

# Um problema não trivial de projecteis

(A non trivial projectile problem)

Manuel Fernando Ferreira da Silva<sup>1</sup> e Eduardo Rino Alberto Segre

Departamento de Física, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal

Recebido em 18/05/04; Aceito em 19/07/04

Resolve-se de uma forma original um problema de projecteis pouco conhecido e de alguma dificuldade.

**Palavras-chave:** Cinemática, movimento de projecteis.

An uncommon projectile motion problem of unexpected difficulty is solved in an original way.

**Keywords:** Kinematics, projectile motion.

## 1. Introdução

O estudo do movimento de um projectil num campo gravítico constante desprezando a resistência do ar é uma das aplicações mais elementares da cinemática de uma partícula, e constitui um assunto obrigatório em todos os livros de texto de Física Geral a nível intermédio. Este estudo é importante porque estende para duas dimensões o problema da queda livre unidimensional, e permite que os estudantes se familiarizem com a “separação” de dois movimentos efectuados em direcções perpendiculares.

O facto das equações de movimento serem bastante simples leva com frequência a pensar que todos os problemas de projecteis são de certa forma triviais; há, no entanto, algumas excepções. Neste trabalho pretende-se mostrar uma dessas excepções.

## 2. Formulação do problema

Consideremos um projectil que é lançado desde o topo de um hemisfério de raio  $R$ . Sobre o projectil actua um campo gravítico vertical constante  $\vec{g}$  (ver Fig. 1). Deseja-se determinar a mínima velocidade de lançamento  $v_0$  que o projectil deverá ter de modo a conseguir abandonar o hemisfério sem colidir com o mesmo.

Este problema é muito pouco conhecido, e um dos aspectos que o torna especial é o facto da abordagem tradicional (puramente geométrica) ser extremamente complicada (no apêndice é esboçada essa solução geométrica). Aqui o problema será resolvido de uma forma alternativa, bem mais física; a solução que apresentamos apoia-se na solução prévia de outros dois problemas, algo mais conhecidos, o que torna esta abordagem bastante apelativa e, do ponto de vista pedagógico, muito instrutiva.

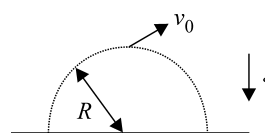


Figura 1 - Projectil lançado do topo de um hemisfério.

## 3. Problema auxiliar 1: Disparando sobre uma rampa

Um projectil é lançado da base de uma rampa, cuja inclinação é  $\beta$  (ver Fig. 2). O ângulo de lançamento, relativo à horizontal, é  $\alpha > \beta$ , e a velocidade inicial tem magnitude  $v_0$ . Deseja-se determinar o alcance  $A$ ,

<sup>1</sup>Enviar correspondência para Manuel Fernando Ferreira da Silva. E-mail: ferreira@dfisica.ubi.pt.

medido ao longo da rampa.

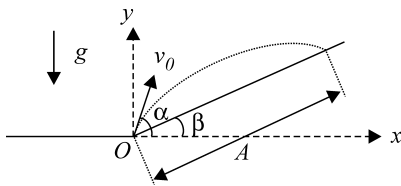


Figura 2 - Projétil lançado sobre uma rampa.

Este é um problema clássico [1-6]. Escolhendo  $t = 0$  como instante de lançamento, e o referencial  $Oxy$  da Fig. 2, o vector posição do projétil será, em função do tempo,

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\hat{x} + \left[ (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right] \hat{y}, \quad (1)$$

de modo que a equação da trajectória será a parábola

$$y = (\tan \alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (2)$$

A intersecção desta parábola com a recta  $y = (\tan \beta)x$  que representa a rampa resulta num ponto cuja abcissa satisfaz a equação

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = (\tan \alpha - \tan \beta)x, \quad (3)$$

da qual resulta, para além da solução trivial  $x = 0$ , a solução  $x_i$  associada ao ponto de impacto:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha (\tan \alpha - \tan \beta)}{g} \\ &= \frac{v_0^2}{g} \left[ 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right] \\ &= \frac{v_0^2 \sin(2\alpha) \cos \beta - \sin \beta [1 + \cos(2\alpha)]}{g \cos \beta} \\ &= \frac{v_0^2 \sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta}{g \cos \beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Logo, o alcance do projétil ao longo da rampa será

$$A = \frac{x_i}{\cos \beta} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta}{g \cos^2 \beta}. \quad (5)$$

Para uma velocidade  $v_0$  fixa, o máximo alcance  $A_{\text{máx}}$  é atingido quando  $\sin(2\alpha - \beta) = 1$ , ou seja, quando  $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ ; assim  $A_{\text{máx}}$  é atingido quando:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}, \quad (6)$$

e o seu valor será

$$A_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1 - \sin \beta}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1}{\sin \beta + 1}. \quad (7)$$

O caso especial de lançamento sobre uma superfície horizontal ( $\beta = 0$ ) proporciona os resultados bem conhecidos

$$A_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}$$

quando:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad (\beta = 0). \quad (8)$$

Naturalmente, todos os resultados anteriores permitem também valores negativos de  $\beta$ , o que fisicamente equivale a fazer o lançamento desde o topo da rampa e não a partir da base, que é a forma em que o problema é apresentado em alguns livros [7-9].

#### 4. Problema auxiliar 2: Disparando por cima de um obstáculo

Deseja-se que um projétil passe por cima de um obstáculo de altura  $h$  localizado a uma distância horizontal  $d$  do ponto de lançamento (ver Fig. 3). Qual é a mínima velocidade de lançamento  $v_0$  que torna isso possível?

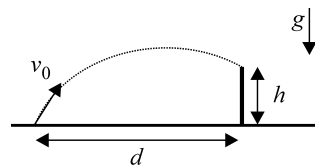


Figura 3 - Projétil lançado por cima de um obstáculo.

Embora menos conhecido que o problema anterior, este problema pode também ser encontrado na literatura [10]. Para o resolver, em vez de atacá-lo directamente aproveitamos os resultados da secção anterior. Assim, traçamos uma semi-recta com origem no ponto de lançamento que passe pelo ponto mais alto do obstáculo. Esta semi-recta será o equivalente da rampa do problema auxiliar 1, e a sua inclinação será  $\beta = \arctan(h/d)$ . Vejamos qual a condição para que o projétil passe pelo ponto mais alto do obstáculo.

Numa tal situação, o alcance  $A$  ao longo da semi-recta é fixado, o ângulo de lançamento ideal (de forma a minimizar o valor de  $v_0$ ) será, de acordo com (6),

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{h}{d} \right), \quad (9)$$

e o valor mínimo de  $v_0$  obtém-se a partir de (7):

$$\begin{aligned} v_{0,\min} &= \sqrt{gA(\sin \beta + 1)} \\ &= \sqrt{g(A \sin \beta + A)} \\ &= \sqrt{g \left( h + \sqrt{h^2 + d^2} \right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Assim, para que o projectil ultrapasse o obstáculo bastará escolher

$$v_0 > \sqrt{g \left( h + \sqrt{h^2 + d^2} \right)}, \quad (11)$$

com o ângulo de lançamento (9).

## 5. Resolução do problema inicial: Disparando do topo de um hemisfério

Voltemos agora ao problema enunciado na secção 2. Tendo em conta a resolução da secção 4, podemos agora reformular este problema imaginando o hemisfério como um conjunto (infinito) de obstáculos cujos pontos mais altos se encontram a alturas cada vez mais pequenas (ver Fig. 4).

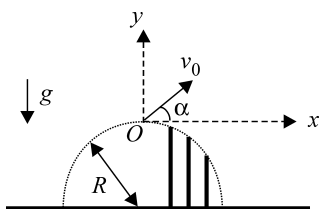


Figura 4 - Resolvendo o problema proposto.

Escolhendo o referencial  $Oxy$  representado, o ponto mais alto do obstáculo colocado na posição  $x = d$  terá uma coordenada  $h = y$ , com  $x^2 + (y+R)^2 = R^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 - (h + R)^2 = -h^2 - 2Rh \\ \implies h^2 + d^2 &= -2Rh. \end{aligned} \quad (12)$$

Convém notar que os valores  $h$  dos obstáculos são, neste caso, negativos.

Para cada obstáculo, a velocidade mínima  $v_0$  requerida virá dada por (11); logo, para cada  $h$  no intervalo  $[-R, 0]$ , teremos

$$v_0^2 > g \left( h + \sqrt{-2Rh} \right). \quad (13)$$

Resta agora determinar o valor de  $h$  para o qual a função

$$f(h) = h + \sqrt{-2Rh} = \frac{R}{2} - \left( \sqrt{\frac{R}{2}} - \sqrt{-h} \right)^2 \quad (14)$$

atinge o valor máximo, e usar depois (13) para obter o valor mínimo de  $v_0$ . Obviamente  $f(h)$  é máximo quando

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{R}{2}} = \sqrt{-h} &\implies \frac{R}{2} = -h \\ &\implies h = -\frac{1}{2}R, \end{aligned} \quad (15)$$

valor para o qual corresponde

$$f\left(-\frac{R}{2}\right) = \frac{R}{2}, \quad (16)$$

de modo que (13) dá

$$v_0^2 > \frac{gR}{2}. \quad (17)$$

Usando (12) obtém-se o valor correspondente de  $d$ :

$$d = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R. \quad (18)$$

O ângulo de lançamento associado a esta velocidade mínima é, usando (9), (15) e (18),

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-R/2}{\sqrt{3}R/2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \quad (19)$$

Concluindo, para que o projectil abandone o hemisfério com velocidade mínima deverá ser lançado com um ângulo de  $30^\circ$  e com uma velocidade  $v_0$  tal que

$$v_0 > \sqrt{\frac{gR}{2}}. \quad (20)$$

## 6. Conclusões

Foi resolvido um problema de projecteis muito pouco conhecido, e que está longe de ser trivial; o processo de resolução envolveu o estudo de outros dois problemas de projecteis ligeiramente mais simples. Desta forma, um problema complicado acabou por tornar-se fácil. No apêndice mostram-se as grandes dificuldades que apresenta o ataque directo do problema proposto.

Convém salientar que tanto o problema proposto como os dois problemas auxiliares foram resolvidos sem recorrer ao cálculo diferencial; assim, qualquer destes problemas pode, em princípio, ser explicado a alunos que ainda não conheçam o conceito de derivada.

Já a abordagem geométrica ensaiada no apêndice requer necessariamente não só o conceito de derivada como também o teorema da função implícita.

Espera-se que este exemplo tenha mostrado que os problemas de projecteis podem ser algo mais do que simples “rotina”; deseja-se também que ele tenha ilustrado como três problemas bastante diferentes podem ser estreitamente relacionados, criando assim uma visão de conjunto que pensamos ser muito pedagógica.

### Referências

[1] M.R. Spiegel, *Theory and Problems of Theoretical Mechanics* (problem 3.21, McGraw-Hill, New York, 1967).

[2] J. Norwood, Jr., *Intermediate Classical Mechanics* (problem 2-2-5, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979).

[3] M. Alonso and E.J. Finn, *Physics* (problem 4.10, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1992).

[4] R. Resnick, D. Halliday and K.S. Krane, *Physics* (problem 44, Wiley, New York, 1992), 4th ed., chapter 4.

[5] W.G. Rees, *Physics by Example: 200 Problems and Solutions* (problem 15, Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[6] J.B. Marion and S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (problem 2-14, Saunders College Pub., Fort Worth, Philadelphia, 1995), 4th ed.

[7] Referência 1, problem 3.64.

[8] D. Kleppner and R.J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* (problem 1.21, McGraw-Hill, Boston, 1973).

[9] J V.D. Barger and M. G. Olsson, *Classical Mechanics - A Modern Perspective* (problem 1-4, McGraw-Hill, New York, 1995), 2nd ed.

[10] B.B. Bukhovtsev, V.D. Krivtchenkov, G. Ya. Miakishev e I.M. Saraeva, *Problemas Seleccionados de Física Elemental* (problema 42, Editora Mir, Moscovo, 1977).

### Apêndice

Descrevemos aqui, muito resumidamente, como pode ser resolvido o problema proposto através de uma análise puramente geométrica. Começamos por escrever a equação da trajectória parabólica descrita pelo projectil, usando o referencial  $Oxy$  da Fig. 4:

$$y = (\tan \alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 . \quad (21)$$

Esta trajectória deve ser interceptada com a circunferência

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2 . \quad (22)$$

Introduzindo (21) em (22) e desenvolvendo, chega-se à equação

$$ax^3 - bx^2 - cx + d = 0 , \quad (23)$$

$$a = \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right)^2 , \quad (24)$$

$$b = \frac{g \tan \alpha}{v_0^2 \cos^2 \alpha} , \quad (25)$$

$$c = \frac{gR - v_0^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} , \quad (26)$$

$$d = 2R \tan \alpha . \quad (27)$$

A Eq. (23) descreve os pontos de intersecção entre (21) e (22) diferentes do ponto de lançamento ( $x = 0$ ). A Eq. (23) poderá ter três raízes reais diferentes (Fig. 5a), duas raízes reais iguais e outra real diferente (Fig. 5b), e uma raiz real e duas complexas conjugadas (Fig. 5c). Estamos interessados na situação limite mostrada na Fig. 5b. Sejam  $x = -x_1$  e  $x = x_2$  as duas soluções representadas nessa figura.

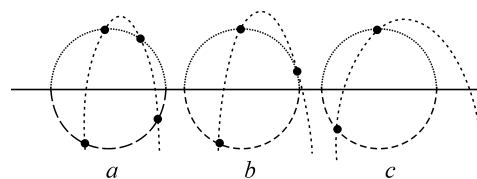


Figura 5 - Resolução geométrica do problema.

A Eq. (23) deverá então poder ser escrita na forma

$$a(x + x_1)(x - x_2)^2 = 0 . \quad (28)$$

Igualando (23) e (28) obtêm-se as seguintes equações:

$$x_1 - 2x_2 = -\frac{b}{a} , \quad (29)$$

$$x_2^2 - 2x_1x_2 = -\frac{c}{a} , \quad (30)$$

$$x_1x_2^2 = \frac{d}{a} . \quad (31)$$

Combinando (29) e (30) é possível retirar  $x_1$  e  $x_2$ :

$$x_1 = -\left(\frac{b}{3a}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a}\right)} ;$$

$$x_2 = \left(\frac{b}{3a}\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a}\right)} , \quad (32)$$

e inserindo as expressões (32) em (31) obtém-se a condição

$$4 \left[ \left( \frac{b}{3a} \right)^2 + \left( \frac{c}{3a} \right) \right]^3 = \left[ \left( \frac{d}{a} \right) - 3 \left( \frac{b}{3a} \right) \left( \frac{c}{3a} \right) - 2 \left( \frac{b}{3a} \right)^3 \right]^2. \quad (33)$$

Quando as expressões (24)-(27) são substituídas em (33) resulta

$$\frac{4}{3} \left( z - 1 + \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \right)^3 = \sin^2 \alpha \left( z + 2 - \frac{16}{9} \sin^2 \alpha \right)^2, \quad (34)$$

onde se definiu

$$z = \frac{gR}{v_0^2}. \quad (35)$$

A relação (34) define implicitamente  $z$  em função de  $\alpha$ , e pode ser posta na forma

$$4(z-1)^3 + (13z^2 - 44z + 4) \sin^2 \alpha + 32z \sin^4 \alpha = 0. \quad (36)$$

O nosso objectivo é saber em que condições  $z$  atinge o seu valor máximo (valor mínimo de  $v_0$ ). Derivando implicitamente (36) com respeito a  $\alpha$  e impondo a condição  $\frac{dz}{d\alpha} = 0$  resulta

$$\sin^2 \alpha = -\frac{13z^2 - 44z + 4}{64z}, \quad (37)$$

que inserida novamente em (36) permite obter a equação

$$343z^4 - 392z^3 - 504z^2 - 160z - 16 = 0 \implies (z-2)(7z+2)^3 = 0. \quad (38)$$

A Eq. (38) tem apenas duas raízes:  $z = 2$  e  $z = -2/7$ . Só a primeira é admissível, devido a (35), o que determina o valor mínimo de  $v_0$ :

$$2 = \frac{gR}{v_{0,\min}^2} \implies v_{0,\min} = \sqrt{\frac{gR}{2}}. \quad (39)$$

Substituindo o valor obtido  $z = 2$  em (37) resulta

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \implies \alpha = \frac{\pi}{6}. \quad (40)$$