

Osciladores harmônicos amortecidos dependentes do tempo

(Time-dependent damped harmonic oscillators)

V. Aguiar¹, I. Guedes^{1,2}

¹Departamento de Física, Universidade Federal de Ceará, Campus do Pici, Fortaleza, CE, Brasil

²Seara da Ciência, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil

Recebido em 5/3/2013; Aceito em 14/4/2013; Publicado em 20/12/2013

Neste trabalho analisamos as soluções para a equação de movimento para os osciladores de Lane-Emden, onde a massa é dada por $m(t) = m_0 t^\alpha$, com $\alpha > 0$. Os osciladores de Lane-Emden são osciladores harmônicos amortecidos, onde o fator de amortecimento depende do tempo, $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$. Obtivemos as expressões analíticas de $x(t)$, $\dot{x}(t) = v(t)$, e $p(t) = m(t)\dot{x}$ para $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Discutimos as diferenças entre as expressões da hamiltoniana e da energia para sistemas dependentes do tempo. Também, comparamos nossos resultados com aqueles do oscilador de Caldirola-Kanai.

Palavras-chave: osciladores amortecidos, método de Frobenius, equação de movimento.

In this work we analyze the solutions of the equations of motions of Lane-Emden oscillators, which are associated with a mass $m(t) = m_0 t^\alpha$, $\alpha > 0$. These systems are damped harmonic oscillators with a time-dependent damping coefficient, $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$. We obtain analytical expression for $x(t)$, $\dot{x}(t) = v(t)$, e $p(t) = m(t)\dot{x}$ for $\alpha = 2$ and $\alpha = 4$. We discuss the differences between the expressions for the Hamiltonian and the mechanical energy for time-dependent systems. We also compared our findings with the results for the well-known Caldirola-Kanai oscillators.

Keywords: damped oscillators, Frobenius' method, equation of motion.

1. Introdução

Dentre todos os sistemas físicos caracterizados por algum tipo de oscilação, o oscilador harmônico simples (OHS) é, sem dúvida, o caso mais estudado, pois em primeira aproximação, considerando pequenas amplitudes de oscilação, todo sistema oscilatório pode ser aproximado por um OHS, o qual, segundo evidências históricas, é estudado desde o século XVIII [1]. Provavelmente, o físico e matemático suíço Leonhard Euler foi o primeiro cientista a estudar o OHS, quando resolveu a equação diferencial de movimento, utilizando um método numérico conhecido como Método das Quadraturas, em um trabalho estritamente matemático. Após os estudos puramente matemáticos de Euler, o OHS se tornou um dos maiores objetos de estudo dos pontos de vista físico e matemático, embora saibamos que todo sistema físico real tem dissipação (sistemas não conservativos), como por exemplo, o oscilador harmônico amortecido (OHA).

A equação de movimento de uma partícula clássica de massa m_0 movendo-se em uma dimensão com momento $p = m_0 \dot{x}$ sob a influência de uma força conservativa $-\frac{\partial V}{\partial x}$ é dada por

$$\dot{p} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

No caso do potencial harmônico $V = \frac{1}{2} kx^2$, obtemos a seguinte equação do movimento para o OHS

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$$

onde $\omega_0^2 = \frac{k}{m_0}$ é a frequência angular característica do sistema. A Eq. (2) é a equação de movimento para o oscilador harmônico simples, um dos modelos mais utilizados para descrever vários fenômenos em diversas áreas da física.

Essa mesma equação de movimento pode ser obtida através da formulação hamiltoniana da mecânica clássica. A hamiltoniana para o oscilador harmônico é dada por

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{1}{2} kx^2, \quad (3)$$

e representa a energia do sistema. Podemos mostrar que

¹E-mail: vanderley.junior.ufc@gmail.com.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0, \quad (4)$$

indicando que o sistema é conservativo. Entretanto, na prática sempre existe dissipação de energia.

Para incluirmos a dissipação em nosso sistema procedemos da seguinte forma. Considere novamente o movimento de uma partícula clássica de massa m_0 movendo-se em uma dimensão com momento $p = m_0\dot{x}$ sobre a influência não apenas de uma força conservativa $-\frac{\partial V}{\partial x}$ mas, também, de uma força de atrito, $F_{at} = -\gamma m_0\dot{x}$ onde γ é o parâmetro de amortecimento. Assim, a equação de movimento e a taxa de variação temporal de $E(t)$ para o OHA são agora dadas, respectivamente, por

$$\dot{p} + \gamma p + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dE}{dt} = -m_0\gamma\dot{x}. \quad (6)$$

A Eq. (6) indica que a taxa instantânea de dissipação da energia mecânica do oscilador é igual ao produto da força de atrito pela velocidade.

Entretanto, no presente caso a Eq. (5) não pode ser obtida através de uma função hamiltoniana, $H(x, p) = T(p) + W(x, p)$, onde $T(p)$ é a energia cinética e $W(x, p)$ é a energia potencial dependente de x e p . Isto porque a força de atrito, $F_{at} = -\gamma m_0\dot{x}$, não pode ser derivada da expressão $F = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \right)$ [2].

Mas, será que não existe alguma maneira de escrevermos uma função hamiltoniana que forneça, mediante a aplicação das equações de Hamilton, a equação de movimento dada pela Eq. (5)?

A resposta foi dada por Bateman [3] ao considerar a seguinte função lagrangiana dependente do tempo

$$L(x, \dot{x}, t) = e^{\gamma t} \left[\frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - V(x) \right]. \quad (7)$$

A partir desta função lagrangiana, Caldirola [4] e Kanai [5] construíram a seguinte função hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m_0} e^{-\gamma t} + V e^{\gamma t}, \quad (8)$$

onde, agora, $p = m_0 e^{\gamma t} \dot{x}$ é o momento canônico.

A Eq. (8) é chamada de hamiltoniana de Caldirola-Kanai, que nada mais é que a hamiltoniana de um oscilador harmônico com frequência constante, ω_0 , e massa crescente exponencialmente com o tempo, $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$. A aplicação das equações de Hamilton leva a equação de movimento dada pela Eq. (5). A dissipação surge naturalmente devido a variação temporal de $m(t)$.

Para que a Eq. (6) seja satisfeita, definimos a energia mecânica do sistema como [6]

$$E = H e^{-\gamma t}. \quad (9)$$

A hamiltoniana de Caldirola-Kanai também tem sido estudada no contexto da Mecânica Quântica como um modelo alternativo na descrição de sistemas dissipativos. Embora ainda haja uma grande controvérsia se a hamiltoniana de Caldirola-Kanai de fato descreve um sistema dissipativo ou apenas um sistema de massa variável, vários artigos têm utilizado este modelo. Por exemplo, na Ref. [7] os autores obtiveram a solução da equação de Schrödinger para um oscilador de Caldirola-Kanai com e sem a presença de um potencial singular, enquanto que os osciladores de Caldirola-Kanai forçados e invertidos foram investigados nas Refs. [8] e [9], respectivamente.

Recentemente, Özeren [10] estudou uma nova classe de osciladores amortecidos, os chamados osciladores de Lane-Emden. Para esta classe de osciladores a massa varia como uma lei de potências, ou seja, $m(t) = t^\alpha$, onde α é um parâmetro positivo, $\alpha > 0$. Özeren resolveu a equação de movimento e determinou a expressão para a energia em função do tempo para os casos $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Ele observou que em ambos os casos, a energia tende a um valor constante para tempos assintóticos.

Em 2012, Bessa e Guedes [11] utilizaram o método de Lewis e Riesenfeld [12] para calcular a função de onda exata para os osciladores de Lane-Emden para os casos $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Eles também obtiveram a expressão para a energia média e calcularam a probabilidade de transição entre estados e a relação de incerteza para estes dois osciladores.

Neste trabalho, revisitamos os osciladores de Lane-Emden investigados previamente por Özeren. Além das soluções das equações de movimento, calculamos como evoluem no tempo a velocidade, o momento canônico e os respectivos diagramas de fase. Mostramos que a energia tende a zero para tempos assintóticos, e não para um valor constante como anteriormente determinado por Özeren [10]. Comparamos os resultados para $\alpha = 2$ com aqueles obtidos a partir do modelo de Caldirola-Kanai. Na próxima seção discutiremos três modelos de OHA, a saber: (i) o OHA com massa constante, (ii) o OHA de Caldirola-Kanai, ou simplesmente oscilador CK, e (iii) o oscilador de Lane-Emden, ou oscilador LE.

2. Resultados e discussões

De acordo com textos básicos de física geral [13], a equação de movimento de uma partícula clássica de massa m_0 movendo-se em uma dimensão com momento $p = m_0\dot{x}$ sob a influência não apenas de uma força conservativa, $-kx$, mas, também, de uma força de atrito, $F_{at} = -\gamma m_0\dot{x}$, é dada por

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{10}$$

onde γ é o parâmetro de amortecimento e $\omega_0^2 = k/m$. Sabemos ainda que dependendo dos valores de γ e ω_0 , a Eq. (10) tem três soluções distintas que correspondem aos seguintes casos de amortecimento: (i) subcrítico ($\frac{\gamma}{2} < \omega_0$); (ii) supercrítico ($\frac{\gamma}{2} > \omega_0$); e (iii) crítico ($\frac{\gamma}{2} = \omega_0$). Neste texto consideraremos apenas o amortecimento subcrítico, pois é o único que fornece uma solução que oscila com amplitude decrescente.

A solução geral da Eq. (10) para o caso (i) é dada por

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega} \right) \text{sen}(\omega t) \right], \tag{11}$$

onde $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$. Nas Figs.1(a)-(c) mostramos o comportamento de $x(t)$, $\dot{x}(t) = v(t)$, e $p(t) = m_0 \dot{x}$. Observamos, como esperado, que $x(t)$ oscila com amplitude decrescente e vai a zero para tempos assintóticos. Comportamentos similares são observados para $\dot{x}(t)$ e $p(t)$. Estes são os comportamentos típicos para o oscilador harmônico com amortecimento subcrítico. Consideramos, assim como Özeren [10], $x_0 = 1$ e $v_0 = 0$, e ainda o sistema de unidades no qual $\gamma = 2$, $m_0 = 1$ e $\omega_0 = 8$.

Na Fig. 2, mostramos o diagrama de fase $x(t)$ vs. $p(t)$. A figura aberta indica que o sistema é dissipativo, e claramente vemos que para tempos assintóticos tanto $x(t)$ quanto $p(t)$ vão a zero.

De uma maneira geral a hamiltoniana de um oscilador harmônico em uma dimensão com massa, $m(t)$, e frequência, $\omega(t)$, dependentes do tempo é dada por

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)x^2, \tag{12}$$

onde $p = m(t)\dot{x}$ é o momento canônico. Utilizando as equações de Hamilton obtemos a seguinte equação do movimento

$$\ddot{x} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{x} + \omega^2(t)x = 0. \tag{13}$$

Para o oscilador de Caldirola-Kanai, $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega(t) = \omega_0$ e, por conseguinte, a equação do movimento é idêntica à Eq. (10). Embora as expressões para $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ sejam exatamente a mesma que para o caso anterior, a expressão para $p(t)$ será diferente, visto que agora $m = m(t)$. Nas Figs. 3(a)-(c) mostramos o comportamento de $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $p(t) = m_0 \dot{x}$. Novamente consideramos $x_0 = 1$, $v_0 = 0$, $\gamma = 2$, $m_0 = 1$ e $\omega_0 = 8$.

Observamos que tanto $x(t)$ quanto $\dot{x}(t)$ oscilam com amplitude decrescente e tendem a zero para tempos assintóticos. Estes comportamentos são similares aos observados anteriormente para o caso do OH subcriticamente amortecido. Entretanto, observamos que $p(t)$

aumenta com o passar do tempo, devido ao crescimento exponencial da massa. Devido a isto, o diagrama de fase $x(t)$ vs. $p(t)$, mostrado na Fig. 4, é diferente daquele mostrado na Fig. 2. Note que, à medida que $x(t)$ diminui, $p(t)$ aumenta. Mas, como veremos, é a energia e não a hamiltoniana que vai a zero para tempos assintóticos como esperado para sistemas dissipativos. Assim, o diagrama de fase para sistemas cujo hamiltoniano depende do tempo deve ser $x(t)$ vs. $\dot{x}(t)$, e, neste caso idêntico à Fig. 2.

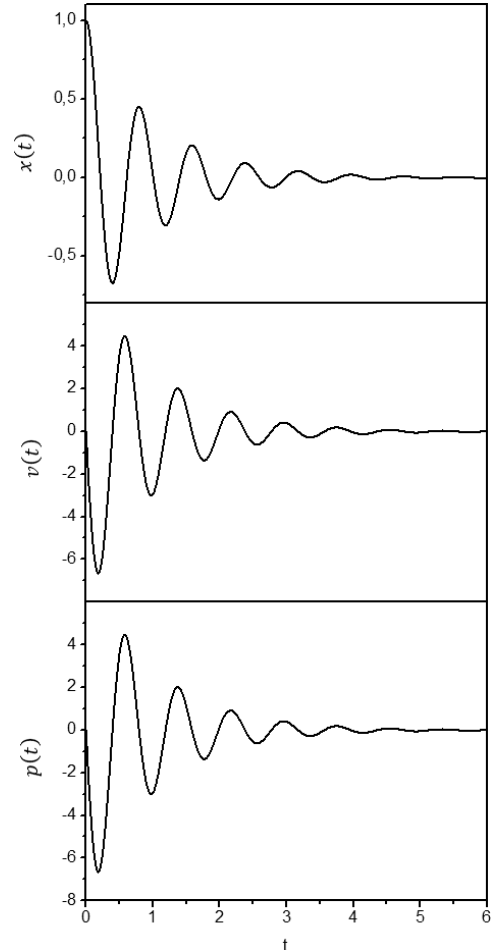


Figura 1 - (a) Variação no tempo da posição $x(t)$, (b) da velocidade ($\dot{x}(t) = v(t)$), e (c) do momento $p(t)$, que neste caso é idêntico ao comportamento de $v(t)$ pois consideramos $m_0 = 1$.

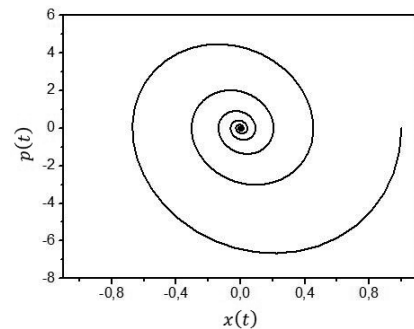


Figura 2 - Diagrama de fase de um OH com amortecimento subcrítico.

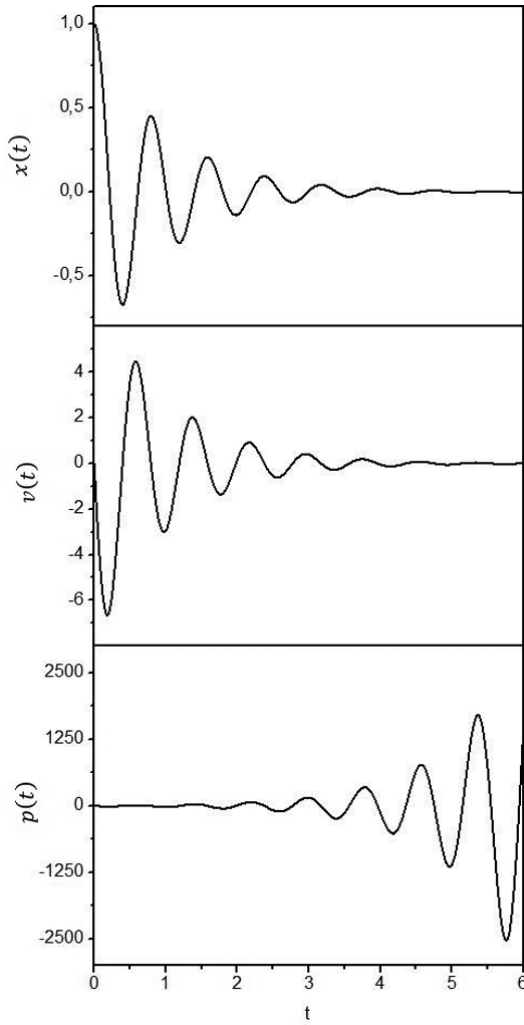


Figura 3 - (a) Variação no tempo da posição $x(t)$, (b) da velocidade ($\dot{x}(t) = v(t)$), e (c) do momento $p(t)$ para o oscilador CK.

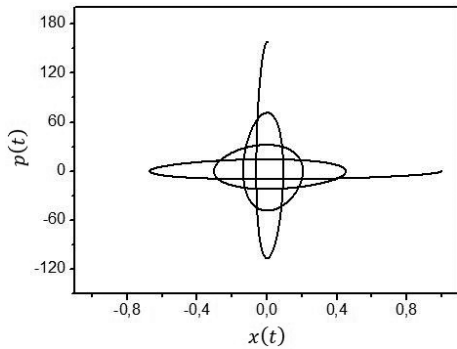


Figura 4 - Diagrama de fase $x(t)$ vs. $p(t)$ para o oscilador CK.

Para o oscilador de Lande-Emden, $m(t) = t^\alpha$ e $\omega(t) = \omega_0$, e a equação de movimento é dada por

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{t}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (14)$$

que pode ser entendida como a equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido, onde o

parâmetro de amortecimento $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$ agora depende do tempo. Nesse caso em particular, $\gamma(t)$ diminui à medida que t aumenta.

A Eq. (14) com $\omega_0^2 = 1$ é a equação diferencial de Lane-Emden de primeira espécie utilizada em diversos problemas de física matemática e astrofísica, tais como a estrutura de matéria escura e distribuições de estrelas que variam de acordo com leis de potência [14]. Como a Eq. (14) é uma equação diferencial de segunda ordem com um polo simples removível em $t = 0$, podemos resolvê-la usando o método de soluções por série de potências (Método de Frobenius) [15].

Para $\alpha = 2$ a Eq. (14) torna-se

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (15)$$

Supondo que $x(t)$ é dado por

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s}, \quad (16)$$

calculando as expressões para $\frac{dx(t)}{dt}$ e $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ e substituindo-as juntamente com a Eq. (16) na Eq. (15), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n [(n+s)(n+s-1) + 2(n+s)] t^{n+s-2} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s} = 0. \quad (17)$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s} = \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2}$, a Eq. (17) pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+s)(n+s+1) t^{n+s-2} + \omega_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2} = 0. \quad (18)$$

Considerando os dois primeiros termos do primeiro somatório, obtemos

$$C_0 s(s+1) t^{s-2} + C_1 (s+1)(s+2) t^{s-1} + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n (n+s)(n+s+1) + \omega_0^2 C_{n-2}] t^{n+s-2} = 0. \quad (19)$$

Agora, para que a identidade seja estabelecida é necessário que todos os coeficientes de potências diferentes de t sejam zero, assim, escolhendo $C_0 \neq 0$, temos

$$s(s+1) = 0, \quad (20)$$

que é a equação indicial, aquela que fornece os possíveis valores de s para Eq. (16). Da Eq. (20) encontramos $s_1 = 0$ e $s_2 = -1$. Para $s = s_1 = 0$, o segundo termo da Eq. (19) só será zero se $C_1 = 0$, e para todos os outros valores possíveis de n , a última condição a ser satisfeita é expressa por

$$C_n = -\frac{\omega_0^2 C_{n-2}}{n(n+1)}, \quad (21)$$

que é uma fórmula de recorrência.

Agora, utilizando as Eqs. (16) e (21), obtemos

$$x(t) = \frac{C_0}{\omega_0 t} \left[\omega_0 t - \frac{\omega_0^3 t^3}{3!} + \frac{\omega_0^5 t^5}{5!} - \dots \right] = C_0 \frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t}. \quad (22)$$

Para $s = s_2 = -1$, o coeficiente C_1 não precisa ser necessariamente zero, e a nova fórmula de recorrência será

$$C'_n = -\frac{\omega_0^2 C'_{n-2}}{n(n-1)}. \quad (23)$$

Utilizando as Eq. (16) e (23), temos

$$x_2(t) = \frac{C'_0}{t} \left[1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2!} + \frac{\omega_0^4 t^4}{4!} - \dots \right] + \frac{C'_1}{\omega_0 t} \left[\omega_0 t - \frac{\omega_0^3 t^3}{3!} + \frac{\omega_0^5 t^5}{5!} - \dots \right]. \quad (24)$$

Como a Eq. (24) possui duas constantes arbitrárias, ela será a solução geral da equação para $x(t)$. Neste caso, $x_1(t)$ é uma solução particular de $x_2(t)$. Sabendo que os termos entre colchetes são, respectivamente, as séries de Taylor das funções cosseno e seno em torno de $t = 0$, temos que

$$x(t) = \frac{C'_0}{t} \cos(\omega_0 t) + \frac{C'_1}{\omega_0 t} \text{sen}(\omega_0 t). \quad (25)$$

Utilizando as mesmas condições iniciais usadas por Özeren [10], a Eq. (25) torna-se

$$x(t) = \frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t}. \quad (26)$$

A velocidade $\dot{x}(t)$ e o momento canônico $p(t)$ são dados, respectivamente, por

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega_0 t \cos(\omega_0 t) - \text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t^2}, \quad (27)$$

$$p(t) = \frac{\omega_0 t \cos(\omega_0 t) - \text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0}. \quad (28)$$

Nas Figs. 5 (a)-(c) mostramos, respectivamente, o comportamento de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $p(t) = m(t)\dot{x}$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$. Observamos novamente que tanto $x(t)$ quanto $\dot{x}(t)$ oscilam com amplitude decrescente, enquanto $p(t)$ oscila com amplitude crescente. Observe que a amplitude tanto de $x(t)$ quanto de $\dot{x}(t)$ decai de forma mais lenta em comparação aos seus valores no oscilador CK. Isto se deve ao fato que, para o oscilador LE, o termo de amortecimento diminui à medida que o tempo passa. Na Fig. 6 mostramos o diagrama de fase $x(t)$ vs. $\dot{x}(t)$ para o oscilador CK para $\alpha = 2$. Nestas figuras consideramos mais uma vez $\omega_0 = 8$.

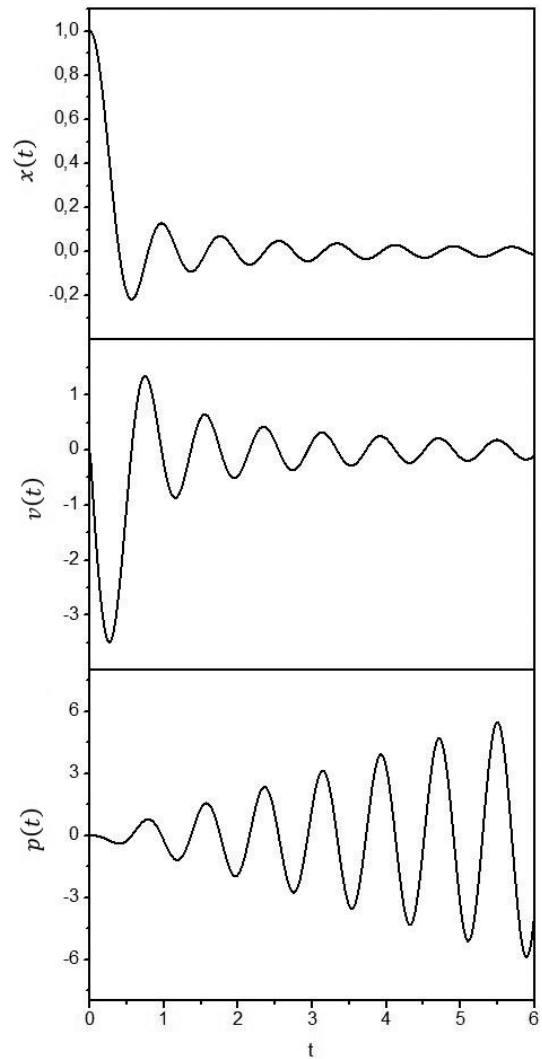


Figura 5 - (a) Variação no tempo da posição $x(t)$, (b) da velocidade ($\dot{x}(t) = v(t)$), e (c) do momento $p(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$.

Comparando as Figs. (6) e (2), observamos que para instantes de tempo iniciais ($0 < t < 1$) uma partícula no oscilador LE com $\alpha = 2$ é mais amortecida que no

oscilador CK devido ao fato que para tempos iniciais, o parâmetro de amortecimento $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t} > 2$. À medida que t aumenta, $\gamma(t)$ diminui fazendo com que a dissipação diminua. Mas, como é um sistema dissipativo, tanto $x(t)$ quanto de $\dot{x}(t)$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$.

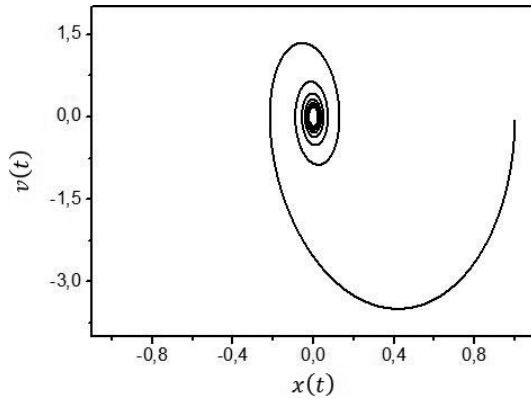


Figura 6 - Diagrama de fase $x(t)$ vs. $\dot{x}(t)$ para o oscilador LE para $\alpha = 2$.

A seguir, vamos comparar os osciladores LE para $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Primeiro, vamos achar a solução da Eq. (14) para $\alpha = 4$, a saber

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4}{t} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (29)$$

Utilizando a Eq. (16) e a relação $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s} = \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n [(n+s)(n+s-1) + 4(n+s)] t^{n+s-2} + \omega_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2} = 0. \quad (30)$$

Novamente, somando os dois primeiros termos do primeiro somatório temos

$$C_0 s(s+3) t^{s-2} + C_1 (s+1)(s+4) t^{s-1} + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n (n+s)(n+s+3) + \omega_0^2 C_{n-2}] t^{n+s-2} = 0. \quad (31)$$

A equação indicial é agora $s(s+3) = 0$, que implica $s_1 = 0$ ou $s_2 = -3$. Para $s = s_1 = 0$, temos $C_1 = 0$, e a relação de recorrência é dada por

$$C_n = -\frac{\omega_0^2 C_{n-2}}{n(n+3)}. \quad (32)$$

Das Eq. (16) e (32), temos

$$x_1(t) = C_0 \left[1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2 \cdot 5} + \frac{\omega_0^4 t^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{\omega_0^6 t^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \right]. \quad (33)$$

Da identidade

$$\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) = \frac{\omega_0^2 t^2}{3} \left[1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2 \cdot 5} + \frac{\omega_0^4 t^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \dots \right], \quad (34)$$

obtemos a seguinte expressão para $x_1(t)$

$$x_1(t) = \frac{3}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) \right]. \quad (35)$$

Para $s = s_2 = -3$, temos $C_1 = 0$, e a relação de recorrência escreve-se

$$C_n = -\frac{\omega_0^2 C_{n-2}}{n(n-3)}. \quad (36)$$

Utilizando as Eqs. (16) e (36) obtemos

$$x_2(t) = C'_0 \left[\frac{1}{t^3} + \frac{\omega_0^2}{2 \cdot t} - \frac{\omega_0^4 t}{2 \cdot 4} + \dots \right], \quad (37)$$

e, utilizando a identidade

$$\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} = \frac{t^2}{\omega_0} \left[\frac{1}{t^3} + \frac{\omega_0^2}{2 \cdot t} - \frac{\omega_0^4 t}{2 \cdot 4} + \dots \right], \quad (38)$$

finalmente encontramos

$$x_2(t) = C'_0 \frac{\omega_0}{t^2} \left[\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} \right]. \quad (39)$$

Assim, a solução geral da Eq. (29) será dada por uma combinação linear das Eqs. (35) e (39), a saber

$$x(t) = \frac{3A_0}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) \right] + \frac{\omega_0 B_0}{t^2} \left[\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} \right]. \quad (40)$$

Utilizando as condições iniciais usadas por Özeren [10] a Eq. (40) torna-se

$$x(t) = \frac{3}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos[\omega_0 t] \right]. \quad (41)$$

A velocidade $\dot{x}(t)$ e o momento canônico $p(t)$ são dados, respectivamente, por

$$\dot{x}(t) = \frac{3(\omega_0^2 t^2 - 3)\text{sen}(\omega_0 t) + 9\omega_0 t \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^3 t^4}, \quad (42)$$

$$p(t) = \frac{3(\omega_0^2 t^2 - 3)\text{sen}(\omega_0 t) + 9\omega_0 t \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^3}. \quad (43)$$

Nas Figs. 7 (a)-(c) mostramos o comportamento de $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $p(t) = m(t)\dot{x}$ para o oscilador LE com $\alpha = 4$. Observamos novamente que tanto $x(t)$ quanto $\dot{x}(t)$ oscilam com amplitude decrescente, enquanto $p(t)$ oscila com amplitude crescente. Observe que a amplitude tanto de $x(t)$ quanto de $\dot{x}(t)$ decai de forma mais rápida em comparação aos seus valores no oscilador LE para $\alpha = 2$. Isto se deve ao fato que para o oscilador LE com $\alpha = 4$, o termo de amortecimento é maior que aquele no caso $\alpha = 2$. Isto fica claro na Fig. 8 onde mostramos o diagrama de fase $x(t)$ vs. $\dot{x}(t)$. Nestas figuras consideramos mais uma vez $\omega_0 = 8$.

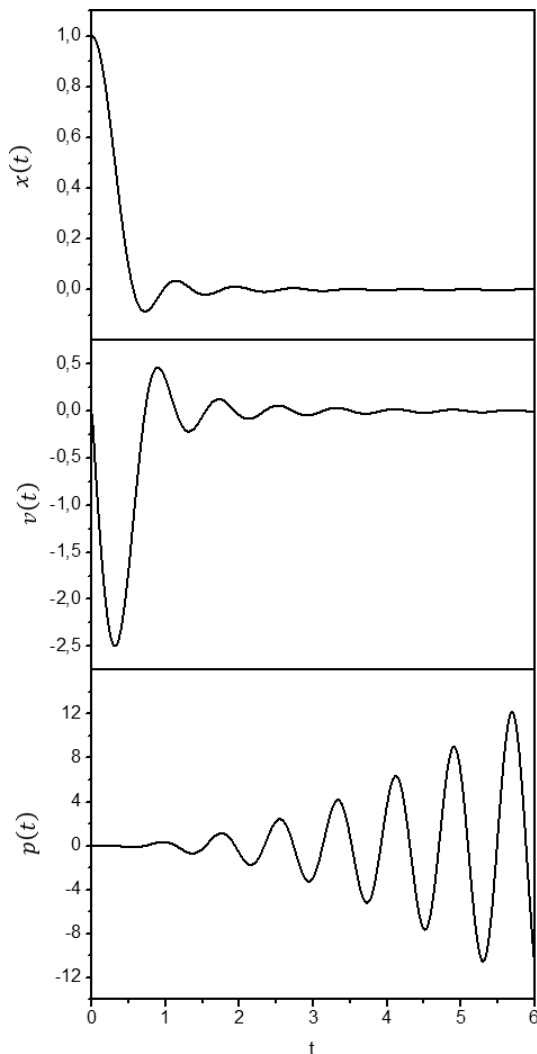


Figura 7 - (a) Variação no tempo da posição $x(t)$, (b) da velocidade ($\dot{x}(t) = v(t)$), e (c) do momento $p(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$.

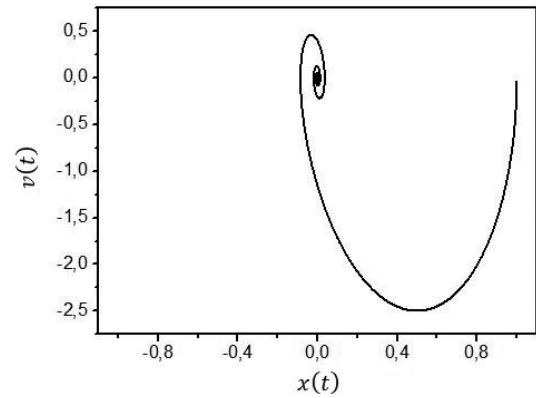


Figura 8 - Diagrama de fase $x(t)$ vs. $\dot{x}(t)$ para o oscilador LE para $\alpha = 4$.

Por fim, vamos discutir como variam a energia ($E(t)$) e a hamiltoniana ($H(t)$) em cada caso. Como vimos na Seção 1, da lagrangiana de Bateman dada pela Eq. (7), Caldirola [4] e Kanai [5] construíram a função hamiltoniana dada pela Eq. (9). Generalizando o resultado de Caldirola e Kanai não é difícil mostrar que se $m(t) = m_0 f(t)$, então a energia é dada por

$$E = f(t)^{-1} H. \quad (44)$$

Para o oscilador harmônico criticamente amortecido ($m = m_0$), $f(t) = 1$ e a hamiltoniana é igual à energia do sistema (veja Eq. (45)) que oscila e vai a zero para tempos assintóticos, como mostrado na Fig. 9.

$$E(t) = \frac{m_0 \omega_0^2}{2\omega^2} e^{-\gamma t} \left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \text{sen}^2(\omega t) + \omega^2 \cos^2(\omega t) + \frac{\gamma\omega}{2} \text{sen}(2\omega t) \right]. \quad (45)$$

Já para o oscilador CK, $f(t) = e^{\gamma t}$ e a hamiltoniana não mais é igual à energia do sistema que é dada pela Eq. (45). Observamos da Fig. (10) que a hamiltoniana oscila em torno de um valor médio.

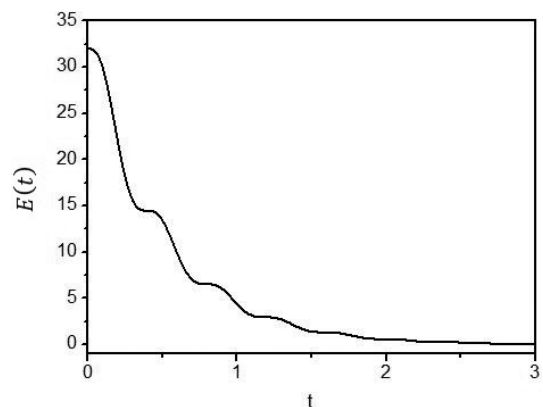


Figura 9 - Comportamento de $E(t)$ para o oscilador harmônico criticamente amortecido.

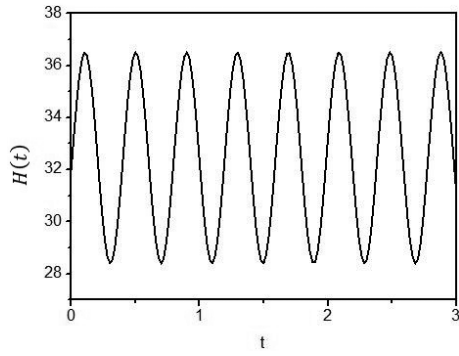


Figura 10 - Comportamento de $H(t)$ para o oscilador CK.

Isto demonstra o fato que em sistemas com massa dependentes do tempo (dissipativos) as expressões para a hamiltoniana e a energia são diferentes. A expressão para $E(t)$ é a energia mecânica do sistema, que não se conserva.

Para o oscilador LE com $\alpha = 2$, $f(t) = t^2$ as expressões para a energia e a hamiltoniana do sistema são, respectivamente, dadas por

$$E(t) = \frac{1}{2t^2} \left[1 - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0 t} + \frac{\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^2 t^2} \right], \quad (46)$$

$$H(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0 t} + \frac{\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^2 t^2} \right], \quad (47)$$

cujos comportamentos são mostrados na Fig. 11.

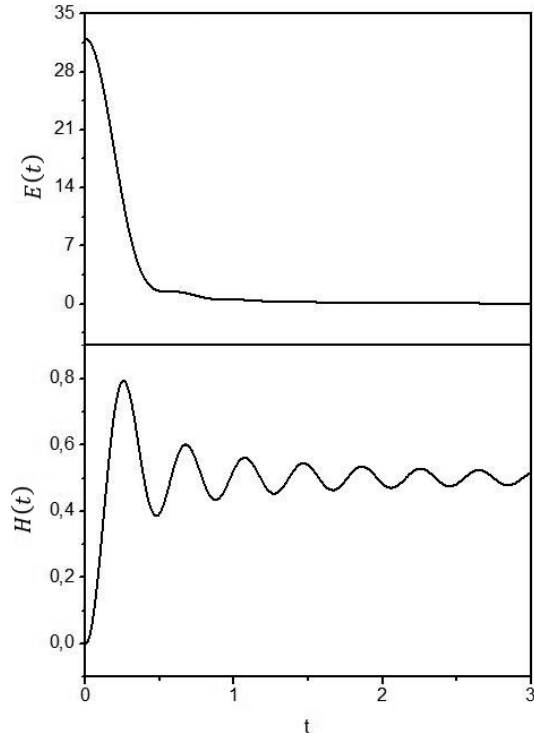


Figura 11 - Comportamento de $E(t)$ e $H(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$.

De acordo com Özeren [10], $E(t) \rightarrow 0.5$ quando $t \rightarrow \infty$. Entretanto, observamos que $E(t) \rightarrow 0$ e $H(t) \rightarrow 0.5$ quando $t \rightarrow \infty$. O equívoco cometido por Özeren foi considerar que para sistemas dependentes do tempo, as expressões para a energia e a hamiltoniana do sistema são iguais.

De maneira análoga, para $\alpha = 4$, temos $f(t) = t^4$, e $E(t)$ e $H(t)$ são, respectivamente, dadas por

$$E(t) = \frac{9}{2t^4} \left[\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{6\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} + \frac{3\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{9\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^6 t^4} + \frac{81}{\omega_0^6 t^4} + \frac{\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^3 t} \right], \quad (48)$$

$$H(t) = \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{6\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} + \frac{3\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{9\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^6 t^4} + \frac{81}{\omega_0^6 t^4} + \frac{\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^3 t} \right], \quad (49)$$

cujos comportamentos são mostrados na Fig. 12.

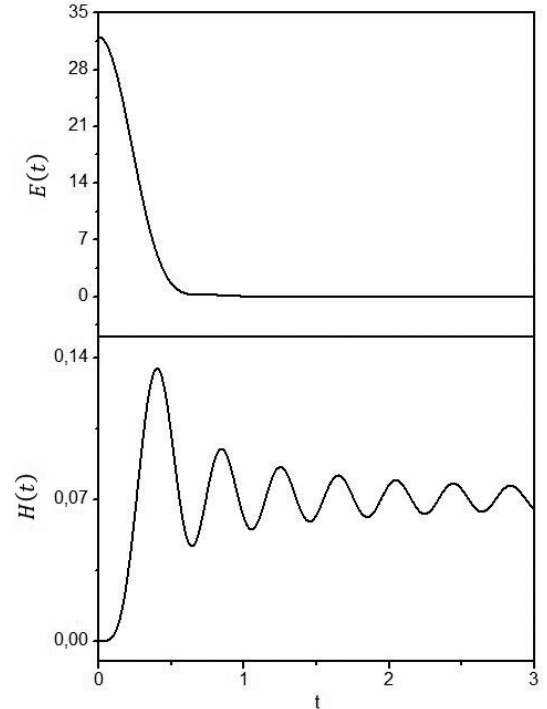


Figura 12 - Comportamento de $E(t)$ e $H(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 4$.

3. Conclusões

Neste trabalho estudamos a solução da equação de movimento do oscilador de Lane-Emden, onde $m(t) = m_0 t^\alpha$ e $\omega = \omega_0$. A equação de movimento para este oscilador é dada pela Eq. (14), que pode ser entendida como a equação de movimento para um oscilador harmônico amortecido, com parâmetro de amortecimento dependente do tempo, $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$.

Começamos por analisar solução para a equação de movimento de um oscilador harmônico com amortecimento subcrítico. Mostramos a variação com o tempo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $p(t) = m_0\dot{x}$, além do diagrama de fase $x(t)$ vs. $p(t)$. Depois, mostramos que a equação de movimento para um oscilador harmônico com $m = m(t)$ e $\omega = \omega_0$, é análoga a Eq. (14) com $\gamma(t) = \frac{\dot{m}}{m}$. Observamos que a dissipação surge naturalmente devido ao fato da massa variar com o tempo. Encontramos a solução da equação de movimento para o oscilador de Caldirola-Kanai, onde $m(t) = m_0e^{\gamma t}$ e $\omega = \omega_0$. Mostramos a variação com o tempo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $p(t) = m(t)\dot{x}$. Notamos que o momento canônico é dado agora por $p(t) = m(t)\dot{x}$. Isto faz com que $p(t)$ aumente com o tempo. Mas, o sistema é dissipativo, e, como observado tanto $x(t)$ quanto $\dot{x}(t)$ tendem a zero para tempos assintóticos. Neste caso, é melhor observarmos o diagrama de fase $x(t)$ vs. $\dot{x}(t)$.

Para encontrarmos a solução da equação de movimento para o oscilador de Lane-Endem utilizamos o método de Frobenius para solução por séries de equações diferenciais. Analisamos o comportamento de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $p(t) = m(t)\dot{x}$ para $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Ao compararmos os resultados do oscilador de Lane-Endem com $\alpha = 2$ com o oscilador de Caldirola-Kanai para $\gamma = 2$, observamos para tempos assintóticos que o primeiro é menos amortecido, uma vez que o parâmetro de dissipação diminui à medida que o tempo aumenta.

Por fim, discutimos a diferença que ocorre entre as definições de hamiltoniana e energia mecânica para sistemas dependentes do tempo. A relação entre elas é dada pela Eq. (44). Para sistemas independentes do tempo, a hamiltoniana é igual à energia mecânica do sistema. Nos outros casos, osciladores de Lane-Endem e Caldirola-Kanai, elas são diferentes. Enquanto a energia tende a zero para tempos assintóticos como deve ocorrer em sistemas dissipativos, a hamiltoniana tende a valores constantes diferentes de zero, não tendo assim nenhuma relação com a energia do sistema. Estes

resultados explicam os equívocos cometidos por Özeren [10] na análise da variação da energia mostrado em seu trabalho.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] J.M. Bassalo e M.S.D. Cattani, *Osciladores Harmônicos Clássicos Quânticos* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009), 1ª ed.
- [2] H.Goldstein, Poole, C. Poole e J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, San Francisco, 2001), 3ª ed.
- [3] H. Bateman, Phys. Rev. **38**, 815 (1931).
- [4] P. Caldirola, Nuovo Cimento **18**, 393 (1941).
- [5] E. Kanai, Progress os Theoretical Physics **3**, 440 (1948).
- [6] R.W. Hasse, J. Math. Phys.**16**, 2005 (1975).
- [7] I.A. Pedrosa, G.P. Serra e I. Guedes, Phys. Rev. A **56**, 4300 (1997).
- [8] J.R. Choi, Pramana **61**, 7 (2003).
- [9] I.A. Pedrosa e I. Guedes, Mod. Phys. Lett.B **16**, 637 (2002).
- [10] S.F. Özeren, J. of Math. Phys.**50**, 012902 (2009).
- [11] V.H.L. Bessa e I. Guedes, J. Math. Phys.**53**, 122104 (2012).
- [12] H.R. Lewis, Jr. e W.B. Reisenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [13] H. Moysés Nussenzweig, *Curso de Física Básica*, vol. 2 (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2002), 4ª ed.
- [14] J.A.S. Lima and R.E. de Souza, PhysicaA **350**, 303 (2005); E. Morroniat and C. Harley, New Astron. **11**, 479 (2006).
- [15] E. Butkov, *Física Matemática* (Editora LTC, Rio de Janeiro, 1988), 1ª ed.