

Estudo de gases quânticos em uma rede óptica utilizando aproximação variacional

(Study of quantum gases in an optical lattice using variational approximation)

V.A. Nascimento^{1,2}

¹Departamento de Clínica Cirúrgica, Faculdade de Medicina, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, Brasil//²Departamento de Física, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, Brasil

Recebido em 13/4/2010; Aceito em 10/7/2010; Publicado em 6/6/2011

Nós investigamos as soluções de uma equação hidrodinâmica de campo médio utilizando aproximações variacionais com o objetivo de estudarmos a formação de gap sóliton iluminado em um gás de bósons e em um gás de férmions degenerado confinados por um potencial transversal e uma rede óptica periódica unidimensional. Através da aproximação variacional nós estudamos a possibilidade de que a não linearidade efetiva para férmions ou coeficiente de interação para bósons atuando em combinação com o potencial de rede óptica permite o surgimento de gap sólitons fundamentais em diferentes dimensões apresentando um comportamento peculiar em função do potencial químico.

Palavras-chave: condensado de Bose-Einstein, gás de Fermi degenerado, aproximação variacional (AV).

We investigate the solution of a mean-field-hydrodynamic equation using variational approximation with the aim of study the formation of fundamental gap solitons in a Bose gas and in a degenerate Fermi gas when trapped by one transversal potential and a single-periodic one-dimensional optical lattice. By variational approximation we study the possibility that the effective nonlinearity or interaction coefficient acting in combination with the potential of the optical lattice which allows the appearance of solitons in different dimensions presenting a peculiar behavior in function of the chemical potential.

Keywords: Bose-Einstein condensate, degenerate Fermi gas, variational approximation (VA).

1. Introdução

Redes ópticas abrem um novo e excitante campo de estudo para a Condensação de Bose Einstein (CBE) e gás de férmion degenerados (GFD) a baixas temperaturas [1]. Um correspondente interesse em gases atômicos de bósons e férmions em redes ópticas tem surgido por que eles permitem reproduzir varias classes de fenômenos fundamentais já observados ou preditos na física do estado sólido, tais como superfluidez e isolantes de Mott [2]. Uma rede óptica é uma onda de luz estacionária criada por feixes de lasers contra propagantes onde os átomos são aprisionados nos nodos e anti-nodos pela força de dipolo [3]. Desta forma, gaps espectrais surgem dentro de uma banda de gap linear formando um gap sóliton iluminado [4]. Experimentalmente sólitons iluminados foram criados em Condensados atômicos de ⁽⁷⁾Li [5] e ⁽⁸⁵⁾Rb [6], recentemente tem sido observado em ambas moléculas de ⁽⁴⁰⁾K e ⁽⁶⁾Li [7].

Utilizando aproximação variacional (AV) nós apresentamos um trabalho que explora a possibilidade de

que a não linearidade efetiva para férmions ou coeficiente de interação repulsiva para bósons atuando em combinação com o potencial da rede óptica simples em 1D permite o surgimento de gap sólitons fundamentais em diferentes dimensões. Os gap sólitons fundamentais são objetos compactos aprisionados em uma única célula da rede óptica e são estáveis contra pequenas perturbações [8]. Uma conceitual introdução sobre este tópico pode ser encontrada na Ref. [9]. Estudos numéricos com o propósito de resolver a equação de Gross-Pitaevskii ou equação hidrodinâmica de campo médio e compará-las com os resultados experimentais têm obtido grande sucesso [10, 11], entretanto é instrutivo resolve-la utilizando resultados analíticos. Nós procuraremos por soluções variacionais para a equação hidrodinâmica de campo médio utilizando um ansatz gaussiano $u(r)$ em 3D e $\phi(z)$ para 1D.

O trabalho é organizado como segue. Na seção 2 nós apresentaremos a equação hidrodinâmica de campo médio e procuraremos por gap sólitons fundamentais estáveis em 3D por meio da aproximação variacional.

¹E-mail: aragao60@hotmail.com.

Na seção 3 nós realizaremos a redução da equação hidrodinâmica de campo médio em 3D para 1D e procuraremos por sólitons estáveis em 1D por meio da aproximação variacional. Na seção 4 nós temos os resultados obtidos a partir da aproximação variacional para gap sóliton fundamentais em 3D e 1D. A seção 5 consta com o resumo dos resultados obtidos e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2. Aproximação variacional para sólitons em um gás de férmions ou bósons em três dimensões

Nesta primeira seção, nós obteremos a lagrangiana a partir da equação hidrodinâmica de campo médio. Nós consideraremos a equação hidrodinâmica de campo médio para sólitons fundamentais em três dimensões para um gás de férmions na sua forma usual escrita como

$$i\frac{\partial\psi_{(F)}}{\partial t} = -\nabla^2\psi_{(F)} + g_{3D}|\psi_{(F)}|^{4/3}\psi_{(F)} - \varepsilon\cos(2z)\psi_{(F)} + \alpha(x^2 + y^2)\psi_{(F)}, \quad (1)$$

e para um gás de bósons

$$i\frac{\partial\psi_{(B)}}{\partial t} = -\nabla^2\psi_{(B)} + G_{3D}|\psi_{(B)}|^2\psi_{(B)} - \varepsilon\cos(2z)\psi_{(B)} + \alpha(x^2 + y^2)\psi_{(B)}, \quad (2)$$

onde para ambas as Eq. (1) e Eq. (2), $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ é o laplaciano em 3D (operador energia cinética), $\psi_\eta(x, y, z, t)$ é a função de onda do condensado de bósons ($\eta = B$) ou gás de férmions ($\eta = F$), $U(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$ é o potencial de aprisionamento externo transversal em 2D (na forma de charuto), $\alpha = (1/2)m\omega_\perp$ representa a massa para férmions na Eq. (1) (ou bósons na Eq. 2), e ω_\perp trata-se da frequência do laser de aprisionamento transversal, $U(z) = -\varepsilon\cos(2z)$ o potencial da rede óptica e $-\varepsilon$ corresponde a amplitude da rede óptica criada pela interferência dos lasers

contra propagantes (a amplitude da rede é considerada como negativa para fixarmos um mínimo local do potencial no ponto $z = 0$, onde o centro do sóliton será colocado).

Quantidades físicas como $g_{3D} = \frac{3}{5}((3\lambda^2/2\pi a_{oh}^2)N)^{\frac{2}{3}}$ são denominadas de força efetiva de não linearidade para férmions em 3D, $a_{ho}^2 = \hbar/m\omega_\perp$ o comprimento do oscilador harmônico, $G_{3D} \equiv (\lambda a_s/\pi a_{ho}^2)N$ é o coeficiente que representa a interação entre bósons em 3D, λ é o comprimento de onda do laser e $a_s > 0$ o comprimento de espalhamento da interação repulsiva entre os átomos. O comprimento de espalhamento a_s e o coeficiente G_{3D} podem ser controlados por meio da técnica de ressonância de Feshbach. A Eq. (1) é utilizada para estudar férmions e inclui um termo não linear repulsivo $|\psi_{(F)}|^{4/3}\psi_{(F)}$ [12]. Este termo não considera as colisões entre átomos, porém é indiretamente induzido pelo princípio de Pauli através da distribuição de Fermi dos átomos. Na Eq. (2) o termo $|\psi_{(B)}|^2\psi_{(B)}$ [13] representa a interação repulsiva ou atrativa entre bósons. A Eq. (1) e Eq. (2) estão sujeitas a normalização,

$$\int \int \int |\psi_\eta(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1, \quad (3)$$

e possuem soluções estacionárias $\psi_\eta(x, y, t) = e^{-i\mu_\eta t}u_\eta(x, y, z)$, onde μ_η é o potencial químico, $u_\eta(x, y, z)$ é uma função real para sólitons fundamentais que obedece a seguinte equação em 3D para férmions

$$\mu_F u_F = -(u_{(F)xx} + u_{(F)yy} + u_{(F)zz}) + g_{3D}u_F^{7/3} - \varepsilon[\cos(2z)]u_F + \alpha(x^2 + y^2)u_F, \quad (4)$$

e para bósons

$$\mu_B u_B = -(u_{(B)xx} + u_{(B)yy} + u_{(B)zz}) + G_{3D}u_B^3 - \varepsilon[\cos(2z)]u_B + \alpha(x^2 + y^2)u_B, \quad (5)$$

as quais estão sujeitas à condição de normalização $\int \int \int u_\eta^2(x, y, z) dx dy dz = 1$. A Eq. (4) para férmions pode ser obtida a partir da lagrangiana

$$L_{(F)} = \mu_F + \int \int \int dx dy dz \left[-\mu_F u_F^2 + (\nabla u_F)^2 + \frac{3}{5}g_{3D}u_F^{10/3} - \varepsilon[\cos(2z)]u_F^2 + \alpha(x^2 + y^2)u_F^2 \right], \quad (6)$$

e a Eq. (5) para bósons torna-se

$$L_{(B)} = \mu_B + \int \int \int dx dy dz \left[-\mu_B u_B^2 + (\nabla u_B)^2 + \frac{1}{2}G_{3D}u_B^4 - \varepsilon_0[\cos(2z)]u_B^2 + \alpha(x^2 + y^2)u_B^2 \right]. \quad (7)$$

Soluções variacionais para a Eq. (6) e Eq. (7) são obtidas ao assumirmos um ansatz simétrico para sólitons em 3D na forma gaussiana

$$u_\eta(x, y, z) = \frac{\sqrt{N}}{\pi^{3/4}WV^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2W^2} - \frac{z^2}{2V^2}\right), \quad (8)$$

onde N corresponde à norma, W é a largura bidimensional e V a largura axial do sóliton (que tem formato de charuto). A substituição do ansatz (Eq. (8)) na lagrangiana (Eq. (6) e Eq. (7)) produz a lagrangiana efetiva para férmions

$$L_{ef(F)} = \mu_F(1 - N) + \frac{N}{W^2} + \frac{N}{2V^2} + \left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} \frac{g_{3D}N^{5/3}}{\pi(VW)^{2/3}} - \varepsilon N e^{-V^2} + \alpha N W^2, \quad (9)$$

e para bósons

$$L_{ef(B)} = \mu_B(1 - N) + \frac{N}{W^2} + \frac{N}{2V^2} + \frac{N^2 G_{3D}}{4\sqrt{2}VW^2\pi^{3/2}} - \varepsilon N e^{-V^2} + \alpha N W^2. \quad (10)$$

As equações variacionais serão obtidas a partir da lagrangiana efetiva. Primeiro, para a Eq. (9) façamos $\partial L_{ef(F)}/\partial\mu = 0$, como usual $N = 1$. Na sequência as equações $\partial L_{ef(F)}/\partial W = \partial L_{ef(F)}/\partial V = 0$ predizem a relação entre as larguras do sóliton (W , V) e o coeficiente de não linearidade (g_{3D}) conforme explicito abaixo

$$1 + \frac{3^{3/2}2g_{3D}W^{2/3}}{5^{5/2}\pi V^{2/3}} = \alpha W^4, \quad (11)$$

$$1 + \frac{3^{3/2}2g_{3D}V^{4/3}}{5^{5/2}\pi W^{4/3}} = 2\varepsilon V^4 e^{-V^2}. \quad (12)$$

Considerando $\partial L_{ef(F)}/\partial N = 0$ obtemos μ_F (potencial químico) em função das larguras do sóliton (W , V) e do coeficiente de não linearidade para férmions (g_{3D})

$$\frac{1}{W^2} + \frac{1}{2V^2} + \frac{3\sqrt{3}g_{3D}}{5\sqrt{5}\pi(VW^2)^{2/3}} - \varepsilon e^{-V^2} + \alpha W^2 = \mu_F. \quad (13)$$

As equações variacionais para bósons são obtidas como segue. Para bósons (Eq. (10)) consideremos $\partial L_{ef(B)}/\partial\mu = 0$ que resulta em $N = 1$. A partir das equações $\partial L_{ef(B)}/\partial W = \partial L_{ef(B)}/\partial V = 0$ obtemos a relação entre as larguras do sóliton (W , V) e o coeficiente de interação repulsiva (G_{3D})

$$1 + \frac{G_{3D}}{4\sqrt{2}V} = \alpha W^4, \quad (14)$$

$$1 + \frac{G_{3D}V}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}W^2} = 2\varepsilon V^4 e^{-V^2}. \quad (15)$$

Quando $\partial L_{ef(B)}/\partial N = 0$ obtemos μ_B (potencial químico) em função das larguras do sóliton (W , V) e do coeficiente de interação repulsiva para bósons (G_{3D})

$$\frac{1}{W^2} + \frac{1}{2V^2} + \frac{G_{3D}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}VW^2} - V_0 e^{-V^2} + \alpha W^2 = \mu_B. \quad (16)$$

As soluções variacionais para as Eqs. (13) e Eq. (16) produzem uma dependência de g_{3D} e G_{3D} em função

do potencial químico μ_η para sólitons fundamentais em 3D. Note que o ansatz (Eq. (8)) foi considerado na forma simétrico (com respeito a x , y e z), porém, sólitons assimétricos em 3D também existem.

3. Aproximação variacional para sólitons em um gás de férmions ou bósons em uma dimensão

A Eq. (4) e Eq.(5) em três dimensões podem ser transformadas em equações unidimensionais ao considerarmos o estado fundamental na direção transversal

$$\Phi_\eta(x, y) = (\alpha^{1/4}/\sqrt{\pi}) \exp[-\sqrt{\alpha}(x^2 + y^2)/2], \quad (17)$$

com normalização $\iint dx dy \Phi_\eta^2 = 1$ e satisfazendo a equação

$$-\Phi_{(\eta)xx} - \Phi_{(\eta)yy} + \alpha(x^2 + y^2)\Phi_\eta = 2\sqrt{\alpha}\Phi_\eta. \quad (18)$$

Como complemento consideremos a função de onda $u_\eta(x, y, z)$ escrita através da relação

$$u_\eta(x, y, z) = \Phi_\eta(x, y)\phi_\eta(z). \quad (19)$$

Ao substituirmos a Eq. (19) na Eq. (4) e Eq. (5), multiplicá-la por $\Phi_\eta(x, y)$ e integramos em relação à x e y obtemos uma equação hidrodinâmica de campo médio em 1D para férmions e bósons

$$-\phi_{(F)zz} + g_{1D}\phi_F^{7/3} - \varepsilon \cos(2z)\phi_F = (\mu_F - 2\sqrt{\alpha})\phi_F, \quad (20)$$

$$-\phi_{(B)zz} + G_{1D}\phi_B^3 - \varepsilon \cos(2z)\phi_B = (\mu_B - 2\sqrt{\alpha})\phi_B, \quad (21)$$

onde $g_{1D} = 3g_{3D}\alpha^{1/3}/5\pi^{2/3}$ e $G_{1D} = G_{3D}\sqrt{\alpha}/(2\pi)$. A lagrangiana obtida a partir da Eq. (20) para férmions e bósons (Eq. 21) é dada por

$$L_F = -\mu_F\phi_F^2 + |\nabla\phi_F|^2 + \frac{3}{5}g_{1D}\phi_F^{10/3} - \varepsilon \cos(2z)\phi_F^2, \quad (22)$$

$$L_B = -\mu_B \phi_B^2 + |\nabla \phi_B|^2 + \frac{G_{1D}}{2} \phi_B^4 - \varepsilon \cos(2z) \phi_B^2. \quad (23)$$

Soluções para a lagrangiana Eq. (22) e Eq. (23) em 1D, são obtidas ao assumirmos o ansatz variacional em 1D na forma gaussiana

$$\phi(z) = \frac{\sqrt{N}}{V^{1/2} \pi^{1/4}} e^{-z^2/2V^2}, \quad (24)$$

sendo N (norma) e V (largura) os parâmetros variacionais do sóliton em 1D. Ao substituírmos a Eq. (24) na Eq. (22) e Eq. (23) e integrarmos em relação a z obtemos a lagrangiana efetiva em 1D para férmions e bósons

$$L_{ef(F)} = -\mu_B N + \frac{N}{2V^2} + \frac{3^{3/2} \sqrt{2} N^{5/3}}{5^{3/2} \pi^{1/3} V^{2/3}} g_{1D} - \varepsilon N e^{-V^2}, \quad (25)$$

$$L_{ef(B)} = -\mu_B N + \frac{N}{2V^2} + \frac{N^2}{2\sqrt{2} V \pi^{1/2}} G_{1D} - \varepsilon N e^{-V^2}. \quad (26)$$

A partir da lagrangiana efetiva Eq. (25) e Eq. (26) nós obteremos as equações variacionais. A equação $\partial L_{ef(F)}/\partial V = \partial L_{ef(F)}/\partial N = 0$ conduz a $N = 1$ (como esperado) e produz a relação para férmions

$$1 + \frac{2\sqrt{3} V^{4/3}}{5^{3/2} \pi^{1/3}} g_{1D} = 2\varepsilon V^4 e^{-V^2}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{2V^2} + \frac{\sqrt{3} g_{1D}}{\sqrt{5} V^{2/3} \pi^{1/3}} - \varepsilon e^{-V^2} = \mu_F, \quad (28)$$

e para bósons

$$1 + \frac{GV}{2\sqrt{2}\pi^{1/2}} = 2\varepsilon V^4 e^{-V^2}, \quad (29)$$

$$\frac{1}{2V^2} + \frac{G}{\sqrt{2}\pi^{1/2}V} - \varepsilon e^{-V^2} = \mu_B. \quad (30)$$

As soluções das Eq. (28) e Eq. (30) produzem uma dependência de g_{3D} e G_{3D} em função do potencial químico μ_η para sólitons fundamentais em 1D.

4. Resultados obtidos a partir da aproximação variacional

Na Fig. 1, nós temos a força efetiva de não linearidade (g) para férmions e o coeficiente de interação repulsiva entre os bósons (G), ambos em função do potencial químico μ_η para o caso em 3D e 1D obtidos a partir da aproximação variacional. Ao considerarmos $G = g = 0$ em todas as equações, a solução variacional obtida no limite linear prediz os valores do potencial químico $\mu_{(\eta)0} = \mu_\eta(G = g = 0)$, $\mu_{(\eta)0} = -2.103$ o qual coincide com o valor da primeira borda esquerda na primeira banda de gap.

As famílias de gap sólitons fundamentais para um gás de férmions ou bósons são encontradas na primeira e segunda banda de gap do potencial periódico $\varepsilon \cos(2z)$. A linha tracejada é obtida para férmions em 3D (Eq. (13), Fig. 1(a)), e a linha contínua para férmions em 1D (Eq. (28), Fig. 1(a)). A linha pontilhada é obtida para bósons em 3D (Eq. (16), Fig. 1(b)) e linha contínua em 1D (Eq. (30), Fig. 1(b)). As barras verticais representam as bandas de Bloch que separam os gap. Embora as soluções variacionais predizerem famílias de gap sólitons fundamentais na primeira banda de gap e continuam através da segunda banda de gap, elas não sentem a presença das bandas de Bloch que separam as banda de gap [14, 16].

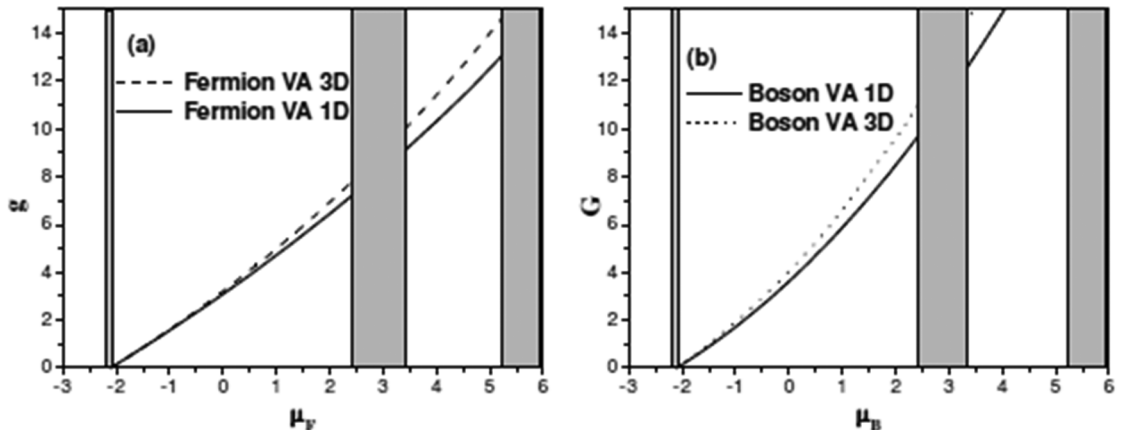


Figura 1 - Resultados variacionais para o coeficiente de não linearidade efetiva g para férmions e coeficiente de interação G para bósons versus o potencial químico μ_η em 3D e 1D. (a) A linha tracejada é obtida para férmions em 3D (Eq. (13)), e a linha contínua para férmions em 1D (Eq. (28)). (b) A linha pontilhada é obtida para bósons em 3D (Eq. (16)) e linha contínua em 1D (Eq. (30)). Os valores para os potenciais químicos foram obtidos considerando o potencial periódico $\varepsilon \cos(2z)$ como uma constante. As barras verticais representam as bandas de Bloch que separam os gap.

Gap sólitons fundamentais são localizados em um único sítio da rede óptica para pequenos valores de não linearidade. Entretanto, nós poderíamos obter outros tipos de gap sólitons estáveis com distintos valores de $\mu\eta$. Como na Fig. 1 há varias famílias de gap sólitons fundamentais para bósons ou férmions, nós podemos observar a sua forma utilizando a gaussiana Eq. (8). Na Fig. 2 nós temos o comportamento da gaussiana na qual a largura bidimensional (W) e axial (V) do sóliton foram obtidas utilizando as equações variacionais (11) e (12) para férmions em 3D, e a Eq. (14) e Eq. (15) para bósons em 3D. Os valores obtidos das larguras W e V são substituídos na Eq. (8). Este é um exemplo de gap sólitons pertencente à primeira banda de gap do espectro em 3D onde utilizamos os valores para bósons: (a) $G_{3D} = 5$ com $\mu = 0.35$; (b) férmions: $g_{3D} = 5$ com $\mu = 0.81$.

Na Fig. 2 devido à diferença de potencial químico entre bósons e férmions a largura e amplitude da gaussiana não são iguais. Esta diferença pode ser observada na Fig. 1, em outras palavras quando maior o potencial químico maior será a diferença entre G e g .

A forma dos gap sólitons fundamentais para férmions e bósons obtidos pela aproximação variacio-

nal em 1D utilizando o ansatz gaussiano (Eq. (24)) e os valores para (a) bósons: $G_{1D} = 0.8$; férmions: $g_{1D} = 0.8$, são apresentados na Fig. (3). Os resultados encontrados são obtidos para os gap sólitons pertencentes a primeira banda de gap, os quais podem ser identificados pelo valores do potencial químico indicado na Fig. (1). Podemos observar (Fig. 3) que a forma dos gap sólitons fundamentais no modelo obtido a partir da aproximação variacional para férmions e bósons em 1D são aproximadamente a mesma para pequenos valores do potencial químico.

Nossos resultados confirmam a validade do ansatz gaussiano utilizado na aproximação variacional. Os resultados expostos neste trabalho fornecem importantes contribuições ao estudo de condensados, no caso para um gás de bósons e férmions. Estes resultados nos mostram que há uma evolução no comportamento dos gap solitons. Na literatura há trabalhos que estudam a dependência de N (norma, proporcional ao número de átomos) em função do potencial químico, porém trabalhos que exploram G ou g como nós estamos fazendo são poucos. Entretanto, um completo estudo precisa observar o comportamento das famílias de gap sólitons criados por cada potencial químico.

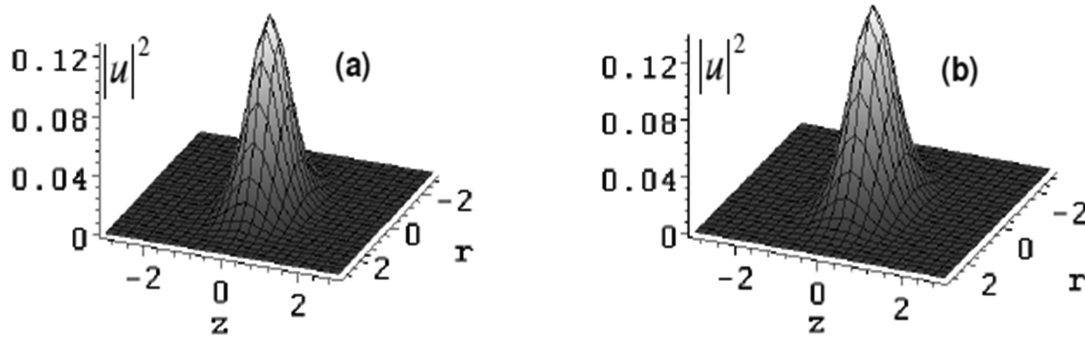


Figura 2 - Um exemplo de um único pico estável para gap sóliton na forma gaussiana para a Eq. (8) pertencente a primeira banda de gap do espectro na Fig. 1. (a) bósons: $G_{3D} = 5$ com $\mu = 0.35$; (b) férmion: $g_{3D} = 5$ com $\mu = 0.81$. Nesta figura nós consideramos $r^2 = x^2 + y^2$.

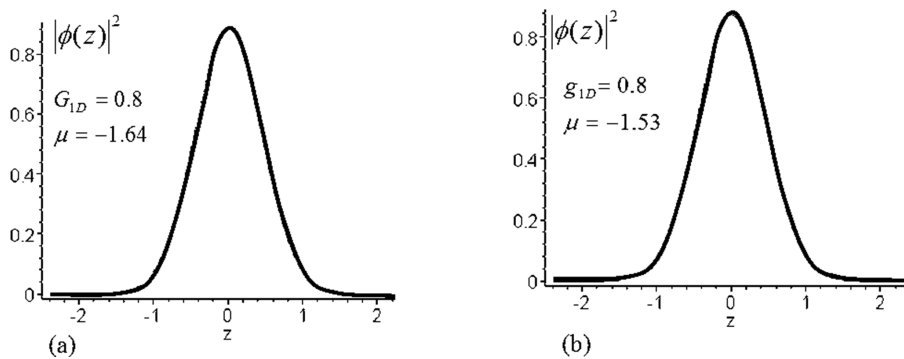


Figura 3 - Formas típicas de gap sólitons fundamentais para um gás de férmions ou bósons em 1D. Exemplo de um pico estável para gap sóliton na forma gaussiana para a Eq. (24) pertencente a primeira banda de gap do espectro da Fig. 1. (a) bósons: $G_{1D} = 0.8$ e potencial químico $\mu_B = -1.64$; (b) férmion: $g_{1D} = 0.8$ e potencial químico $\mu_F = -1.53$.

5. Conclusão

Em resumo nós mostramos que a aproximação variacional é adequada para descrever e prever famílias de gap sólitons fundamentais obtidas a partir de tais configurações de potencial de aprisionamento transversal em 2D e rede óptica em 1D. Nesta configuração nossos resultados são semelhantes ao artigo [15]. Como observado na Ref. [15] no caso para 1D a aproximação variacional formalmente prediz que famílias de gap sólitons ultrapassam as bandas de Bloch, o mesmo comportamento foi averiguada em nossos resultados em 3D e 1D.

Em três dimensões ou em uma dimensão sistemas físicos podem ser estudados mediante aproximações. Entretanto, um potencial deve ser introduzido na equação hidrodinâmica de campo médio para a formação de estados ligados serem possíveis. O mesmo procedimento pode ser realizado experimentalmente, porem é necessário a introdução de tais potenciais de confinamentos. Em nossas análises obtidas pela aproximação variacional nós detectamos a existência de gap sóliton nas duas bandas de gap, entretanto, a análise variacional também prevê a existência de uma segunda banda ou terceira banda. Desta forma, nós sugerimos que gap sóliton podem ser obtidos e estudados em laboratórios utilizando átomos de ${}^6\text{Li}$ (férmion) ou ${}^{87}\text{Rb}$ (bóson), para isso é necessário considerar a geometria do potencial de aprisionamento externo em 2D e o potencial da rede óptica em 1D.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer a Fundect/CNPq chamada 01/2008 (23/200.018/2009) pelo suporte financeiro, e ao Prof. Dr. Sadhan K. Adhikari (IFT/UNESP) pelas sugestões.

Referências

[1] M. Greiner, *Ultracold Quantum Gases in Three-Dimensional Lattice Potentials*. PhD Thesis, Ludwig-Maximilians-Universität Mäuenchen (2003).

[2] D. Jaksch, V. Venturi, J.I. Cirac, C.J. Williams and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 040402 (2002); M.P.A. Fisher, P.B. Weichman, G. Grinstein and D.S. Fisher, *Phys. Rev. B.* **40**, 546570 (1989); M. Grainer, O. Mandel and I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002).

[3] B.P. Anderson and M.A. Kasevich, *Science* **282**, 1686 (1998).

[4] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L.D. Carr, Y. Castin and C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002).

[5] K.E. Strecker, G.B. Partridge, A.G. Truscott and R.G. Hulet, *Nature* **417**, 150 (2002).

[6] S.L. Cornish, S.T. Thompson and C.E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 170401 (2006).

[7] M. Greiner, C.A. Regal and D.S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2003); M.W. Zwierleinn, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).

[8] B.B. Baizakov, B.A. Malomed and M. Salerno, *Phys. Rev. E.* **74**, 066615 (2006).

[9] B.A. Malomed, *Soliton Management in Periodic Systems* (Springer Science + Busines Media, New York, 2006); C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).

[10] A. Gammal, T. Frederico and L. Tomio, *Phys. Rev. A* **64**, 055602 (2002); A. Gammal, L. Tomio and T. Frederico, *Phys. Rev. A* **66**, 043619 (2002).

[11] E.A. Ostrovskaya and Y.S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 160407 (2003); P.J.Y. Lous, E.A. Ostrovskaya, C.M. Savage and Y.S. Kivshar, *Phys. Rev. A.* **67**, 013602 (2003); E.A. Ostrovskaya, T.J. Alexander and Y.S. Kivshar, *Phys. Rev. A.* **74**, 023605 (2006).

[12] S.K. Adhikari and B.A. Malomed, *Europhys. Lett.* **79**, 50003 (2007).

[13] K.M. Hillgssoe, M.K. Oberthaler and K.P. Marzlin, *Phys. Rev. A.* **66**, 063605 (2002).

[14] S.K. Adhikari and B.A. Malomed, *Europhys. Lett.* **79**, 50003 (2007).

[15] S.K. Adhikari and B.A. Malomed, *Physica D.* **238**, 1402-1412 (2009).