

Soluções clássicas de sistemas acoplados dependentes do tempo

(Classical solutions of time-dependent coupled systems)

Augusto P.C.M. Lima¹, Diego X. Macedo², Ilde Guedes^{1,3}

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Campus do PICI, Fortaleza, CE, Brasil

²Departamento de Ensino, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará,
Campus Crateús, Crateús, CE, Brasil

³Seara da Ciência, Universidade Federal do Ceará, Campus do PICI, Fortaleza, CE, Brasil

Recebido em 8/8/2013; Aceito em 7/11/2013; Publicado em 11/5/2014

Neste trabalho estudamos um sistema clássico de dois osciladores harmônicos acoplados com massas (m_i), constantes de mola (k_i) e parâmetro de acoplamento (κ) dependentes do tempo. Para encontrar as soluções das equações de movimento de cada oscilador, usamos uma transformação canônica para reescrever a hamiltoniana do sistema acoplado como a soma das hamiltonianas de dois osciladores harmônicos desacoplados com frequências modificadas e massas unitárias. Analisamos o comportamento de x_i , $v_i = \dot{x}_i$ e do diagrama de fase x_i vs. v_i para o sistema $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$ e $k_1 = k_2 = \kappa = k_0 e^{\gamma t}$.

Palavras-chave: osciladores acoplados, transformação canônica.

In this work we study a coupled system of two classical oscillators with time-dependent masses (m_i), spring constants (k_i) and coupling parameter (κ). To obtain the solution of the equation of motion for each oscillator, we use a canonical transformation to rewrite the Hamiltonian of the coupled system as the sum of the hamiltonians of two uncoupled harmonic oscillators with modified frequencies and unitary masses. We analyze the behavior of x_i , $v_i = \dot{x}_i$ and the phase diagram x_i vs. v_i for the system $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$ and $k_1 = k_2 = \kappa = k_0 e^{\gamma t}$.

Keywords: coupled oscillators, canonical transformation.

1. Introdução

Nos cursos básicos de física estudamos o sistema simples de dois osciladores harmônicos acoplados, constituído de dois osciladores harmônicos idênticos (mesma massa (m) e constante de mola (k)) ligados por uma mola de constante de mola κ . A hamiltoniana para este sistema é

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2, \quad (1)$$

onde x_i ($i = 1, 2$) é o deslocamento da i -ésima partícula em relação à posição de equilíbrio, e p_i seu momento. As equações de movimento para x_1 e x_2 são dadas, respectivamente, por

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \kappa(x_2 - x_1), \quad (2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - \kappa(x_2 - x_1), \quad (3)$$

cujas soluções são dadas por

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (4)$$

$$x_2(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (5)$$

onde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{\kappa}{m}}$ e $\omega_2 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ são as frequências de oscilação, e $A_{1,2}$ e $\varphi_{1,2}$ são constantes arbitrárias de que necessitamos para o ajuste às condições iniciais. Observe que as expressões para x_1 e x_2 correspondem a superposição de oscilações com frequências $\omega_{1,2}$ diferentes. Entretanto, se definirmos duas novas coordenadas, q_1 e q_2 , como combinações lineares de x_1 e x_2 , na forma

$$q_1 = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, \quad (6)$$

$$q_2 = \frac{(x_1 - x_2)}{2}, \quad (7)$$

podemos escrever as equações de movimento como

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0, \quad (9)$$

que são duas equações desacopladas de osciladores harmônicos simples com as seguintes soluções gerais

²E-mail: diegoximenes@fisica.ufc.br.

$$q_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (10)$$

$$q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (11)$$

que correspondem a movimentos harmônicos simples. As coordenadas q_1 e q_2 são denominadas de coordenadas normais de vibração, associadas, respectivamente, ao deslocamento do centro de massa e ao deslocamento relativo entre as duas partículas (deformação da mola).

A decomposição da dinâmica de osciladores acoplados em termos de uma superposição de modos normais, que nada mais são do que modos normais de osciladores harmônicos simples, é um dos principais resultados da física de osciladores acoplados. Esta decomposição independe do número de osciladores acoplados.

Modos normais são importantes para o entendimento do comportamento dinâmico de sistemas constituídos de osciladores que vibram com baixa amplitude, cuja dinâmica pode ser reduzida a uma superposição de osciladores harmônicos simples. Isto ocorre, por exemplo, em física da matéria condensada, onde propriedades relevantes de sólidos podem ser investigadas a partir do estudo da dinâmica dos átomos que oscilam em torno de suas posições de equilíbrio na rede cristalina. Isto também ocorre em química e biologia, onde a dinâmica dos átomos que constituem as moléculas pode ser tratada teoricamente como a dinâmica de um conjunto de osciladores acoplados.

O uso de modos normais de vibração para o entendimento e controle de fenômenos em ciência e tecnologia vai além do caso de conjuntos finitos de osciladores acoplados. Considerando um número infinito de osciladores é possível estudar meios contínuos como cordas, membranas, e meios elásticos que aparecem em diversas áreas da física.

Ao escrevermos a hamiltoniana (1) consideramos que m , k e κ são constantes. Mas, será que existem problemas em física que para serem estudados teoricamente devemos considerar que m , k e κ sejam funções do tempo?

A resposta é sim. Em 2001, Zhang *et al* [1] calcularam as incertezas quânticas de um circuito elétrico mesoscópico constituído de dois circuitos RLC (R = resistência, L = indutância, C = capacitância) acoplados por um capacitor. Devido à resistência R , a hamiltoniana que descreve o sistema torna-se dependente do tempo. Os autores utilizaram o método de Lewis e Riesenfeld [2] de invariantes dinâmicos e uma transformação unitária para obter a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo. Eles calcularam a relação de incerteza entre a carga e a corrente e mostraram que esta não satisfaz o princípio de mínima incerteza mesmo no caso em que $R = 0$.

O modelo de osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo também foi utilizado no estudo da dinâmica de uma partícula carregada em campos

magnéticos que variam com o tempo. Recentemente, Menouar *et al* [3,4] calcularam a função de onda de dois sistemas que descrevem o movimento de uma partícula em um campo magnético variável. Na Ref. [3] os autores consideraram o termo de acoplamento estático, xy , enquanto na Ref. [4] eles consideraram o termo de acoplamento dinâmico, $p_x p_y$. As soluções encontradas pelos autores foram expressas em termos de uma variável que satisfaz a equação de Milne-Pinney [5,6].

Na Ref. [7], Macedo e Guedes resolveram a equação de Milne-Pinney para três diferentes conjuntos de osciladores acoplados dependentes do tempo. Eles consideraram apenas a presença do termo de acoplamento estático na ausência de campo magnético, para calcular as funções de onda e obter as relações de incerteza.

Neste trabalho estudamos o sistema clássico de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Para encontrarmos a equação de movimento de cada oscilador, utilizamos transformações canônicas para desacoplar o sistema e escrevê-lo como a soma das hamiltonianas de dois osciladores harmônicos simples desacoplados. Na próxima seção apresentamos o procedimento usado para desacoplarmos um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Na Seção 3 resolveremos as equações de movimento para o sistema $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$, $k_1 = k_2 = \kappa = k_0 e^{\gamma t}$ e discutiremos o comportamento de x_i , v_i e do diagrama de fase x_i , *vs.* v_i . Na Seção 4 apresentamos um sumário de nossos resultados.

2. Formalismo

Para descrever o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo, vamos considerar a seguinte hamiltoniana

$$H(x_1, x_2, t) = \frac{p_{1x}^2}{2m_1(t)} + \frac{p_{2x}^2}{2m_2(t)} + \frac{m_1^2(t)\omega_1^2(t)x_1^2}{2} + \frac{m_2^2(t)\omega_2^2(t)x_2^2}{2} + \frac{\kappa(t)(x_2 - x_1)^2}{2}, \quad (12)$$

onde $m_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ e κ são funções dependentes do tempo.

Para escrever a Eq. (12) como a soma de dois osciladores harmônicos (desacoplados) dependentes do tempo, consideremos inicialmente a seguinte transformação de coordenada e momento

$$q_1 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{(1/4)} x_1, \quad (13)$$

$$q_2 = \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{(1/4)} x_2, \quad (14)$$

$$p_1 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{(1/4)} p_{1x}, \quad (15)$$

$$p_2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{(1/4)} p_{2x}, \quad (16)$$

de maneira que a Eq. (12) é reescrita na forma

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m(t)} + \frac{b_1(t)q_1^2 + b_2(t)q_2^2 + b_3(t)q_1q_2}{2}, \quad (17)$$

onde

$$m(t) = (m_1 m_2)^{(1/2)}, \quad (18)$$

$$b_1(t) = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{(1/2)} (m_1 \omega_1^2 + \kappa), \quad (19)$$

$$b_2(t) = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{(1/2)} (m_2 \omega_2^2 + \kappa), \quad (20)$$

$$b_3(t) = -2\kappa. \quad (21)$$

Podemos eliminar o termo $q_1 q_2$ que aparece na Eq. (17), se considerarmos uma transformação canônica dependente do tempo, cuja função geratriz é dada por

$$\Phi(q_1, q_2, P_1, P_2, t) = \sqrt{m} q_1 (P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta) + \sqrt{m} q_2 (-P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta) - \frac{\dot{m}}{4} (q_1^2 + q_2^2). \quad (22)$$

Da Eq. (22) obtemos as novas variáveis canônicas [8]

$$p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} = \sqrt{m} (P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta) - \dot{m} \quad (23)$$

$$p_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} = \sqrt{m} (-P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta) - \dot{m} \quad (24)$$

$$Q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = \sqrt{m} (q_1 \cos \theta - q_2 \sin \theta), \quad (25)$$

$$Q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial P_2} = \sqrt{m} (q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta), \quad (26)$$

e, por conseguinte a nova hamiltoniana, $H_N = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H(t)$, passa a ser escrita como

$$H_N = \frac{P_1^2}{2} + \frac{\Omega_1^2(t) Q_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\Omega_2^2(t) Q_2^2}{2} + Q_1 Q_2 \left(\frac{\sin(2\theta)}{2m} (b_1 - b_2) + \frac{b_3}{2m} \cos(2\theta) \right) + \frac{\dot{\theta}}{2} (Q_1 P_2 - Q_2 P_1), \quad (27)$$

onde Ω_1^2 e Ω_2^2 são, respectivamente, dadas por

$$\Omega_1^2 = \frac{\dot{m}^2}{4m^2} - \frac{\ddot{m}}{2m} + \frac{b_1}{m} \cos^2(\theta) + \frac{b_2}{m} \sin^2(\theta) - \frac{b_3}{2m} \sin(2\theta), \quad (28)$$

$$\Omega_2^2 = \frac{\dot{m}^2}{4m^2} - \frac{\ddot{m}}{2m} + \frac{b_1}{m} \sin^2(\theta) + \frac{b_2}{m} \cos^2(\theta) + \frac{b_3}{2m} \sin(2\theta). \quad (29)$$

A completa separação de variáveis da Eq. (27) ocorre para $\dot{\theta}$ e

$$\tan(2\theta) = \frac{b_3}{b_2 - b_1} = \text{constante}. \quad (30)$$

A Eq. (30) impõe um vínculo sobre os possíveis valores de $m_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ e κ a serem utilizados para que soluções analíticas sejam possíveis. Com estas restrições, a Eq. (27) finalmente escreve-se

$$H_N = \frac{P_1^2}{2} + \frac{\Omega_1^2(t) Q_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\Omega_2^2(t) Q_2^2}{2}, \quad (31)$$

que representa a hamiltoniana de dois osciladores harmônicos desacoplados com frequências dependentes do tempo e massas unitárias. Das equações de Hamilton [8], obtemos

$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} + \Omega_1^2(t) Q_1 = 0, \quad (32)$$

e

$$\frac{d^2 Q_2}{dt^2} + \Omega_2^2(t) Q_2 = 0. \quad (33)$$

Usando as Eqs. (13), (14), (25) e (26), as expressões para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dadas por

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{m_1(t)}} [\cos(\theta) Q_1 + \sin(\theta) Q_2], \quad (34)$$

e

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{m_2(t)}} [-\sin(\theta) Q_1 + \cos(\theta) Q_2]. \quad (35)$$

Assim, uma vez especificado os valores de $m_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ e κ obtemos as soluções das equações de movimento utilizando as Eqs. (34) e (35), como veremos na próxima seção.

3. Exemplo de um sistema de osciladores acoplados dependentes do tempo

Para ilustrar o método desenvolvido na seção anterior, vamos considerar um sistema de osciladores acoplados com $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$ e $k_1 = k_2 = \kappa = k_0 e^{\gamma t}$. Neste caso, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}$. Para estes valores de m_i , k_i e κ , obtemos das Eqs. (18)-(21) que $b_1 = b_2 = -b_3 = k_0 e^{\gamma t}$, e consequentemente, da Eq. (30), $\theta = \pi/4$. Agora, das Eqs. (28) e (29) obtemos

$$\Omega_1^2 = 3\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}, \quad (36)$$

e

$$\Omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}, \quad (37)$$

que são independentes do tempo. Vamos considerar $\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$ de forma que Ω_1 e Ω_2 sejam maior do que zero. Com isso, as soluções das Eqs. (32) e (33) são, respectivamente, dadas por

$$Q_1(t) = A \cos(\Omega_1 t + \phi_1), \quad (38)$$

$$Q_2(t) = B \cos(\Omega_2 t + \phi_1), \quad (39)$$

onde A , B , ϕ_1 e ϕ_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais. As soluções para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são, respectivamente, dadas por

$$x_1(t) = e^{-\gamma t/2} [A \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\Omega_2 t + \phi_1)], \quad (40)$$

$$x_2(t) = e^{-\gamma t/2} [-A \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\Omega_2 t + \phi_2)]. \quad (41)$$

Derivando as expressões acima obtemos as expressões para as velocidades $\dot{x}_1(t)$ e $\dot{x}_2(t)$, a saber

$$\dot{x}_1(t) = -e^{-\gamma t/2} [\Omega_1 A \sin(\Omega_1 t + \phi_1) + \Omega_2 B \sin(\Omega_2 t + \phi_2)] - \frac{\gamma}{2} x_1, \quad (42)$$

$$\dot{x}_2(t) = e^{-\gamma t/2} [\Omega_1 A \sin(\Omega_1 t + \phi_1) - \Omega_2 B \sin(\Omega_2 t + \phi_2)] - \frac{\gamma}{2} x_2. \quad (43)$$

Note que para $\gamma = 0$, as Eqs. (40)-(43) correspondem às soluções obtidas para o sistema de osciladores acoplados independentes do tempo. Vamos examinar a situação em que os osciladores partem do repouso, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, mas somente um deles é deslocado da posição de equilíbrio, $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$. Assim as expressões para as posições e as velocidades para os osciladores independentes do tempo são expressas por

$$x_1(t) = \left[\frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t) \right], \quad (44)$$

$$x_2(t) = \left[-\frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t) \right], \quad (45)$$

$$\dot{x}_1(t) = - \left[\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2} \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) + \frac{\omega_0}{2} \sin(\omega_0 t) \right], \quad (46)$$

$$\dot{x}_2(t) = \left[\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2} \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{2} \sin(\omega_0 t) \right]. \quad (47)$$

Nas Figs. 1(a)-(c) e 2(a)-(c), mostramos os gráficos da posição, velocidade e do diagrama de fase para os osciladores independentes do tempo 1 e 2, respectivamente. Como havíamos mencionado na seção 1, os gráficos para $x_{1,2}$ e $\dot{x}_{1,2}$ correspondem à superposição de oscilações com frequências diferentes. Observe que as amplitudes de oscilação $x_{1,2}$ não vão a zero quando $t \rightarrow \infty$ e variam de forma não periódica.

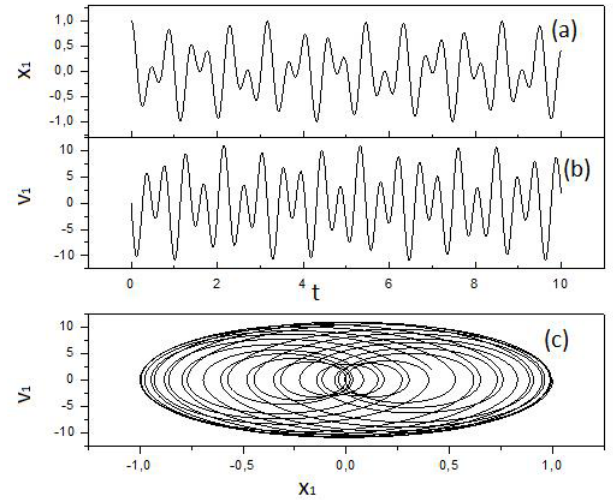


Figura 1 - (a)-(c). (a) Variação no tempo da posição x , (b) da velocidade v e (c) diagrama de fase x vs. v para o oscilador independente do tempo 1. Nesta figura utilizamos o sistema de unidades no qual $\omega_0 = 8$ e $\gamma = 1$.

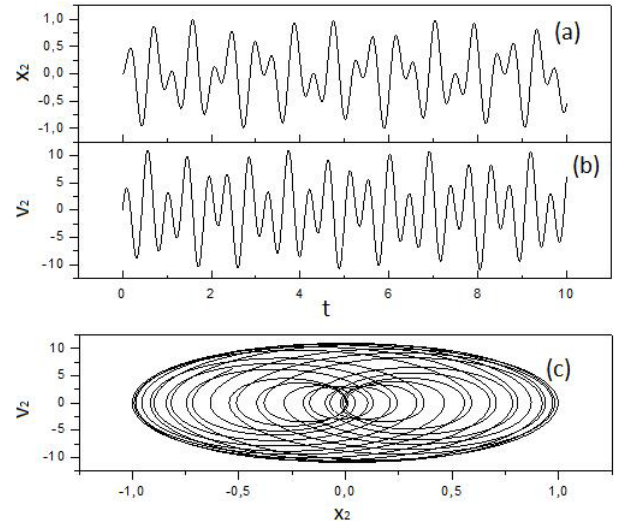


Figura 2 - (a)-(c). (a) Variação no tempo da posição x , (b) da velocidade v e (c) diagrama de fase x vs. v para o oscilador independente do tempo 2. Nesta figura utilizamos o sistema de unidades no qual $\omega_0 = 8$ e $\gamma = 1$.

Utilizando as mesmas condições iniciais, temos que as expressões para a posição e velocidade dos dois osciladores dependentes do tempo são expressas por

$$x_1(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_1 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}\omega_0} \right) \right] + \frac{\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_2 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_2}{\omega_0} \right) \right] \right\}, \quad (48)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ -\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_1 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}\omega_0} \right) \right] + \frac{\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_2 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_2}{\omega_0} \right) \right] \right\}, \quad (49)$$

$$-\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_1 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}\omega_0} \right) \right] + \frac{\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_2 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_2}{\omega_0} \right) \right] \right\}, \quad (50)$$

$$\dot{x}_2(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2} \sin \left[(\Omega_1 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}\omega_0} \right) \right] - \frac{\omega_0}{2} \sin \left[(\Omega_2 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_2}{\omega_0} \right) \right] \right\} - \frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ -\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_1 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{3}\omega_0} \right) \right] + \frac{\omega_0}{2\Omega_1} \cos \left[(\Omega_2 t) - \cos^{-1} \left(\frac{\Omega_2}{\omega_0} \right) \right] \right\}. \quad (51)$$

Nas Figs. 3(a)-(c) e 4(a)-(c), mostramos os gráficos da posição, velocidade e do diagrama de fase para os osciladores dependentes do tempo 1 e 2, respectivamente. Observe que as oscilações de $x_{1,2}$ além de variarem de forma não-periódicas como no caso anterior, elas são amortecidas, ou seja, as amplitudes de oscilação vão à zero quando $t \rightarrow \infty$. A questão é: o quê provoca este amortecimento já que não consideramos nenhuma força de atrito?

Para entender o que causa o amortecimento em nosso sistema, considere o movimento de uma partícula clássica de massa m_0 movendo-se em uma dimensão com momento $p = m_0 \dot{x}$ sobre a influência de uma força conservativa, $f(x) = -kx$. A equação do movimento para este sistema (oscilador harmônico simples (OHS)) escreve-se

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (52)$$

onde $\omega_0^2 = \frac{k}{m_0}$ é a frequência angular característica do sistema. Esta mesma equação de movimento pode ser obtida através da formulação hamiltoniana da mecânica clássica. A hamiltoniana para o OHS é dada por

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{1}{2} kx^2, \quad (53)$$

e representa a energia do sistema. Podemos mostrar que

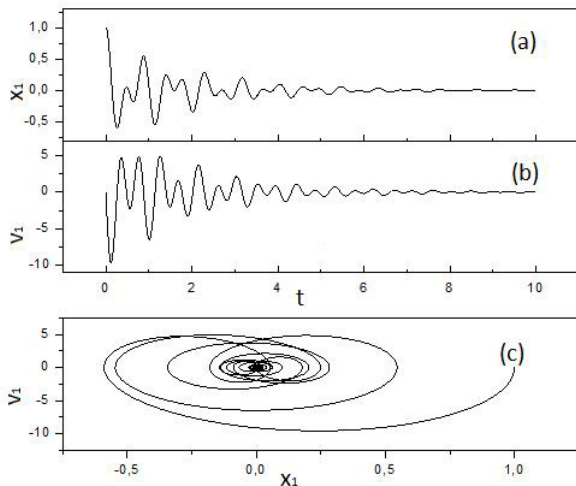


Figura 3 - (a)-(c). (a) Variação no tempo da posição x , (b) da velocidade v e (c) diagrama de fase x vs. v para o oscilador dependente do tempo 1. Nesta figura utilizamos o sistema de unidades no qual $\omega_0 = 8$ e $\gamma = 1$.

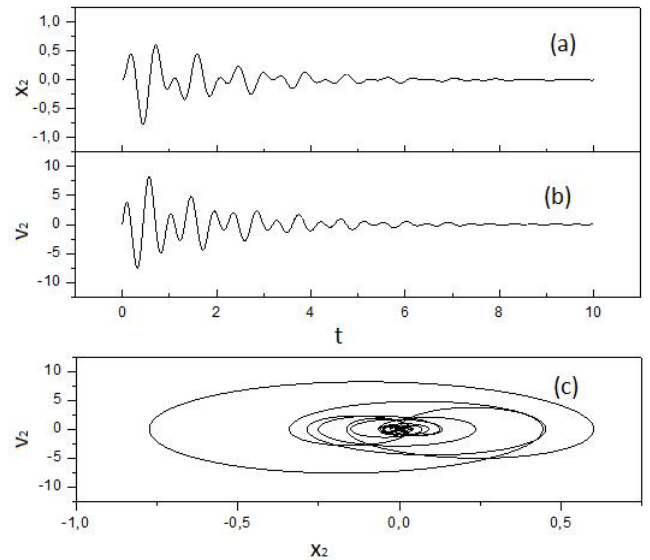


Figura 4 - (a)-(c). (a) Variação no tempo da posição x , (b) da velocidade v e (c) diagrama de fase x vs. v para o oscilador dependente do tempo 2. Nesta figura utilizamos o sistema de unidades no qual $\omega_0 = 8$ e $\gamma = 1$.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0, \quad (54)$$

indicando que o sistema é conservativo. Entretanto, na prática sempre existe dissipação de energia.

Para incluirmos a dissipação em nosso sistema procedemos da seguinte forma. Considere novamente o movimento de uma partícula clássica de massa m_0 movendo-se em uma dimensão com momento $p = m_0\dot{x}$ sobre a influência não apenas de uma força conservativa $f(x)$ mas, também, de uma força de atrito, $F_{at} = -\gamma m_0\dot{x}$, onde γ é o parâmetro de amortecimento. Assim, a equação de movimento e a taxa de variação temporal de $E(t)$ para o oscilador harmônico amortecido (OHA) são dadas, respectivamente, por

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x, \quad (55)$$

$$\frac{dE}{dt} = -m_0\gamma\dot{x}^2. \quad (56)$$

Dependendo dos valores de γ e ω_0 , a Eq. (55) tem três soluções distintas que correspondem aos seguintes casos de amortecimento: (i) subcrítico ($\frac{\gamma}{2} < \omega_0$); (ii) supercrítico ($\frac{\gamma}{2} > \omega_0$); e (iii) crítico ($\frac{\gamma}{2} = \omega_0$). Vamos considerar apenas o amortecimento subcrítico, pois é o único que fornece uma solução que oscila com amplitude decrescente.

A solução da Eq. (55) para o caso (i) sujeita as condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$, é expressa por

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi), \quad (57)$$

onde $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$, A e ϕ são duas constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais. A expressão para a energia mecânica ($E = T+V$) do sistema é dada por

$$E = \frac{1}{2}m_0A^2e^{-\gamma t} \left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{\gamma\omega}{2} \sin(2(\omega t + \phi)) \right], \quad (58)$$

que oscila com amplitude que decresce exponencialmente indo à zero para tempos assintóticos ($t \rightarrow \infty$).

Desta vez, entretanto, a Eq. (55) não pode ser obtida através de uma função hamiltoniana, $H(x, p) = T(p) + W(x, p)$, onde $T(p)$ é a energia cinética e $W(x, p)$ é a energia potencial dependente de x e p . Isto porque a força de atrito, $F_{at} = -\gamma m_0\dot{x}$, não pode ser derivada da expressão $F = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \right)$ [9].

Mas, será que não existe alguma maneira de escrevermos uma função hamiltoniana que forneça, mediante a aplicação das equações de Hamilton, a equação de movimento dada pela Eq.(55)? A resposta foi dada por

Bateman [10] ao considerar a seguinte função lagrangiana dependente do tempo

$$L(x, \dot{x}, p) = e^{\gamma t} \left[\frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 - V(x) \right]. \quad (59)$$

A partir desta função lagrangiana, Caldirola [11] e Kanai [12] construíram a seguinte função hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m_0}e^{-\gamma t} + Ve^{\gamma t}, \quad (60)$$

onde, agora, o momento canônico é dado pela expressão $p = m_0e^{\gamma t}\dot{x}$.

A Eq.(60) é chamada de hamiltoniana de Caldirola-Kanai, que nada mais é que a hamiltoniana de um oscilador harmônico com frequência constante, ω_0 , e massa dependente do tempo, $m(t) = m_0e^{\gamma t}$. Esta hamiltoniana foi introduzida na literatura com o intuito de descrever sistemas dissipativos utilizando a formulação hamiltoniana da mecânica clássica.

De uma forma geral, a hamiltoniana para um sistema com massa dependente do tempo e frequência constante, é dada por

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega_0^2x^2. \quad (61)$$

Utilizando as equações de Hamilton obtemos a seguinte equação do movimento

$$\ddot{x} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (62)$$

que é análoga a Eq. (55) ao identificarmos $\gamma = \frac{\dot{m}}{m}$. Em outras palavras, a variação temporal de m produz um amortecimento na amplitude de oscilação semelhante ao produzido pela força de atrito presente no OHA.

E a energia mecânica do sistema? A Eq. (58) representa a energia mecânica de um OHA com massa constante, enquanto a Eq. (61) representa a hamiltoniana de um OH com massa dependente do tempo. Poderíamos pensar que a Eq. (61) pudesse ser a energia do sistema. Mas, devemos lembrar que a hamiltoniana é a própria energia do sistema, se e somente se o sistema for conservativo, ou seja, se a hamiltoniana não depender explicitamente do tempo. Assim, qual a expressão para a energia do sistema descrito pela hamiltoniana de Caldirola-Kanai?

Substituindo os valores de x , \dot{x} e $m(t)$ na Eq. (60) obtemos

$$H = \frac{1}{2}m_0A^2 \left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{\gamma\omega}{2} \sin(2(\omega t + \phi)) \right], \quad (63)$$

que oscila com amplitude variável, mas que não vai à zero quando $t \rightarrow \infty$. Como a Eq. (56) deve permanecer

válida, vemos que para o oscilador de Caldirola-Kanai a relação entre a hamiltoniana e a energia mecânica total é expressa por [13]

$$E = He^{-\gamma t},$$

que nada mais é do que a Eq. (58).

No presente caso as massas também variam de acordo com $m = m_0 e^{\gamma t}$. O termo $e^{-\gamma t/2}$ que aparece nas Eqs. (48) e (49) advém das massas, e, portanto, tendo como base o que foi exposto acima, é a dependência temporal das massas que faz com que as oscilações de $x_{1,2}$ sejam amortecidas.

4. Conclusões

Neste trabalho estudamos as soluções clássicas para o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo. Para encontrá-las usamos uma transformação de escala e uma transformação canônica para desacoplar o hamiltoniano e escrevê-lo como a soma de hamiltonianas de osciladores harmônicos simples com frequências dependentes do tempo e massas unitárias. Para o sistema $m_1 = m_2 = m_0 e^{\gamma t}$ e $k_1 = k_2 = \kappa = k_0 e^{\gamma t}$ encontramos as soluções analíticas para a posição e a velocidade de cada oscilador. Analisamos o comportamento de x_i , v_i e do diagrama de fase x_i vs. v_i .

Observamos que o comportamento tanto de $x_1(t)$ quanto de $x_2(t)$ correspondem à superposição de dois osciladores harmônicos simples de diferentes frequências e com amplitude de oscilação decrescendo exponencialmente com o tempo. Este comportamento é análogo ao de um oscilador com amortecimento subcrítico. Explicamos que este amortecimento surge

pelo fato que as massas crescem exponencialmente no tempo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo auxílio financeiro (Fortaleza – CE).

Referências

- [1] S. Zhang, J.R. Choi, C.I. Um and K.H. Yeon, *Phys. Lett. A* **289**, 257 (2001).
- [2] H.R. Lewis, Jr. and W.B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [3] S. Menouar, M. Maamache and J.R. Choi, *Physica Scripta* **82**, 065004 (2010).
- [4] S. Menouar, M. Maamache and J.R. Choi, *Ann. Phys.* **325**, 1708 (2010).
- [5] W.E. Milne, *Phys. Rev.* **35**, 863 (1930).
- [6] E. Pinney, *Proc. of the American Math. Soc.* **1**, 681 (1950).
- [7] D.X. Macedo and I. Guedes, *J. Math. Phys.* **53**, 052101 (2012).
- [8] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007), 2ª ed.
- [9] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, New York, 2001), 3ª ed.
- [10] H. Bateman, *Phys. Rev.* **38**, 815 (1931).
- [11] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941).
- [12] E. Kanai, *Progress os Theoretical Physics* **3**, 440 (1948).
- [13] R.W. Hasse, *J. Math. Phys.* **16**, 2005 (1975).