

1. Introdução;
2. Problemas de transportes;
3. Processos para obtenção de uma solução inicial básica viável;
4. Comentários sobre o método das duas etapas;
5. Conclusão.

Getúlio Góes Ferreti *

PROBLEMAS DE TRANSPORTES: COMENTÁRIOS SOBRE A SOLUÇÃO INICIAL DE DUAS ETAPAS

1. INTRODUÇÃO

Em um comentário desta revista¹ foi proposto um novo método para a obtenção da solução inicial dos problemas de transportes. O presente trabalho tem por objetivos, mostrar, através de dois exemplos, que a aplicação de tal método não leva sempre a uma solução ótima, e colaborar, assim, para o melhor posicionamento daquele estudo dentro do algoritmo clássico de solução dos problemas de transportes. Durante o presente estudo, a solução apresentada naquele trabalho será chamada de método das duas etapas. Para melhor localização do problema faz-se, de início, uma breve descrição do problema de transportes.

2. PROBLEMAS DE TRANSPORTES

O problema de programação linear, conhecido como "de transportes", pode ser definido como:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Esse problema representa a situação clássica em que se têm m fábricas, cada uma delas com produção, por unidade de tempo, igual a a_i unidades, que devem ser distribuídas a n depósitos, cada um deles demandando b_j unidades por unidade de tempo. O mínimo custo unitário de transporte entre uma fábrica i e um depósito j é considerado constante e igual a C_{ij} . Querem-se determinar as quantidades, X_{ij} , que devem ser transportadas da fábrica i ao depósito j , de modo a se incorrer no mínimo custo total de transporte (equação 1), ao mesmo tempo em que fiquem satisfeitas as restrições quanto às produções de cada fábrica (equação 2) e quanto às demandas de cada depósito (equação 3). Em muitos casos reais as restrições (2) e (3) não estão em forma de igualdades, ou seja, não se tem:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (4)$$

São os casos em que a soma das quantidades disponíveis nas fábricas não é igual à soma das quantidades demandadas pelos depósitos. Nessas situações, para adaptar o problema real ao clássico de transportes, dado pelas equações (1) até (3), cria-se ou um depósito fictício ou uma fábrica fictícia, com demanda ou produção que faça com que a equação (4) fique satisfeita, ou, equivalentemente, as restrições (2) e (3) tomem a forma de igualdades. Os custos fictícios são considerados nulos. A equação (4) faz com que o problema sempre tenha solução viável, e, conseqüentemente, tenha solução ótima.

* Mestre em Ciências,
Professor do Centro Tecnológico da
Universidade Federal de Santa Catarina.

Colocando-se o mesmo problema na forma matricial tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } z &= \bar{c} \bar{x} \\ \text{Sujeito a: } A \bar{x} &= \bar{d} \\ \bar{x} &\geq \bar{0} \end{aligned}$$

onde \bar{c} é um vetor linha, cujas n componentes são os custos unitários de transportes, \bar{x} é um vetor coluna, cujas $m \times n$ componentes são as quantidades que serão transportadas, A é uma matriz de ordem $(m+n) \times (m+n)$ e \bar{d} é um vetor coluna cujas $m+n$ componentes são as produções e as demandas. A matriz A apresenta estrutura simples e característica: seus elementos são todos ou zero ou um e seu posto (*rank*) é igual a $m+n-1$. Essa estrutura de matriz A é que permitiu o desenvolvimento de um algoritmo especial para a solução do problema de transportes. No entanto, apesar de ser um algoritmo especial, ele não deixa de ser apenas uma modificação do algoritmo simples, conservando deste último a característica de exigir uma solução inicial básica viável e, iterativamente, por um processo finito, chegar a uma solução ótima.

3. PROCESSOS PARA OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO INICIAL BÁSICA VIÁVEL

O primeiro passo para a resolução de um problema "de transportes" é a determinação de uma solução inicial, viável. Muitos métodos são utilizados para isso. Dentre eles comentaremos apenas dois. Quando se utiliza computadores, o método mais usado é o canto noroeste, por não exigir muitas comparações entre números e, por isso mesmo, ser computacionalmente bastante rápido. A solução inicial obtida por esse método está na maioria das vezes, bastante longe da ótima. Essa desvantagem, no entanto, é compensada pela sua simplicidade e rapidez de execução. Já o método de Vogel é mais adequado para execuções manuais, pois baseia-se todo ele na comparação entre números, o que em computador é relativamente demorado.

A solução inicial obtida pelo método de Vogel está na maioria dos casos, bastante próxima da ótima; daí a maior razão de seu uso em execuções manuais.

4. COMENTÁRIOS SOBRE O MÉTODO DAS DUAS ETAPAS

A própria autora reconhece que, no seu estudo, não pesquisou um número estatisticamente significativo de casos. Esclarece também, e com muita propriedade, que não espera validade universal para o método, que, no entanto, dá resultados excelentes para certos casos. Em suma, é um método heurístico como o são todos os demais métodos de obtenção de solução inicial. Convém ressaltar que a heurística utilizada, embora não deixada explícita no artigo, é uma heurística excelente. Começar pela linha (coluna) de maior soma de custos e por isso mesmo candidata a possuir os maiores custos individuais, e aproveitar dessa linha (coluna), progressivamente, as células que apresentarem os menores custos quando comparados com os demais custos das colunas (linhas), certamente é uma boa idéia. O que, no entanto, não se pode esperar, é que se chegue sempre a uma solução ótima, mesmo que seja após a aplicação das duas etapas do método.

4.1 Primeiro exemplo

Trata-se de um exemplo em que se procura maximizar o lucro decorrente da venda de um certo produto elaborado em quatro diferentes fábricas, e vendido a cinco mercados distintos. Como o algoritmo de transportes é aplicado mais para problemas de minimização, transforma-se a maximização em minimização através da equação:

$$\text{maximizo de: } z = - \text{mínimo de } (-z) \quad (5)$$

De acordo então com o quadro 1, a seguir, cada unidade produzida na fábrica 2, se vendida no mercado 1 dará um lucro de 300 unidades monetárias, se vendida no mercado 2 dará um lucro de 325 unidades monetárias etc. Seria o caso de um vendedor monopolista e discriminador de preços. O mercado 6 é fictício e foi criado para que a soma das produções seja igual à das demandas, conforme já se comentou anteriormente.

26

Quadro 1

| Fábricas | Mercados | | | | | | Totais |
|----------|----------|------|------|------|------|-----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | -275 | -350 | -425 | -225 | -150 | 0 | 300 |
| 2 | -300 | -325 | -450 | -175 | -100 | 0 | 250 |
| 3 | -250 | -350 | 475 | -200 | -125 | 0 | 150 |
| 4 | -325 | -275 | -400 | -250 | -175 | 0 | 200 |
| Totais | 150 | 100 | 75 | 250 | 200 | 125 | 900 |

Aplicando o método das duas etapas começa-se pela linha que apresenta maior soma de custos, que é a linha 2, depois passa-se à linha 3 etc. A menor diferença da linha 2 é igual a zero e corresponde à coluna 6. A segunda menor diferença é 25 e aparece nas colunas 1, 2 e 3.

Nesses casos de empate optou-se pela alocação a partir da célula de menor custo.

A solução obtida pela primeira etapa do método é apresentada no quadro 2, onde, por simplicidade de escrita, não aparecem os custos.

Quadro 2

| Fábricas | Mercados | | | | | | Totais |
|----------|----------|-----|----|-----|-----|-----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | | | | 100 | 200 | | 300 |
| 2 | | 50 | 75 | | | 125 | 250 |
| 3 | | 50 | | 100 | | | 150 |
| 4 | 150 | | | 50 | | | 200 |
| Totais | 150 | 100 | 75 | 250 | 200 | 125 | 900 |

O custo total dessa solução é -201.250 (lucro = 201.250), que não é o custo ótimo.

pela coluna 6, depois passa-se para a 5, e assim por diante. A solução encontrada nessa segunda etapa é a apresentada no quadro 3.

Aplicando a segunda etapa do método, começa-se

Quadro 3

| Fábricas | Mercados | | | | | | Totais |
|----------|----------|-----|----|-----|-----|-----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | | | | 175 | 125 | | 300 |
| 2 | 150 | 25 | 75 | | | | 250 |
| 3 | | 75 | | 75 | | | 150 |
| 4 | | | | | 75 | 125 | 200 |
| Totais | 150 | 100 | 75 | 250 | 200 | 125 | 900 |

O custo total dessa solução é de -199.375 (lucro = 199.375), que continua não sendo a ótima, já que uma

das soluções ótimas é dada no quadro 4.

O custo ótimo é, então, -206.875 (lucro = 206.875).

27

Quadro 4

| Fábricas | Mercados | | | | | | Totais |
|----------|----------|-----|----|-----|-----|-----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | | 25 | | 50 | 200 | 25 | 300 |
| 2 | 150 | | | | | 100 | 250 |
| 3 | | 75 | 75 | | | | 150 |
| 4 | | | | 200 | | | 200 |
| Totais | 150 | 100 | 75 | 250 | 200 | 125 | 900 |

4.2 Segundo exemplo²

Trata-se do problema, cujos custos unitários, demandas e produção aparecem no quadro 5, abaixo.

A primeira etapa do método produz a solução do quadro 6 a seguir que não é ótima.
O custo dessa solução é de 331

Quadro 5

| Fábricas | Depósitos | | | | | | Totais |
|----------|-----------|----|----|----|----|----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 5 | 50 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 40 |
| 3 | 3 | 5 | 4 | 2 | 4 | 1 | 60 |
| 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 31 |
| Totais | 30 | 50 | 20 | 40 | 30 | 11 | 181 |

Quadro 6

| Fábricas | Depósitos | | | | | | Totais |
|----------|-----------|----|----|----|----|----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 21 | 29 | | | | | 50 |
| 2 | | 20 | 20 | | | | 40 |
| 3 | 9 | | | 40 | | 11 | 60 |
| 4 | | 1 | | | 30 | | 31 |
| Totais | 30 | 50 | 20 | 40 | 30 | 11 | 181 |

A segunda etapa do método fornece a solução do quadro 7 a seguir.

O custo total dessa solução é de 358.

Como se pode ver, o método das duas etapas também nesse caso não deu solução ótima, já que uma das soluções ótimas pode ser vista no quadro 8, com custo total ótimo de 330.

Quadro 7

| Fábricas | Depósitos | | | | | | Totais |
|----------|-----------|----|----|----|----|----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 30 | 20 | | | | | 50 |
| 2 | | 20 | 20 | | | | 40 |
| 3 | | 9 | | 40 | | 11 | 60 |
| 4 | | 1 | | | 30 | | 31 |
| Totais | 30 | 50 | 20 | 40 | 30 | 11 | 181 |

Quadro 8

| Fábricas | Depósitos | | | | | | Totais |
|----------|-----------|----|----|----|----|----|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 20 | 30 | | | | | 50 |
| 2 | | 20 | 20 | | | | 40 |
| 3 | 10 | | | 39 | | 11 | 60 |
| 4 | | | | 1 | 30 | | 31 |
| Totais | 30 | 50 | 20 | 40 | 30 | 11 | 181 |

Poder-se-ia continuar a apresentação de inúmeros exemplos em que o método das duas etapas não leva a uma solução ótima.

5. CONCLUSÃO

O método das duas etapas para a obtenção de uma solução inicial para o problema de transportes nem sempre leva a uma solução que também é ótima. Como todos os outros métodos, é mais adequado para um tipo de problema do que para outros. Em vista disso, a segunda etapa do método é perfeitamente dispensável, uma vez que após a primeira etapa, para saber se ela é ótima deve-se utilizar um dos métodos de obtenção de solução ótima (*stepping-stone* ou da dualidade, este último também chamado método do Dantzig). Ora, uma vez verificada a não-otimalidade, e não se podendo garantir que a segunda etapa do método chegará a ele, é mais fácil, por envolver menos cálculos, utilizar o método de Dantzig para se chegar ao ótimo, mesmo porque esse método converge sempre.

A primeira etapa do método, no entanto, é sem dúvida de grande utilidade. ■

¹ Rodrigues, Maria M. E. Mischan. Método dos transportes: desenvolvimento de uma nova solução inicial. *Revista de Administração de Empresas*. v. 15, n. 2, p. 40-6, mar/abr. 1975.

² Exemplo tirado de Hadley, G. (ver bibliografia).

BIBLIOGRAFIA

Rodrigues, Maria M. E. Mischan. Método dos transportes: desenvolvimento de uma nova solução inicial. *Revista de Administração de Empresas*, FGV, v. 15, n. 2, p. 40-6, mar/abr. 1975.

Hadley, G. *Linear programming*. Reading. 8.^a ed. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing, 1974.

Dantzig, G. B. *Linear programming and extensions*. Princeton, New York, Princeton University Press, 1963.

Hillier, SH. & Liebermann, G. J. *Introduction to operations research*. 6. ed. San Francisco, California, Holden Day, 1970.

Vol. 27 — n.º 4
Out./Dez. 1975

ARQUIVOS BRASILEIROS

DE PSICOLOGIA APLICADA

- Efeitos de um programa de criatividade em alunos de 4.^ª e 5.^ª séries — Eunice M. L. Soriano de Alencar
- Análise das dimensões de percepção de controle pessoal: desenvolvimento de uma escala — Carmen Lúcia de Melo Barroso
- Efeitos da ansiedade e da instrução oral ou escrita no condicionamento verbal de crianças de um hospital e de uma escola — Maria Cecília Manzolli
- Um exame da tipologia do caráter social de Riesman — Edith Ramos
- A personalidade autoritária. Componentes e gênese psicológica — João Bosco de Castro Teixeira e Antonio Polo
- O campo de atuação do psicólogo escolar configurado através de uma experiência — Suely Teitelbaum e Itala M. Suarez de Puga
- Terapia familiar: teoria e técnica através do estudo de um caso — Terezinha Féres Carneiro e Ana Maria Fausto Saba
- Dr. Frederick Davis — Francisco Campos
- Monografias sintéticas de profissões de nível superior
- Resumos (*abstracts*) dos artigos publicados nos Arquivos Brasileiros de Psicologia Aplicada, de 1949 a 1974.

C\$ 20,00

À venda nas livrarias
da Fundação Getúlio Vargas.

Praia de Botafogo, 188
Av. Graça Aranha, 26, lojas C e H — Rio de Janeiro
Av. Nove de julho, 2029 — São Paulo
Super Quadra Sul, 104, Bloco A, loja 37 — Brasília

Pedidos pelo reembolso postal: FGV
Praia de Botafogo, 188 — CP 9052 — ZC-02
(Cheque pagável no Rio de Janeiro — RJ)