINGLETON, K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, v. 68, n. 6, 2000, p.1343-1376.
- EBERLEIN, E.; KELLER, U. & PRAUSE, K. New insights into smile, mispricing and value at risk. *Journal of Business*, v. 71, n. 3, 1998, p. 371-405.
- ESSCHER, F. On the probability function in the collective theory of risk. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, v. 15, p. 175-195, 1932.
- FAJARDO, J.; SCHUSCHNY A. & SILVA A. Lévy Processes and The Brazilian Market. *Brazilian Review of Econometrics*, v.21, n. 2, 2001, p. 263-289.
- FAJARDO, J. & FARIAS, A. R. Generalized Hyperbolic Distributions and Brazilian Data. *Brazilian Review of Econometrics*, v.24, n. 2, 2004, p. 1-21.

- FAJARDO, J. & FARIAS, A. R. Multivariate affine generalized hyperbolic distributions: An empirical investigation, *International Review of Financial Analysis*, v. 18, n. 4, Sept. 2009, p. 174-184.
- FAJARDO, J. & FARIAS, A. R. Derivative pricing using multivariate affine generalized hyperbolic distributions, *Journal of Banking & Finance*, v. 34, n. 7, July 2010, p. 1607-1617.
- FAJARDO, J.; ORNELAS, J. R. H. & FARIAS, A. R. Analyzing the use of generalized hyperbolic distributions to value at risk calculations. *Revista de Economia Aplicada*, v. 9, 2005, p. 25-38.
- FRENCH, D. W. & MARTIN L. J. The measurement of option mispricing. *Journal of Banking and Finance*, v. 12, 1988, p. 537-550.
- GERBER, H.U. & SHIU, E.S.W. Option pricing by Esscher transforms. *Transactions of the Society of Actuaries*, v. 46, 1994, p. 99-191.
- _____. Actuarial bridges to dynamic hedging and option pricing. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 18, n. 3, 1996, p. 183-218.
- GRIGELIONIS, B. Processes of Meixner type. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 39, n. 1, 1999, p. 33-41.
- _____. Generalized z-distributions and related stochastic processes. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 41, n. 3, 2001, p. 303-319.
- HESTON, S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, v. 6, n. 2, 1993, p. 327-343.
- JONES, E. P. Option arbitrage and strategy with large price changes. *Journal of Financial Economics*, v.13, n. 1, 1984, p. 91-113.
- MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, v. 3, 1976, p. 125-144.
- NAIK, V. & LEE, M. General equilibrium pricing of options on the market portfolio with discontinuous returns. *Review of Financial Studies*, v. 3, n. 4, 1990, p. 493-521.
- MADAN, D.; CARR P. & CHANG, E. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, v. 2, 1998, p. 79-105.
- SCHOUTENS, W. Meixner processes in finance. Eindhoven, *Eurandom Report*, n. 002, 2001.
- _____. Lévy processes in finance: pricing financial derivatives. John Wiley & Sons, 2003.
- _____. & TEUGELS, J.L. *Lévy processes, polynomials and martingales*. Communication in Statistics Stochastic Models, v. 14, n. 1 e 2, 1998, p. 335-349.
- STEPHENS, M. A. Asymptotic results for goodness of fit statistics with unknown parameters. *The Annals of Statistics*, v. 4, n. 2, 1976, p. 357-369.

Apêndice

I - Estimação dos Parâmetros de Meixner, Desvio-Padrão Função de Verossimilhança

Ação	Estimação	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$	$\ell(x, \hat{\theta})$
ARCZ6	MM	0,1471 (0,0201)	-0,3815 (0,1869)	0,1255 (0,0251)	0,0019 (0,0011)	1489,81
	MV	0,1534 (0,0214)	-0,3738 (0,1870)	0,1309 (0,0256)	0,0019 (0,0012)	1491,90
BBAS3	MM	0,0903 (0,0119)	0,0599 (0,1702)	0,2614 (0,0579)	-0,0001 (0,0016)	1518,23
	MV	0,0714 (0,0097)	0,0454 (0,1634)	0,4103 (0,1103)	-0,0001 (0,0022)	1521,20
BBDC4	MM	0,0845 (0,0108)	0,4267 (0,1637)	0,2155 (0,0441)	-0,0034 (0,0012)	1623,46
	MV	0,0624 (0,0088)	0,1849 (0,1682)	0,3990 (0,1055)	-0,0018 (0,0018)	1631,39
CMIG4	MM	0,0521 (0,0074)	-0,0088 (0,1693)	0,4094 (0,1101)	0,0005 (0,0016)	1736,30
	MV	0,0379 (0,0064)	-0,0056 (0,1865)	0,7630 (0,3452)	0,0005 (0,0028)	1739,59
CSNA3	MM	0,1040 (0,0135)	0,0227 (0,1698)	0,2350 (0,0506)	0,0008 (0,0016)	1469,51
	MV	0,0888 (0,0116)	0,0210 (0,1620)	0,3151 (0,0749)	0,0010 (0,0020)	1470,95
CYRE3	MM	0,1261 (0,0163)	0,0577 (0,1636)	0,2435 (0,0534)	-0,0009 (0,0020)	1292,28
	MV	0,0945 (0,0133)	0,0271 (0,1657)	0,4283 (0,1225)	-0,0010 (0,0031)	1297,22
GGBR4	MM	0,0786 (0,0107)	-0,0561 (0,1636)	0,3627 (0,0943)	0,0013 (0,0021)	1496,00
	MV	0,0710 (0,0098)	-0,0407 (0,1716)	0,4372 (0,1219)	0,0015 (0,0024)	1496,46
ITSA4	MM	0,0970 (0,0123)	0,4485 (0,1724)	0,1892 (0,0375)	-0,0036 (0,0012)	1587,72
	MV	0,0750 (0,0099)	0,2886 (0,1653)	0,3141 (0,0756)	-0,0027 (0,0017)	1592,60
ITUB4	MM	0,0930 (0,0122)	0,4641 (0,1666)	0,2135 (0,0445)	-0,0042 (0,0013)	1577,57
	MV	0,0773 (0,0098)	0,3385 (0,1611)	0,2995 (0,0648)	-0,0032 (0,0016)	1579,74
PETR3	MM	0,0788 (0,0100)	-0,0320 (0,1630)	0,3135 (0,0702)	0,0013 (0,0017)	1570,50
	MV	0,0836 (0,0108)	-0,0340 (0,1664)	0,2749 (0,0627)	0,0018 (0,0016)	1571,05
PETR4	MM	0,0775 (0,0101)	-0,0839 (0,1669)	0,2980 (0,0693)	0,0017 (0,0017)	1601,14
	MV	0,0804 (0,0103)	-0,0898 (0,1673)	0,2762 (0,0616)	0,0019 (0,0015)	1601,37
USIM5	MM	0,0867 (0,0113)	-0,0146 (0,1661)	0,3125 (0,0740)	0,0007 (0,0019)	1485,93
	MV	0,0815 (0,0107)	-0,0118 (0,1658)	0,3503 (0,0825)	0,0008 (0,0021)	1486,12
VALE3	MM	0,0888 (0,0114)	-0,1685 (0,1661)	0,2740 (0,0583)	0,0026 (0,0017)	1514,07
	MV	0,0755 (0,0100)	-0,1439 (0,1695)	0,3761 (0,0920)	0,0028 (0,0021)	1515,79

(continuação)

VALE5	MM	0,0750 (0,0098)	-0,1737 (0,1687)	0,3374 (0,0788)	0,0028 (0,0018)	1562,78
	MV	0,0725 (0,0095)	-0,2567 (0,1674)	0,3568 (0,0865)	0,0039 (0,0019)	1563,03

II - Estatística Descritiva e Medida de Esscher

		Média	Desvio-Padrão	Assimetria	Curtose	Medida de Esscher
ARCZ6	Empírico	-0,0017	0,0376	-0,7567	11,5395	
	MM	-0,0017	0,0375	-0,7567	11,5395	0,9642
	MV	-0,0019	0,0399	-0,7263	11,1652	0,9195
BBAS3	Empírico	0,0006	0,0327	0,0828	6,8330	
	MM	0,0006	0,0327	0,0828	6,8330	-0,7211
	MV	0,0006	0,0324	0,0501	5,4398	-0,7236
BBDC4	Empírico	0,0005	0,0284	0,6451	8,0559	
	MM	0,0005	0,0284	0,6451	8,0559	-0,6918
	MV	0,0005	0,0280	0,2067	5,5489	-0,7478
CMIG4	Empírico	0,0004	0,0236	-0,0097	5,4430	
	MM	0,0004	0,0236	-0,0097	5,4430	-0,5520
	MV	0,0004	0,0234	-0,0046	4,3107	-0,6156
CSNA3	Empírico	0,0011	0,0357	0,0331	7,2556	
	MM	0,0011	0,0357	0,0331	7,2556	-1,1065
	MV	0,0013	0,0352	0,0265	6,1748	-1,2413
CYRE3	Empírico	0,0000	0,0441	0,0827	7,1141	
	MM	0,0000	0,0440	0,0827	7,1141	-0,3309
	MV	-0,0004	0,0437	0,0293	5,3355	-0,1043
GGBR4	Empírico	0,0005	0,0335	-0,0659	5,7615	
	MM	0,0005	0,0335	-0,0659	5,7615	-0,6050
	MV	0,0009	0,0332	-0,0435	5,2894	-0,9630
ITSA4	Empírico	0,0006	0,0306	0,7230	8,8078	
	MM	0,0006	0,0306	0,7230	8,8078	-0,7582
	MV	0,0007	0,0300	0,3629	6,3157	-0,9424
ITUB4	Empírico	0,0005	0,0312	0,7040	8,1802	
	MM	0,0005	0,0312	0,7040	8,1802	-0,6159
	MV	0,0008	0,0304	0,4352	6,5278	-0,9544
PETR3	Empírico	0,0009	0,0312	-0,0404	6,1909	
	MM	0,0009	0,0312	-0,0404	6,1909	-1,0249
	MV	0,0014	0,0310	-0,0459	6,6403	-1,5839
PETR4	Empírico	0,0007	0,0300	-0,1087	6,3676	
	MM	0,0007	0,0299	-0,1087	6,3676	-0,9307
	MV	0,0009	0,0299	-0,1208	6,6356	-1,1702

(continuação)

	Empírico	0,0005	0,0343	-0,0184	6,2007	
USIM5	MM	0,0005	0,0343	-0,0184	6,2007	-0,6457
	MV	0,0007	0,0341	-0,0140	5,8545	-0,7852
	Empírico	0,0005	0,0330	-0,2274	6,7009	
VALE3	MM	0,0005	0,0330	-0,2274	6,7009	-0,6524
	MV	0,0007	0,0328	-0,1657	5,6861	-0,8482
	Empírico	0,0006	0,0310	-0,2112	6,0082	
VALE5	MM	0,0006	0,0309	-0,2112	6,0082	-0,7185
	MV	0,0006	0,0309	-0,3030	5,8946	-0,7202

III - Cálculo das Distâncias de Kolmogorov (KS), Kuiper (KP), Anderson-Darling (AD) e Farias-Ornelas-Fajardo (FOF)

		KS	P-valor (KS)	KP	P-valor (KP)	AD	FOF
arcz6	MM	0,0409	0,1653	0,0698	0,0186	0,1752	0,3505
	MV	0,0345	0,3370	0,0592	0,1002	0,1633	0,3266
bbas3	MM	0,0300	0,5121	0,0592	0,1001	0,0670	0,1340
	MV	0,0147	0,9969	0,0282	0,9863	0,1091	0,2181
bbdc4	MM	0,0452	0,0948	0,0770	0,0047	0,4177	0,8354
	MV	0,0136	0,9991	0,0238	0,9992	0,2598	0,5196
cmig4	MM	0,0274	0,6306	0,0478	0,3827	0,0923	0,1846
	MV	0,0198	0,9313	0,0313	0,9524	0,1876	0,3752
csna3	MM	0,0312	0,4608	0,0545	0,1852	0,0791	0,1582
	MV	0,0272	0,6397	0,0420	0,6135	0,1042	0,2085
cyre3	MM	0,0363	0,2783	0,0724	0,0116	0,0898	0,1795
	MV	0,0231	0,8209	0,0418	0,6215	0,2422	0,4844
ggbr4	MM	0,0330	0,3894	0,0480	0,3746	0,0705	0,1409
	MV	0,0252	0,7301	0,0408	0,6603	0,0730	0,1460
itsa4	MM	0,0418	0,1478	1,0714	0,0671	0,0297	2,1428
	MV	0,0151	0,9956	0,0295	0,9760	0,2078	0,4156
itub4	MM	0,0323	0,4164	0,0551	0,1719	0,0849	0,1698
	MV	0,0182	0,9663	0,0335	0,9101	0,1197	0,2395
petr3	MM	0,0209	0,9015	0,0385	0,7540	0,0790	0,1579
	MV	0,0169	0,9833	0,0250	0,9980	0,0727	0,1454
petr4	MM	0,0193	0,9438	0,0357	0,8485	0,0481	0,0962
	MV	0,0188	0,9546	0,0341	0,8949	0,0443	0,0886
usim5	MM	0,0167	0,9855	0,0307	0,9621	0,0693	0,1385
	MV	0,0220	0,8635	0,0331	0,9196	0,0756	0,1513
vale3	MM	0,0308	0,4773	0,0568	0,1386	0,0858	0,1716
	MV	0,0205	0,9113	0,0376	0,7859	0,1332	0,2665

(continuação)

vale5	MM	0,0216	0,8766	0,0350	0,8706	0,0856	0,1711
	MV	0,0160	0,9909	0,0319	0,9429	0,1024	0,2048

IV - Fórmulas das Distâncias de Kolmogorov (KS), Kuiper (KP), Anderson Darling (AD) e Farias-Ornelas-Fajardo (FOF)

Sendo a função de distribuição acumulada empírica e a função de distribuição acumulada teórica denotadas respectivamente por $F_{empírica}$ e $F_{teórica}$, as expressões para o cálculo das distância KS, KP, AD e FOF são:

Distância de Kolmogorov
$D_{Kol} = \max_{x \in \mathbb{R}} F_{empírica}(x) - F_{teórica}(x) $
Distância de Kuiper
$D_{Kui} = \max_{x \in \mathbb{R}} \{F_{empírica}(x) - F_{teórica}(x)\} + \max_{x \in \mathbb{R}} \{F_{teórica}(x) - F_{empírica}(x)\}$
Distância de Anderson-Darling
$D_{Ad} = \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{ F_{empírica}(x) - F_{teórica}(x) }{\sqrt{F_{teórica}(x)(1 - F_{teórica}(x))}}$
Distância Farias-Ornelas-Fajardo (FOF)
$D_{FOF} = \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{F_{empírica}(x) - F_{teórica}(x)}{\sqrt{F_{teórica}(x)(1 - F_{teórica}(x))}} + \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{F_{teórica}(x) - F_{empírica}(x)}{\sqrt{F_{teórica}(x)(1 - F_{teórica}(x))}}$

V. Fórmulas das Medidas de Erro

Sendo o preço empírico e o preço teórico de uma opção dados em ordem por $c_{mercado}$ e c_{modelo} , as fórmulas das medidas de erro são:

Medida de Erro	Fórmulas
MAE	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_{mercado}(i) - c_{modelo}(i) $
MAPE	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left \frac{c_{mercado}(i) - c_{modelo}(i)}{c_{mercado}(i)} \right $
RMSE	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (c_{mercado}(i) - c_{modelo}(i))^2}$