

As forças de atrito e os freios ABS

(Frictional forces and ABS brakes)

L. Abeid¹, A.C. Tort²

¹Centro Federal de Educação Tecnológica, Nova Iguaçu, RJ, Brasil

²Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Recebido em 19/8/2013; Aceito em 19/9/2013; Publicado em 11/5/2014

Neste trabalho nós revisamos a dinâmica dos freios ABS e propomos um modo simples de discuti-la no ensino médio.

Palavras-chave: dinâmica, forças de atrito, freios ABS.

In the present article we review the dynamics of the ABS breaking system and discuss a simple way of introducing this topic at the high school level.

Keywords: dynamics, frictional forces, ABS brakes.

1. Introdução

Para entender a dinâmica da frenagem, precisamos estudar a interação entre os pneus do automóvel e a pista. O coeficiente de atrito, entre eles, depende da velocidade do veículo em relação ao solo, u , e da velocidade angular do pneu, ω , portanto escrevemos $\mu(u, \omega)$ [1]. Segundo Denny [1] μ não depende separadamente de u e ω , mas dos dois juntos. O coeficiente de atrito é uma função do coeficiente de deslizamento, s , dado por

$$s = \frac{u - w}{u}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (1)$$

onde $w = \omega R$, sendo R o raio efetivo da roda, ou seja é o raio do conjunto pneu e roda, a distância entre um ponto na superfície do pneu e seu eixo de rotação, como mostra a Fig. (1). Veja também o diagrama mostrado na Fig. 2.

Portanto quando as rodas rolam sem deslizar ($u = w$), $s = 0$, e quando as rodas estão travadas ($w = 0$) $s = 1$.

Entretanto, $\mu(s)$ é um função complicada, e este modelo só pode ser resolvido numericamente [2], o que está fora do nosso interesse. Contudo, de acordo com o modelo proposto por Denny [1], $\mu(s)$ atinge um valor máximo quando o valor de s está próximo de zero, e começa a cair, enquanto o valor de s se aproxima de 1. Ou seja, $\mu(s)$ tem seu valor máximo, aproximadamente, quando as rodas rolam sem deslizar ($s \approx 0$), e seu valor mínimo quando as rodas estão travadas ($s = 1$).

¹E-mail: tort@if.ufrj.br.

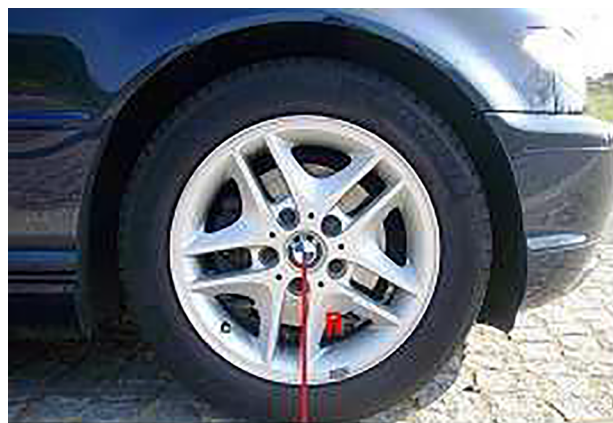


Figura 1 - Em vermelho na versão digital, vemos marcado o raio efetivo da roda, R (adaptado de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Pneu>).

Percebendo isso e procurando um modelo que pudesse ser discutido com universitários alunos de cursos de física introdutórios, Tavares [2] propôs fazer a aproximação para o modelo de atrito estático e cinético, tomando o para μ_e o valor máximo obtido para $\mu(s)$, e para μ_c o valor mínimo, uma vez que $\mu_e > \mu_c$. As distâncias de frenagem, com o uso de freios ABS, encontradas por ele usando este modelo simplificado são bastante próximas às encontradas usando o modelo mais complexo, o que mostra que a aproximação é válida [2].

Assim, partiremos deste modelo, descrevendo nas próximas seções a dinâmica da frenagem e, por fim, propondo um modelo para ser aplicado no Ensino Médio.

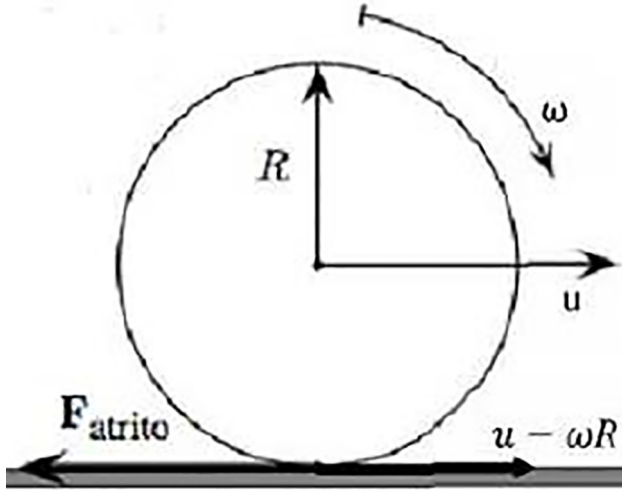


Figura 2 - a roda gira com velocidade angular ω , seu centro tem velocidade u e o ponto onde ela toca o solo tem velocidade $u - \omega R$.

2. A dinâmica da frenagem

Vamos analisar o movimento de um automóvel durante a frenagem. Por simplicidade vamos considerar o peso do veículo igualmente distribuído nas quatro rodas, dessa forma a força normal, N , é a mesma em todas elas. Também para simplificar vamos supor que o carro esteja se locomovendo apenas na direção horizontal, assim a soma de todas as forças que atuam no corpo na direção vertical é nula. Pela 2ª lei de Newton, para o movimento do centro de massa do carro, temos [2]

$$Ma = -nF_{at}, \quad (2)$$

onde M é a massa, e n é o número de rodas do veículo e a é a aceleração do centro de massa do veículo e F_{at} é a força de atrito em cada roda.

Apenas com essa equação podemos calcular a distância mínima necessária para parar o veículo, no entanto, como vamos analisar a influência dos freios ABS, que tem por finalidade impedir o travamento das rodas, é interessante resolvê-la em função da pressão que o motorista exerce no pedal do freio no momento da frenada.

Isto pode ser feito, olhando-se para as rodas do automóvel. De acordo com a dinâmica dos corpos rígidos vale a seguinte Eq. [3]

$$\tau_{ext} = I\alpha, \quad (3)$$

onde τ_{ext} é o torque das forças externas, I é o momento de inércia da roda e α é a sua aceleração angular.

Observando a Fig. (3) vemos que, em cada roda, devemos considerar o torque feito pela força de atrito entre os pneus e o solo e o torque feito pelo sistema de freio (G). Aplicando a Eq. (3) para cada roda obtemos [2]

$$I\alpha = -G + RF_{at}, \quad (4)$$

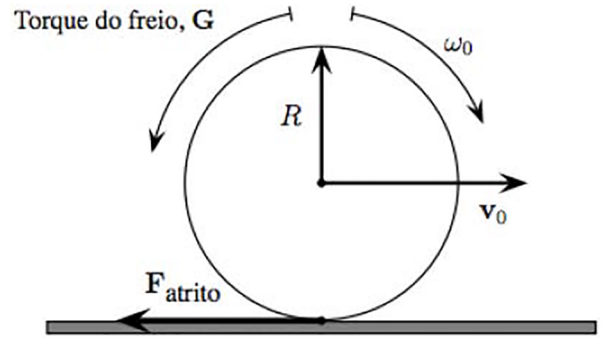


Figura 3 - roda do veículo que trafega com velocidade inicial v_0 , e velocidade angular inicial ω_0

onde G é o torque feito na roda pelo sistema de freio e está diretamente relacionado com a pressão que o motorista aplica no pedal do freio, R é o raio efetivo das rodas do automóvel, que, novamente por simplicidade, supomos sejam iguais em todas elas, dessa forma RF_{at} é o torque devido à força de atrito.

2.1. Rodas rolando sem deslizar

Primeiro vejamos a situação em que as rodas rolam sem deslizar. Neste caso o atrito entre elas e a pista é o atrito estático, e motorista deve controlar a pressão no freio, consequentemente controlando G , de tal forma que entre a e α valha a relação

$$a = \alpha R. \quad (5)$$

Como estamos interessados em calcular a distância de frenagem precisamos determinar a aceleração do automóvel, que deve obedecer à condição imposta pela Eq. (5). Substituindo F_{at} , obtido na Eq. (2), na Eq. (4), obtemos

$$I \frac{a}{R} = -G - \frac{RMa}{n}. \quad (6)$$

Neste momento é interessante definir duas grandezas adimensionais, o torque reduzido, Γ , e o momento de inércia reduzido, ν , dados por [2]

$$\Gamma \equiv \frac{GR}{Ig}, \quad (7)$$

$$\nu \equiv \frac{MR^2}{In}, \quad (8)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Como podemos observar por suas definições Γ está relacionado ao torque feito nas rodas pelo sistema de freio, e portanto é controlado pelo motorista, enquanto ν caracteriza o veículo.

Substituindo as Eqs. (7) e (8) na Eq. (6) temos

$$a = -g\Gamma - \nu a. \quad (9)$$

Finalmente rearranjando a Eq. (9) encontramos a aceleração do veículo como função de Γ e ν que se lê

$$a = -g \frac{\Gamma}{1 + \nu}. \quad (10)$$

A Eq. (10) mostra que a aceleração, e portanto a distância percorrida durante a frenagem, depende, por meio de Γ , da força que o motorista faz ao acionar os freios. Se o torque exercido na roda pelo sistema de freios, G , for constante, a aceleração, a , do veículo também o será e, segundo a equação de Torricelli a distância, d , necessária para parar o automóvel, que viaja com uma velocidade inicial v_0 é

$$d = \frac{v_0^2}{2|a|}. \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (10) na Eq. (11) obtemos a distância de frenagem, d_e , quando o atrito é o estático

$$d_e = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1 + \nu}{\Gamma}. \quad (12)$$

É preciso ressaltar que a Eq. (12) só vale quando as rodas rolam sem deslizar, portanto é interessante calcular o torque máximo que o sistema de freios pode exercer na roda sem travá-la. Vamos fazê-lo por meio do parâmetro Γ , ou seja, vejamos qual deve ser o seu valor máximo, a fim de que continue valendo a Eq. (5), o que deve acontecer quando a força de atrito tiver seu valor máximo.

Podemos determinar μ_e em função de Γ e ν . Como no modelo que estamos utilizando o peso está igualmente distribuído pelas quatro rodas, a força normal em cada uma é $\frac{Mg}{n}$, assim temos

$$F_{at} \leq \mu_e \frac{Mg}{n}. \quad (13)$$

A força de atrito em cada roda, F_{at} , é obtida substituindo a aceleração encontrada, Eq. (10), na Eq. (2)

$$F_{at} = \frac{Mg}{n} \frac{\Gamma}{1 + \nu}. \quad (14)$$

Substituindo a Eq. (14), na Eq. (13), obtemos

$$\mu_e \geq \frac{\Gamma}{1 + \nu}. \quad (15)$$

Como estamos interessados no valor máximo de Γ , no qual as rodas rolam sem deslizar, rearranjando a Eq. (15)

$$\Gamma_{cr} = \mu_e(1 + \nu), \quad (16)$$

onde Γ_{cr} é o Γ crítico, ou seja, é o valor máximo que ele pode assumir sem provocar o travamento das rodas.

Nessa situação a distância de frenagem será a menor possível, e pode ser calculada substituindo a Eq. (16) na Eq.(12). O resultado é

$$d_e = \frac{1}{\mu_e} \frac{v_0^2}{2g}. \quad (17)$$

Assim, se $\Gamma \leq \Gamma_{cr}$ as rodas rolam sem deslizar, atuando, portanto, o atrito estático, e se $\Gamma > \Gamma_{cr}$ ocorre o travamento das rodas, que passam a deslizar, e dessa forma o atrito passa a ser cinético.

2.2. Rodas rolando com deslizamento ou travadas

Agora vejamos a situação onde $\Gamma > \Gamma_c$. Neste caso $|a| < |\alpha|R$, sendo assim a roda começa a rolar com deslizamento, e trava antes do carro parar. O atrito é cinético, e a sua intensidade, que é constante, como o carro está se movendo horizontalmente, a intensidade da força normal em cada roda é dada pelo seu peso (Mg) dividido pelo número de rodas (n). Assim a força de atrito em cada roda é

$$F_{at} = \frac{\mu_c Mg}{n} \quad (18)$$

Substituindo a Eq. (18) na Eq. (2) podemos calcular a aceleração do veículo

$$a = -\mu_c g. \quad (19)$$

A distância de frenagem é obtida substituindo a Eq. (19) na Eq.(11)

$$d_c = \frac{1}{\mu_c} \frac{v_0^2}{2g}. \quad (20)$$

2.3. A transferência de peso

Nas seções anteriores, para simplificar, consideramos o peso igualmente distribuído nas quatro rodas, no entanto, de acordo com Whitmire e Alleman [4] durante a frenagem ocorre uma transferência de peso, da traseira para a frente do veículo, assim a força normal, que supomos iguais nas quatro rodas, seria maior nas dianteiras e menor nas traseiras.

Na seção (2.1.) calculamos o valor máximo que Γ poderia assumir sem provocar o travamento da rodas. No entanto é preciso ressaltar que esse cálculo foi feito sem levar em conta a transferência de peso, sendo assim se $\Gamma \leq \Gamma_c$ as quatro rodas rolam sem deslizar, e se $\Gamma > \Gamma_c$ elas começam a deslizar. Sendo a força normal nas rodas traseiras menor que nas dianteiras, pode acontecer das traseiras começarem a deslizar, enquanto as dianteiras permanecem rolando sem deslizar. Assim precisamos refazer alguns cálculos, para obter a distância mínima para frenagem com as quatro rodas rolando sem deslizar. Se F_D e F_T a força de atrito nas rodas dianteiras e traseiras, respectivamente, precisamos reescrever a Eq. (4), trocando F_{at} por F_D e F_T , obtendo

$$I_D \alpha_D = -G_D + R_D F_D, \quad (21)$$

$$I_T \alpha_T = -G_T + R_T F_T. \quad (22)$$

Se supusermos que as quatro rodas sejam idênticas, as acelerações angulares, α_D e α_T também devem ser iguais, e admitindo que o torque exercido pelo sistema de freios seja o mesmo em todas as rodas, ou seja $G_D = G_T$, podemos concluir que a força de atrito será a mesma em todas elas, $F_D = F_T$.

Assim a força de atrito máxima nas rodas, para que todas continuem rolando sem deslizar, seria a força de atrito máxima nas rodas traseiras, dada por $\mu_e N_T$, onde N_T é a força normal nas rodas traseiras. Para determiná-la vamos supor que o centro de massa do veículo seja equidistante dos eixos traseiros e dianteiros, e que sua altura seja a metade dessa distância, como na Fig. (4).

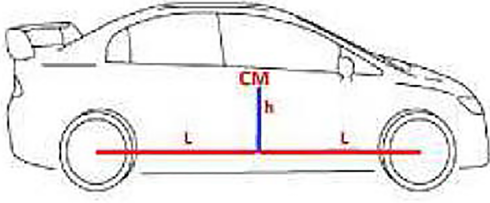


Figura 4 - A altura do centro de massa, h , é a metade da distância dos eixos até o centro de massa, L .

Essa suposição foi feita por Whitmire e Alleman [4], resultando que

$$N_T = \frac{Mg}{2(2 + \mu_e)}. \quad (23)$$

Dessa forma a força de atrito estático máxima nas rodas traseiras seria

$$F_{T(MAX)} = \frac{\mu_e}{2(2 + \mu_e)} Mg. \quad (24)$$

Assim, se $F_D = F_T = \frac{\mu_e}{2(2 + \mu_e)} Mg$, a força total nas quatro rodas será $\frac{2\mu_e}{2 + \mu_e} Mg$, e a força de atrito em cada uma

$$F_{at} = \frac{2\mu_e}{2 + \mu_e} \frac{Mg}{n}. \quad (25)$$

Substituindo o valor de F_{at} obtido na Eq. (25), na Eq. (2), podemos calcular a aceleração do automóvel, que será

$$a = \frac{-2\mu_e}{2 + \mu_e} g. \quad (26)$$

Agora podemos determinar a distância mínima para parar o veículo (d_{etrans}), com as quatro rodas rolando e levando-se em conta a transferência de peso. Substituindo a aceleração encontrada na Eq. (26), na equação de Torricelli, obtemos

$$d_{etrans} = \frac{2 + \mu_e}{2\mu_e} \frac{v_0^2}{2g}. \quad (27)$$

Vamos comparar essa distância d_{etrans} com a obtida sem levar em consideração a transferência de peso, d_e , dividindo a Eq. (27) pela (17)

$$\frac{d_{etrans}}{d_e} = \frac{2 + \mu_e}{2}. \quad (28)$$

Como μ_e é positivo, podemos concluir que $d_{etrans} > d_e$.

Outra hipótese que devemos considerar é a possibilidade, quando se leva em conta a transferência de peso, das rodas traseiras travarem, enquanto as dianteiras continuam rolando sem deslizar. Como a força normal é menor no eixo traseiro, a força de atrito estático máxima também o é. Sendo assim o torque feito pelo sistema de freios, nas rodas traseiras, pode ser maior que o feito pela força de atrito, provocando o travamento das mesmas, e menor do que o da força de atrito nas rodas dianteiras, permitindo que elas continuem rolando sem deslizar.

Nessa situação, segundo Whitmire e Alleman [4], a força normal nos eixos, dianteiro e traseiro, admitindo-se as aproximações feitas anteriormente em relação à posição do centro de massa, seriam dadas por

$$N_D = \frac{2 + \mu_c}{4 + \mu_c - \mu_e} Mg, \quad (29)$$

e

$$N_T = \frac{2 - \mu_e}{4 + \mu_c - \mu_e} Mg. \quad (30)$$

O atrito nas rodas traseiras seria cinético, dado por $\mu_c N_T$, e nas rodas dianteiras seria estático. Para calcularmos a distância mínima necessária para frenagem, devemos considerar esse atrito como tendo seu valor máximo, dado por $\mu_e N_D$. Dessa forma a força de atrito total nas quatro rodas seria $\mu_c N_T + \mu_e N_D$. A 2ª lei de Newton, seria assim escrita

$$Ma = \mu_c N_T + \mu_e N_D. \quad (31)$$

Substituindo os valores de N_D e N_T , Eqs. (29) e (30), na Eq. (31), podemos calcular a aceleração do veículo

$$a = \frac{2(\mu_c + \mu_e)}{4 + \mu_c - \mu_e} g. \quad (32)$$

Para calcular a distância de frenagem, com as rodas traseiras travadas e as dianteiras rolando sem deslizar (d_{ctrans}), basta substituir a aceleração encontrada na equação de Torricelli, obtendo

$$d_{ctrans} = \frac{4 + \mu_c - \mu_e}{2(\mu_c + \mu_e)} \frac{v_0^2}{2g}. \quad (33)$$

Agora podemos comparar essa distância com a menor distância necessária para parar o veículo com as quatro rodas rolando, sem considerar a transferência de peso, obtida na Eq. (17), onde temos

$$\frac{d_{ctrans}}{d_e} = \frac{4 + \mu_c - \mu_e}{2(\mu_c + \mu_e)} \mu_e. \quad (34)$$

Observando a Eq. (34) vemos que determinar qual distância é a maior não é trivial, e uma opção que temos é substituir nela os valores de μ_e e μ_c . No entanto, segundo afirma Tavares [2], esses valores são difíceis de ser encontrados. Sendo assim utilizaremos aqui valores médios, que encontramos em alguns artigos, e na internet. Em geral [4-7] o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista, tem valores próximos de 1, enquanto o coeficiente de atrito cinético tem valores menores que um, considerando o asfalto seco. Sendo assim usaremos $\mu_e = 1$, e $\mu_c = 0,8$, obtendo

$$\frac{d_{ctrans}}{d_e} = 1,05. \quad (35)$$

Como podemos ver, neste tipo de frenagem com as quatro rodas rolando, supondo o peso igualmente distribuído nas quatro rodas, seria mais eficiente do que com as rodas traseiras travadas e as dianteiras rolando sem deslizar, considerando a transferência de peso.

Outra situação que pode ocorrer é o travamento tanto das rodas dianteiras, quanto das traseiras. Neste caso acreditamos que a transferência de peso não teria efeito sobre a distância de frenagem, pois nos dois eixos o atrito seria cinético, resultando que

$$F_D = \mu_c N_D, \quad (36)$$

e

$$F_T = \mu_c N_T. \quad (37)$$

Sendo assim a força de atrito total sobre o veículo é $F_D + F_T = \mu_c(N_D + N_T)$. Como $N_D + N_T = Mg$, reobtemos a Eq. (18).

2.4. O torque da força normal

Outro ponto que devemos destacar é a deformação dos pneus na região em contato com a pista. De acordo com Silveira [8], essa deformação faz com que a pressão na região de contato com o solo não seja uniforme, mas cresça no sentido do movimento, fazendo com que a força normal seja deslocada para frente em relação ao centro da região de contato de uma distância x .

Sendo assim o torque da força normal, em relação ao eixo de rotação da roda, não é nulo, sendo dado por $x \frac{Mg}{n}$, uma vez que a força normal em cada roda é $\frac{Mg}{n}$. Esse torque deve ser considerado, dessa forma devemos acrescentar um termo relativo à força normal na Eq. (4), obtendo

$$I\alpha = -G - x \frac{Mg}{n} + RF_{at}. \quad (38)$$

Repetindo o processo utilizado para obter a Eq. (6) temos

$$I \frac{a}{R} = -G - \frac{x}{R} \frac{MRg}{n} - \frac{RMa}{n}. \quad (39)$$

Substituindo ν na Eq. (39), obtemos:

$$a = -g\Gamma - kg\nu - \nu a, \quad (40)$$

onde $k = \frac{x}{R}$.

Finalmente, rearranjando a Eq. (40) encontramos a aceleração

$$a = -g \frac{\Gamma + k\nu}{1 + \nu}. \quad (41)$$

A distância necessária para a frenagem é dada por

$$d = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1 + \nu}{\Gamma + k\nu}. \quad (42)$$

Assim o valor máximo, Γ_{cr} , que o parâmetro Γ , pode assumir sem provocar o travamento das rodas, seria dado por

$$\Gamma_{cr} = \mu_e(1 + \nu) - k\nu, \quad (43)$$

Observando as Eqs. (42) e (43), percebemos que a distância mínima de frenagem seria a mesma, considerando, ou não, o torque normal, uma vez, que nos dois casos, a força máxima na direção horizontal que pode atuar no veículo é $\mu_e N$. No entanto, o torque máximo que pode ser feito nas rodas sem travá-las é menor quando levamos em conta o torque da força normal.

3. Os freios ABS

3.1. A frenagem mais eficiente

Nas seções anteriores calculamos as distâncias de frenagem de um automóvel nos regimes de atrito estático e cinético, e considerando $\mu_e > \mu_c$. Pelas Eqs. (17) e (20) a distância de frenagem com as rodas travadas é maior que a menor distância de frenagem possível com as rodas rolando sem deslizar, quando a força de atrito for máxima. Isto pode nos levar a concluir que quando as rodas estiverem rolando sem deslizar, a frenagem será mais eficiente, entretanto, como a força de atrito estático não tem um valor fixo, podemos deduzir que

$$d_e \geq \frac{1}{\mu_e} \frac{v_0^2}{2g}, \quad (44)$$

ou seja, só é possível afirmar que a distância de frenagem com as rodas rolando é menor dos que com as rodas travadas, quando elas estiverem na iminência de começar a deslizar.

Na Eq. (17) determinamos a distância mínima necessária para parar o carro uma vez que utilizamos a força de atrito máxima. Portanto, podemos concluir que

$$\frac{v_0^2}{2g} \frac{1 + \nu}{\Gamma_{cr}} \leq d_e \leq \frac{v_0^2}{2g} \frac{1 + \nu}{\Gamma}, \quad (45)$$

ou

$$\frac{v_0^2}{2g} \frac{1 + \nu}{\Gamma_{cr}} \leq d_e < \infty, \quad (46)$$

se $\Gamma \rightarrow 0$.

Assim, deve haver um certo valor para Γ , para o qual as distâncias de frenagem, nos regimes de atrito cinético e estático, têm o mesmo valor, ou seja onde $d_e = d_c$. Podemos obtê-lo igualando as Eqs. (20) e (12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_c} \frac{v_0^2}{2g} &= \frac{v_0^2}{2g} \frac{1+\nu}{\Gamma^*}, \\ \frac{1}{\mu_c} &= \frac{1+\nu}{\Gamma^*}, \\ \Gamma^* &= \mu_c(1+\nu), \end{aligned} \quad (47)$$

onde Γ^* é o torque reduzido para o qual $d_e = d_c$.

É importante lembrar que a Γ está relacionado à força que o sistema de freios faz na roda do carro, portanto quando pisamos no pedal, a fim de parar o veículo, o que desejamos ter é que $\Gamma^* < \Gamma < \Gamma_{cr}$, uma vez que para $\Gamma < \Gamma^*$ as rodas rolam sem deslizar e, embora o atrito seja estático, pisamos tão leve que a frenagem é menos eficiente do que com as rodas travadas, e com $\Gamma > \Gamma_{cr}$ as rodas travam, entrando no regime de atrito cinético.

Numa situação ideal teríamos $\Gamma = \Gamma_{cr}$, ou seja, $\frac{1}{\mu_c} \frac{v_0^2}{2g} \leq d \leq \frac{1}{\mu_e} \frac{v_0^2}{2g}$ (Fig. 5) no entanto é difícil para o motorista, usando apenas sua sensibilidade ao volante, conseguir controlar a força aplicada a fim de não ultrapassar Γ_{cr} .

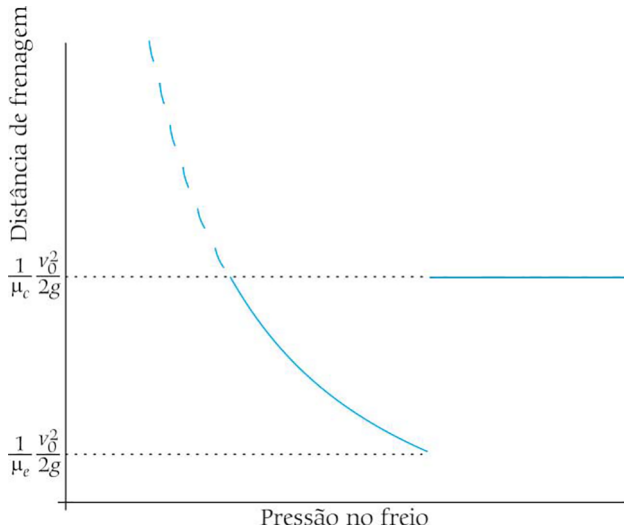


Figura 5 - A distância de frenagem diminui com o aumento da pressão que o motorista aplica no freio (atrito estático). A partir de uma certa pressão as rodas do veículo são travadas e a distância de frenagem se mantém constante (atrito cinético). A frenagem mais eficiente ocorre quando $\frac{1}{\mu_c} \frac{v_0^2}{2g} \leq d \leq \frac{1}{\mu_e} \frac{v_0^2}{2g}$.

Por isso foi desenvolvido o sistema de freios ABS, que não só evita o travamento das rodas, como procura fazer com que a força de atrito, entre os pneus e o solo, fique o mais próximo possível de $\mu_e N$. Este sistema de

freios, por meio de sensores, monitora o veículo, comparando a velocidade de cada roda com a velocidade do carro. Quando a velocidade da roda cai em relação à do carro é que o sistema “entra em ação”, diminuindo, ou aumentando a pressão no freio de cada roda, a fim de manter para cada uma a relação $a = \alpha R$. Esta operação se repete 15 vezes, ou mais, por segundo, antes que o pneu possa mudar de aceleração angular de forma significativa, assim o sistema mantém os pneus muito próximos do ponto onde eles começam a deslizar, oferecendo ao sistema o máximo poder de frenagem.

3.2. A dinâmica da frenagem com os freios ABS

Como dissemos, o sistema ABS possui sensores nas rodas que detectam quando $\Gamma = \Gamma_{cr}$, e diminuem seu valor, durante um certo intervalo de tempo Δt , de um fator $\Delta \Gamma$, ou seja, até que $\Gamma = \Gamma_{cr} - \Delta \Gamma_{cr}$. Em seguida o torque aplicado é aumentado até atingir novamente Γ_{cr} . Este ciclo é repetido continuamente até que o veículo pare, assim o torque médio aplicado nas rodas é dado por

$$\begin{aligned} \Gamma_{ABS} &= \frac{\Gamma_{cr} + (\Gamma_{cr} - \Delta \Gamma_{cr})}{2}, \\ \Gamma_{ABS} &= \Gamma_{cr} - \frac{\Delta \Gamma_{cr}}{2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Nesta situação as rodas rolam sem deslizar, valendo portanto o regime de atrito estático. Substituindo a Eq. (48) na (10) temos a aceleração para veículos que dispõem do sistema ABS

$$a_{ABS} = -\frac{g}{1+\nu} \left(\Gamma_{cr} - \frac{\Delta \Gamma_{cr}}{2} \right). \quad (49)$$

Também podemos determinar a distância de frenagem, no entanto temos de fazer algumas considerações. Quando calculamos a distância de frenagem para o regime de atrito estático supusemos que G , e portanto Γ , era constante. Agora, no entanto, temos Γ variando entre Γ_{cr} e $\Gamma_{cr} - \Delta \Gamma_{cr}$. Contudo, se considerarmos Δt suficientemente pequeno, podemos considerar Γ como sendo constante e dado pela Eq. (48), assim podemos determinar a distância de frenagem substituindo a Eq. (48) na (12)

$$d_{ABS} = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1+\nu}{\left(\Gamma_{cr} - \frac{\Delta \Gamma_{cr}}{2} \right)}. \quad (50)$$

Se dividirmos a Eq. (50) pela Eq. (12), podemos comparar a distância de frenagem com o uso do ABS, com a distância mínima de frenagem com as quatro rodas rolando sem deslizar ($\Gamma = \Gamma_{cr}$). O resultado é

$$\frac{d_{ABS}}{d_e} = \frac{\Gamma}{\left(\Gamma_{cr} - \frac{\Delta \Gamma_{cr}}{2} \right)}. \quad (51)$$

A Eq. (51) nos mostra que quanto menor for o valor de $\Delta\Gamma_{cr}$, mais a distância de frenagem se aproxima do menor valor possível, no entanto seria interessante calculá-la em função do coeficiente de atrito, como fizemos, nas seções anteriores, quando não consideramos o uso do ABS. Substituindo Γ_{cr} , Eq. (16), podemos calcular $\Delta\Gamma_{cr}$

$$\Delta\Gamma_{cr} = \Delta[\mu_e(1 + \nu)], \quad (52)$$

Considerando ν constante temos

$$\Delta\Gamma_c = (1 + \nu)\Delta\mu_e, \quad (53)$$

Assim, substituindo as Eq. (16) e (53) em (48), podemos calcular Γ_{ABS}

$$\Gamma_{ABS} = \mu_e(1 + \nu) - \frac{\Delta\mu_e}{2}(1 + \nu). \quad (54)$$

Substituindo a Eq. (54) em (50) obtemos

$$d_{ABS} = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1 + \nu}{\mu_e(1 + \nu) - \frac{\Delta\mu_e}{2}(1 + \nu)}. \quad (55)$$

E finalmente

$$d_{ABS} = \frac{1}{\mu_{ABS}} \frac{v_0^2}{2g}, \quad (56)$$

onde $\mu_{ABS} = \mu_e - \frac{\Delta\mu_e}{2}$.

Com o uso do ABS, a força de atrito entre os pneus e a pista não é constante, mas podemos calcular uma média, que seria dada por

$$F_{at} = \mu_{ABS}N, \quad (57)$$

De acordo com Toresan Jr. [9], perito criminal, esse modelo é utilizado para calcular a velocidade de veículos equipados com ABS.

Referências

- [1] M. Denny, *European Journal of Physics* **26**, 1007 (2005).
- [2] J.M. Tavares, *European Journal of Physics* **30**, 697 (2009).
- [3] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica 1 – Mecânica* (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1997).
- [4] D.P. Whitmire and T.J. Alleman, *American Journal of Physics* **47**, 89, (1979).
- [5] F.L. Silveira, *Física na Escola* **8:2**, 16 (2007).
- [6] A.A. Kleer, M.R. Thielo, A.C.K. Santos, *Caderno Catarinense de Ensino de Física* **14**, 160 (1997).
- [7] http://www.dem.ist.utl.pt/acidentes/para/segur_texp.html, acessado em 15/9/2010.
- [8] F.L. Silveira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 1304 (2011).
- [9] W. Toresan Jr., *Cálculo de Velocidade para Veículos Equipados com Sistemas de Freios ABS*, Disponível em http://www.estradas.com.br/sosestradas/articulistas/wilson_t_jr/calculo_de_velocidade_veiculos equip_abs.pdf, acessa em 4/10/2010.