

Anisotropias da radiação cósmica de fundo como um observável cosmológico

(*Anisotropies of the cosmic microwave background radiation as a cosmological observable*)

João F.D. Diniz¹, Pedro C. de Holanda

Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil

Recebido em 18/6/2014; Aceito em 26/6/2014; Publicado em 28/10/2014

Um dos grandes sucessos do Modelo Cosmológico Padrão consiste na excelente concordância entre sua previsão teórica para as anisotropias na radiação cósmica de fundo e os mais recentes dados experimentais. Porém a previsão teórica fornecida pelo modelo não é propriamente uma distribuição de temperaturas, mas variáveis estatísticas relacionadas com tal distribuição: extrai-se da distribuição de temperatura uma função de correlação de dois pontos, que é expandida em polinômios de Legendre. Os coeficientes de tal expansão são então comparados com as previsões teóricas para a mesma quantidade. Neste artigo apresentamos de uma forma detalhada como tais variáveis são construídas, com exemplos simples construídos para mapas de temperatura simplificados, de modo a ressaltar as principais características físicas que podem ser lidas a partir deste procedimento.

Palavras-chave: astronomia, cosmologia, radiação cósmica de fundo.

One of the greatest successes of the Standard Cosmological Model consists in the excellent agreement between the theoretical prediction for the cosmic microwave background radiation anisotropies and the most recent experimental data. However, this theoretical prediction provided by the model is not a proper temperature distribution, but it is a set of statistical variables related to this distribution. One can extract from the temperature distribution a two-point correlation function, which is expanded in Legendre polynomials. The coefficients from the expansion are then compared with the theoretical prediction for the same quantity. In this paper we show in detail how these variables are built, with simple examples from simplified temperature maps, in order to highlight the main physical features that can be read from this procedure.

Keywords: astronomy, cosmology, cosmic microwave background.

1. Introdução

Um assunto central na cosmologia atual consiste em compreender os mecanismos pelos quais as anisotropias e inhomogeneidades são geradas a partir de um universo primordial praticamente homogêneo e isotrópico. Por exemplo, medidas de precisão da radiação cósmica de fundo [1–3] indicam que um padrão específico de anisotropia é observado na temperatura de tal radiação. Tomando o caso da distribuição de matéria bariônica, observa-se que o universo é permeado por fortes concentrações de matéria e imensos espaços vazios, caracterizando uma grande inhomogeneidade na distribuição de matéria [4].

Um importante aspecto da pesquisa em cosmologia consiste em utilizar simuladores numéricos para gerar as anisotropias da radiação cósmica de fundo a partir de flutuações iniciais em um universo homogêneo. A partir da comparação do padrão de anisotropias geradas

com aquelas observadas, podemos testar as hipóteses utilizadas em nossos simuladores.

Este tipo de análise aplicado à distribuição de matéria e à radiação cósmica de fundo foi fundamental para estabelecer diversos parâmetros no modelo cosmológico padrão. Por exemplo, supor um universo sem uma componente de energia escura, além de estar em conflito com a recente expansão acelerada observada em dados de supernova, criaria um universo onde estruturas com uma certa escala típica apresentariam uma inhomogeneidade maior do que a observada.

Para compararmos um padrão de anisotropia com previsões teóricas devemos definir uma variável que reflita tal padrão. Para as anisotropias da radiação cósmica de fundo utiliza-se uma função de correlação de dois pontos da temperatura desta radiação, expandida em harmônicos esféricos (ver por exemplo a Ref. [5]). Os valores dos coeficientes desta expansão permitem uma comparação direta entre previsões teóricas e da-

¹E-mail: joao.f.d.diniz@gmail.com.

dos experimentais relativos ao padrão de anisotropia em diversas escalas.

Um passo necessário é converter os dados experimentais, apresentados como um mapa de temperatura da radiação cósmica de fundo, nesta variável [2]. Em seguida devemos extrair tal previsão de nosso modelo teórico, e finalmente avaliar a compatibilidade com a variável extraída dos dados experimentais. Apresentar como é feita tal análise é o objetivo central deste artigo.

2. Radiação cósmica de fundo

A radiação cósmica de fundo, ou CMB (do inglês Cosmic Microwave Background Radiation), se refere à radiação que deixou de interagir com a matéria do Universo após o período de desacoplamento. Com a expansão do Universo e seu conseqüente resfriamento, os fótons perderam energia e, após determinado instante, passaram a não ter mais energia suficiente para ionizar átomos de hidrogênio, o elemento mais abundante no Universo. Conseqüentemente, a matéria passou a ser transparente aos fótons, que deixaram de ser espalhados e passaram a viajar livremente. Atualmente mede-se a radiação cósmica de fundo e verifica-se que o seu espectro de energia em função de sua frequência coincide com o espectro de um corpo negro, portanto, pode-se associar à radiação cósmica de fundo uma temperatura. A temperatura que melhor ajusta o espectro de energia da CMB com o espectro de um corpo negro é (2.725 ± 0.001) K. Outra observação importante quanto ao espectro da CMB é a sua isotropia. Medidas feitas em diferentes direções no céu resultam no mesmo espectro de energia. Isso confirma o princípio cosmológico, que afirma que o Universo apresenta as mesmas propriedades independente da posição em que se esteja ou da direção para a qual se olhe, ou seja, não existe um ponto do Universo privilegiado. Obviamente essa afirmação é válida apenas em grandes escalas, e é fácil perceber que ela se torna falsa em pequenas escalas, menores que alguns megaparsecs.

Além disso, a isotropia e homogeneidade não são absolutas. De fato, com o avanço dos dados experimentais, verificou-se que existem anisotropias no espectro da CMB, que estão relacionadas com as perturbações na distribuição homogênea de matéria e radiação no início do Universo. Essas perturbações também deram origem às inhomogeneidades na distribuição de matéria bariônica. Atualmente parte da cosmologia se dedica a extrair informações das anisotropias da radiação cósmica de fundo como as densidades de matéria bariônica, matéria escura e da constante cosmológica, que por sua vez indicam a geometria do Universo.

2.1. Expansão em multipolos

Nessa seção introduziremos as funções utilizadas no estudo qualitativo das anisotropias da radiação cósmica

de fundo e em que nosso estudo foi baseado, a começar pela função de correlação de dois pontos. Esse tipo de função faz parte de um conjunto de funções de correlação, que por sua vez podem caracterizar completamente um mapa de temperatura do céu. Definimos a função de correlação de dois pontos por

$$C(\alpha) \equiv \left\langle \frac{\delta T}{T_0}(\mathbf{l}_1) \frac{\delta T}{T_0}(\mathbf{l}_2) \right\rangle, \quad (1)$$

onde o símbolo $\langle \rangle$ representa a média das flutuações da temperatura em todas as direções, definidas pelos vetores unitários \mathbf{l}_1 e \mathbf{l}_2 . Estes vetores satisfazem $\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 = \cos \alpha$. T_0 representa a temperatura média do mapa, e $\delta T = T(\mathbf{l}) - T_0$ é a diferença da temperatura de um certo ponto em relação à temperatura média. A função de correlação de dois pontos é uma ferramenta poderosa na análise cosmológica que possibilita a determinação de constantes cosmológicas e a distinção entre modelos para o Universo. Existem outros tipos de funções de correlação, como por exemplo a função de correlação de três pontos, que pode determinar se as flutuações da temperatura seguem padrões gaussianos, mas nos limitaremos apenas à função de correlação de dois pontos. Até o momento supomos que o Universo é, em geral, homogêneo e isotrópico em largas escalas, segundo o princípio cosmológico. Conseqüentemente, devemos esperar que a média sob todas as direções de um determinado ponto do espaço, por exemplo a Terra, se aproxime da média realizada em diversos outros pontos do espaço. A média espacial de $C(\alpha)$, fixado α , é chamada de *média cósmica*. O desvio médio quadrático entre uma medida local e a média cósmica é chamado *variância cósmica*. Como as inhomogeneidades para ângulos pequenos estão mais relacionadas do que para ângulos grandes, a variância cósmica é pequena para escalas angulares pequenas, mas se torna substancial para separações angulares maiores do que 10 graus.

Pode-se escrever a expressão para $C(\alpha)$ como uma soma discreta sobre multipolos C_l dada por

$$C(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \alpha), \quad (2)$$

onde os termos C_l são determinados numericamente a partir da distribuição $C(\alpha)$.

A determinação dos multipolos C_l permite a determinação de diversos parâmetros cosmológicos, como a constante de Hubble H_0 , a densidade de matéria bariônica Ω_b , a densidade total de matéria Ω_m , a densidade de energia relacionada à constante cosmológica Ω_Λ , entre outros. Portanto, a análise do espectro dos multipolos de $C(\alpha)$ permite extrair diversas informações a cerca do Universo. Nas seções subsequentes exploraremos melhor o aspecto do espectro das anisotropias.

3. Mapas de temperatura

Nesta seção construímos mapas de temperaturas de diversos céus, e posteriormente os caracterizamos através da função de correlação de dois pontos e sua expansão em momentos de multipolo. Com a construção de diferentes céus, avaliamos quais propriedades da função de correlação e seus multipolos refletem as características dos mapas de temperatura. O primeiro passo foi a construção destes mapas.

Um ponto do céu pode ser definido pela parte angular (θ, ϕ) das coordenadas esféricas. Criar mapas de temperatura significa atribuir a cada ponto do céu uma temperatura, logo equivale a especificar uma função $T = T(\theta, \phi)$ da temperatura no domínio $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. O procedimento adotado para criar estas funções se baseia em três passos:

- Distribuir N fontes de flutuação, ou pontos, no plano $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ das coordenadas (θ, ϕ) .
- Cada fonte de flutuação afeta o seu entorno através de uma distribuição gaussiana no ângulo de separação com uma largura específica σ_T e com uma amplitude $a/(\sigma_T\sqrt{2\pi})$.
- A temperatura de um determinado ponto (θ, ϕ) é a soma das N gaussianas das fontes de flutuação naquele ponto.

Uma fonte de flutuação no ponto (θ_i, ϕ_i) é moldada pela gaussiana

$$\delta_i(\theta, \phi) = \frac{a}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha_i - 1}{\sigma_T} \right)^2 \right], \quad (3)$$

onde $\alpha_i = \alpha_i(\theta, \phi)$ é o ângulo de separação entre um ponto (θ, ϕ) e o ponto (θ_i, ϕ_i) . Note que para $(\theta, \phi) = (\theta_i, \phi_i)$ temos $\alpha_i = 0$ e logo $\delta_i = a/(\sigma_T\sqrt{2\pi})$. A temperatura em um ponto (θ, ϕ) do plano D é a somatória do efeito de todas as flutuações

$$T(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^N \delta_i(\theta, \phi) = \frac{a}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} \times \sum_{i=1}^N \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha_i - 1}{\sigma_T} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

O parâmetro de normalização a é calculado de forma que a temperatura média seja sempre constante, independente do valor de σ_T . Ou seja

$$T_0 = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi} \frac{a}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} \times \sum_{i=1}^N \int \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha_i - 1}{\sigma_T} \right)^2 \right] d(\cos \theta) d\phi, \quad (5)$$

o que leva à

$$a = \frac{2T_0}{N} \left[\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{\sigma_T} \right)^2 \right] dx \right]^{-1}. \quad (6)$$

O cálculo da distância $\alpha_i(\theta, \phi)$ é simples. Sejam os vetores unitários $\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$ e $\hat{r}_i = \sin \theta_i \cos \phi_i \hat{x} + \sin \theta_i \sin \phi_i \hat{y} + \cos \theta_i \hat{z}$ que especificam a posição no céu de dois pontos que se quer obter a distância angular, é imediato que

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \hat{r} \cdot \hat{r}_i = \sin \theta \sin \theta_i \cos \phi \cos \phi_i + \\ &\quad \sin \theta \sin \theta_i \sin \phi \sin \phi_i + \cos \theta \cos \theta_i \implies \\ \cos \alpha_i &= \sin \theta \sin \theta_i \cos(\phi - \phi_i) + \cos \theta \cos \theta_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Determinadas as posições das fontes de flutuação, a amplitude a das flutuações e o parâmetro de separação angular σ_T , o mapa de temperatura é facilmente montado computacionalmente. Uma questão natural que surge é como posicionar as fontes. Em nosso projeto utilizamos duas abordagens, um posicionamento totalmente aleatório no plano D e um posicionamento aproximadamente uniforme sobre uma esfera que representa o céu.

3.1. Distribuições uniformes

Dados N pontos, o problema de distribuí-los uniformemente sobre uma esfera é uma questão bastante complexa. Primeiro, é necessário definir o conceito de distribuição uniforme, e para isso devemos definir o conceito de distância entre dois pontos. Por enquanto adotaremos a distância entre dois pontos como o comprimento da geodésica entre eles. Uma maneira de definir a distribuição uniforme de N pontos é dizer que as distâncias entre quaisquer pares de pontos são iguais, mas é fácil perceber que para $N > 4$ o problema já não possui mais solução. Imaginemos que vamos distribuir N pontos numa esfera utilizando a noção de distribuição uniforme citada acima e adotaremos uma distância l . Dado um ponto P_1 qualquer, o lugar geométrico que dispomos para distribuir o restante dos $N - 1$ pontos é a circunferência Γ_1 de raio l centrada em P_1 . Colocamos então um ponto P_2 em Γ_1 . Sendo Γ_2 a circunferência de raio l centrada em P_2 , o lugar geométrico que dispomos para distribuir o restante dos $N - 2$ pontos é a interseção entre Γ_1 e Γ_2 . Em geral as duas circunferências se intersectarão em dois pontos, então o processo pode prosseguir. De maneira geral, deve-se colocar o ponto P_{n+1} em $\bigcap_{i=1}^n \Gamma_i$, sendo Γ_i a circunferência de raio l centrada em P_i . É fácil ver que para N grande teremos $\bigcap_{i=1}^n \Gamma_i = \emptyset$ e o problema não terá solução. Para contornar esse problema aparentemente insolúvel, temos que abandonar nossa noção atual de distribuição uniforme. Em geral, definir o que exatamente é uma distribuição uniforme é algo extremamente complicado,

então não a definiremos formalmente aqui, mas nos limitaremos a descrever o processo de distribuição utilizado no projeto. Por outro lado, para que essa ideia não fique muito vaga, diremos que uma distribuição uniforme de N pontos é uma distribuição que é invariante a rotações e translações, ou seja, mais informalmente, que parece aproximadamente a mesma independente do ponto em que se observa.

O procedimento adotado foi o seguinte: seja R o raio da esfera e dado um número n (por conveniência tomaremos n par), tomemos um grande círculo Γ da esfera e distribuimos $n/2$ pontos uniformemente espalhados sobre uma metade de Γ , de modo que o ângulo subtendido entre as retas que unem dois pontos consecutivos e o centro da esfera seja $\frac{2\pi}{n}$. Consequentemente, o arco entre dois pontos consecutivos possui comprimento $l = \frac{2\pi}{n}R$, que será nosso parâmetro de distância entre pontos próximos. O que estamos fazendo é dividir um grande círculo em n partes iguais, mas utilizamos apenas metade. Agora escolhemos os pontos das extremidades da metade de Γ como os polos O_1 e O_2 da esfera. Seja P_1 um ponto consecutivo a O_1 . Traçamos um plano perpendicular a $\overline{O_1O_2}$ passando por P_1 . A interseção entre este plano e a esfera determina uma circunferência γ_1 de raio $r_1 = R \sin \frac{2\pi}{n}$. Como dissemos, devemos tentar manter pontos próximos sobre a esfera a uma distância l , logo devemos arranjar pontos sobre γ_1 de modo que a distância entre eles seja aproximadamente l . Para isso distribuimos m_1 pontos sobre γ_1 sendo m_1 o inteiro mais próximo de $\frac{2\pi r_1}{l} = n \sin \frac{2\pi}{n}$. Obtemos um conjunto de pontos que estão distantes l do polo O_1 e distantes $\frac{2\pi}{m_1}R \sin \frac{2\pi}{n} \approx l$ de seus vizinhos em γ_1 . O processo pode ser repetido para o ponto P_2 consecutivo a P_1 . Identificamos a circunferência γ_2 de raio $r_2 = R \sin \frac{4\pi}{n}$ como a interseção entre a esfera e o plano perpendicular a $\overline{O_1O_2}$ e passando por P_2 . Distribuimos m_2 pontos sobre γ_2 sendo m_2 o inteiro mais próximo de $\frac{2\pi r_2}{l} = n \sin \frac{4\pi}{n}$. Obtemos um conjunto de m_2 pontos que estão aproximadamente a uma distância l de seus vizinhos e dos pontos próximos de γ_1 . De maneira geral, o processo de uniformização consiste em identificar a circunferência γ_i de raio $r_i = R \sin \frac{2\pi i}{n}$ obtida da interseção da esfera com o plano perpendicular a $\overline{O_1O_2}$ e passando por P_i , e distribuir m_i pontos uniformemente sobre γ_i , sendo m_i o inteiro mais próximo de $\frac{2\pi r_i}{l} = n \sin \frac{2\pi i}{n}$. A Fig. 1 ilustra o processo de distribuição uniforme descrito.

Devemos notar que a distribuição utilizada não é exatamente uniforme. Isso é evidente com a aproximação da fração $n \sin \frac{2\pi i}{n}$, o que resulta em pontos cujas distâncias diferem de l . Além do mais, mesmo que por coincidência alguma fração for l , então teremos assegurado a uniformidade entre os pontos dentro de uma circunferência γ_i , mas o mesmo não pode ser afirmado com relação a pontos próximos em circunferências adjacentes. Outra questão mais crítica com relação a uniformidade da distribuição é a definição de

distância utilizada. As distâncias entre pontos dentro de uma mesma circunferência γ_i não utilizam o conceito de geodésicas que mencionamos antes, e isso pode, aparentemente, por em dúvida a validade do processo de uniformização utilizado. Por outro lado, com o aumento de n , as distâncias entre os pontos diminuem e a geometria do problema se aproxima da geometria de um plano, onde esse problema desaparece. Consequentemente devemos esperar bons resultados para n suficientemente grande. Durante o processo de distribuição não especificamos a quantidade total de pontos sobre a esfera, mas apenas o parâmetro n que nos dá a quantidade de pontos sobre um grande círculo. Obviamente, sendo $\text{int}(x)$ o inteiro mais próximo de x , a quantidade total N de pontos é

$$N = 2 + \sum_{i=1}^{n/2} m_i = 2 + \sum_{i=0}^{n/2} \text{int} \left(n \sin \left(\frac{2\pi}{n} i \right) \right), \quad (8)$$

levando em conta os polos. Como exemplo, para $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$ obtemos, respectivamente, $N = 34$, $N = 794$ e $N = 3186$. Vemos empiricamente que N , a quantidade total de pontos, é aproximadamente proporcional a n^2 .

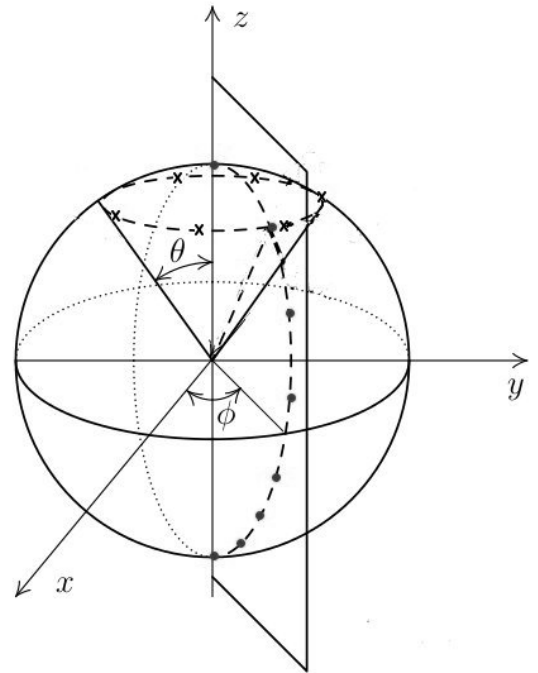


Figura 1 - Processo de distribuição uniforme. Os pontos representam os $n/2$ pontos distribuídos inicialmente no grande círculo. Os xises são os m_i pontos distribuídos sobre a circunferência γ_i de modo que a distância entre pontos consecutivos, medida pelo comprimento do arco de γ_i entre eles, seja aproximadamente $l = \frac{2\pi}{n}R$.

3.2. Distribuições aleatórias

Para distribuir aleatoriamente N pontos no plano D , basta escolher aleatoriamente N pares ordenados em

$(\cos\theta, \phi)$. No projeto isso foi feito utilizando-se um gerador de números aleatórios, que retorna um número aleatório dentro do intervalo $(0, 1)$. Mostramos abaixo na Fig. 2 duas distribuições aleatórias de temperatura construídas de acordo com Eq. (4) e $N = 794$ (número escolhido para possibilitar a comparação com uma distribuição uniforme com $N=50$ pontos em um grande círculo), para duas escolhas de σ_T . As localizações das fontes de perturbação é idêntica para os dois gráficos.

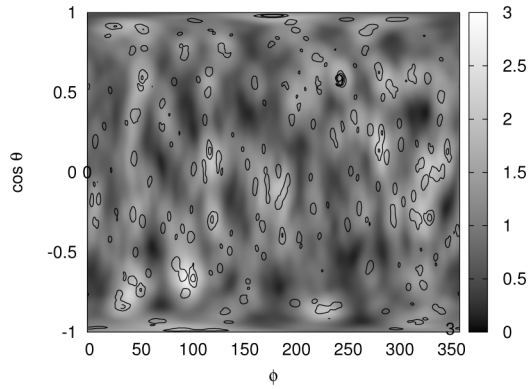
4. Tratamento numérico

4.1. Cálculo da função de correlação

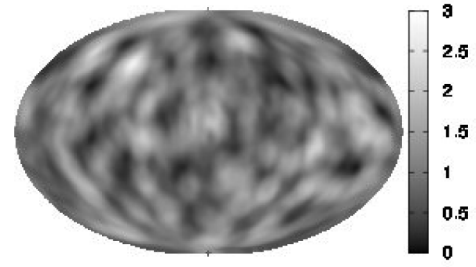
A função de correlação é central em nosso estudo sobre anisotropias da radiação cósmica de fundo, como já mencionado antes. É através dela que obtemos os multipolos e extraímos informações acerca da distribuição de temperaturas do céu. Como definido na seção 2.1, a função de correlação é dada por

$$C(\alpha) \equiv \left\langle \frac{\delta T}{T}(\mathbf{l}_1) \frac{\delta T}{T}(\mathbf{l}_2) \right\rangle, \quad (9)$$

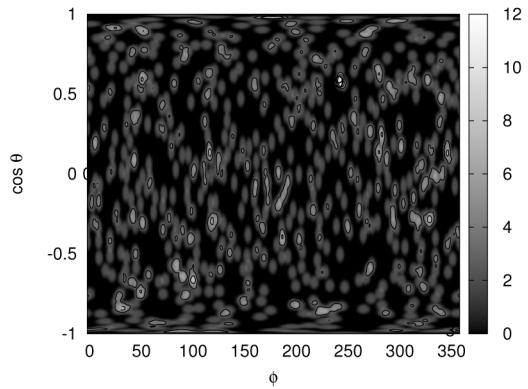
onde o símbolo $\langle \rangle$ representa a média das flutuações da temperatura em todas as direções \mathbf{l}_1 e \mathbf{l}_2 satisfazendo $\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 = \cos\alpha$. Para calcular a média da quantidade entre $\langle \rangle$, fixamos um ângulo α entre as direções \mathbf{l}_1 e \mathbf{l}_2 . Variamos então \mathbf{l}_1 em todas as direções do céu, ou seja, varremos todo o conjunto de valores (θ_1, ϕ_1) . Para cada direção de \mathbf{l}_1 variamos a direção de \mathbf{l}_2 dentro do conjunto de valores possíveis (θ_2, ϕ_2) tais que $\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 = \cos\alpha$. Esse conjunto de valores (θ_2, ϕ_2) é determinado pelo cone de abertura α com altura na direção \mathbf{l}_1 . Deve-se notar que as variações em θ_2 e ϕ_2 não são independentes, ao contrário das variações em θ_1 e ϕ_1 . Para descrever θ_2 e ϕ_2 utilizamos um parâmetro angular β , como mostrado na Fig. 3. A interseção entre a esfera e o cone de abertura α com altura na direção \mathbf{l}_1 determina uma circunferência, que está relacionada ao conjunto de valores possíveis de θ_2 e ϕ_2 . Podemos varrer a circunferência, e conseqüentemente descrever o vetor \mathbf{l}_2 , através do ângulo β entre uma direção variável e uma direção fixa, que será tomada como o versor \mathbf{e}_θ no ponto (θ_1, ϕ_1) . Com isso, podemos escrever Eq. (9) como



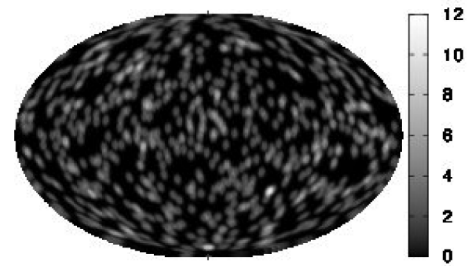
(a) $\sigma_T = 10^{-2}$



(b) $\sigma_T = 10^{-2}$, utilizando projeção de Mollweide.



(c) $\sigma_T = 10^{-3}$



(d) $\sigma_T = 10^{-3}$, utilizando projeção de Mollweide.

Figura 2 - Mapas de temperatura baseados na distribuição aleatória de fontes de flutuação. Utilizamos $N = 794$ em ambos os mapas. Apresentamos os dados em $\cos\theta$ e ϕ , onde os pontos de distribuição são aleatoriamente espalhados, e utilizando a projeção de Mollweide, para comparação visual com os resultados de CMB.

$$C(\alpha) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \int_0^{2\pi} d\beta \frac{\delta T_1}{T}(\theta, \phi) \frac{\delta T_2}{T}(\theta, \phi, \alpha, \beta), \quad (10)$$

onde omitimos o subscrito 1 em θ e ϕ , e o coeficiente $1/8\pi^2$ representa a normalização das integrais. A expressão (10) pode ser resolvida numericamente com base em um mapa de temperatura, simplesmente variando-se θ , ϕ e β e lendo as temperaturas em cada par de pontos (θ_1, ϕ_1) e (θ_2, ϕ_2) .

Resta saber como θ_2 e ϕ_2 podem ser escritas em função das variáveis de integração α e β e de θ_1 e ϕ_1 . O vetor \mathbf{l}_2 pode ser escrito em termos de coordenadas esféricas em um sistema de coordenadas S' cujo eixo z' aponta na direção de \mathbf{l}_1 , y' aponta na direção de \mathbf{e}_θ e α e β são os ângulos esféricos relacionados à essas coordenadas. Neste sistema de coordenadas \mathbf{l}_2 tem componentes

$$\mathbf{l}_2 = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha),$$

enquanto, no sistema de coordenadas original, temos

$$\mathbf{l}_2 = (\sin \theta_2 \cos \phi_2, \sin \theta_2 \sin \phi_2, \cos \theta_2).$$

Para transformar as componentes de um vetor entre estes dois sistemas de coordenadas devemos fazer duas rotações sucessivas. Primeiramente realiza-se uma rotação de θ_1 em torno de x' de modo a alinhar z' e z .

Desenvolvendo esta relação, obtemos

$$\cos \theta_2 = -\sin \theta_1 \sin \alpha \sin \beta + \cos \theta_1 \cos \alpha, \quad (12)$$

$$\tan \phi_2 = \frac{\sin \theta_1 \sin \phi_1 + \tan \alpha (\cos \theta_1 \sin \phi_1 \sin \beta + \cos \phi_1 \cos \beta)}{\sin \theta_1 \cos \phi_1 + \tan \alpha (\cos \theta_1 \cos \phi_1 \sin \beta - \sin \phi_1 \cos \beta)}. \quad (13)$$

Obtemos assim o ponto (θ_2, ϕ_2) em função dos parâmetros θ_1, ϕ_1, α e β , que são as grandezas que aparecem na integral (10). Em nosso projeto utilizamos processos de integração por Monte Carlo da biblioteca *GSL* para realizar as integrais.

4.1.1. Alguns limites

A função de correlação quantifica o quanto as anisotropias na temperatura estão relacionadas entre si, ou seja, o quanto as gaussianas da Eq. (3) das fontes de flutuação se sobrepõem. Um limite importante é o cálculo desta função quanto $\alpha = 0$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\beta \left| \frac{\delta T_1}{T}(\theta, \phi) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{T_1}{T}(\theta, \phi) \right|^2 - 1 = \left\langle \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^2 \right\rangle - 1. \end{aligned}$$

Em seguida realiza-se uma rotação de $(\pi/2 - \phi_1)$ em torno de z , de modo a alinhar x' e x . Ou seja

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_2 \cos \phi_2 \\ \sin \theta_2 \sin \phi_2 \\ \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi_1 & -\cos \phi_1 & 0 \\ +\cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (11)$$

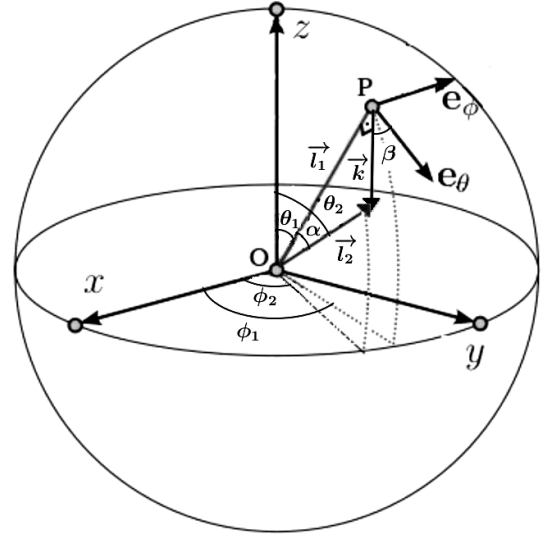


Figura 3 - Representação dos vetores \mathbf{l}_1 e \mathbf{l}_2 tais que $\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 = |\mathbf{l}_2| \cos \alpha$.

Se fizermos o caso extremo $\sigma_T \rightarrow \infty$, então as flutuações se tornam $\delta_i(\theta, \phi) = T_0/N$, ou seja, tornam-se constantes. Consequentemente, temos um mapa de temperatura uniforme, sem anisotropias, e então é imediato que $C(\alpha) \equiv 0$.

Por outro lado, para $\sigma_T \ll 1$ identificamos a definição da distribuição delta de Dirac na definição de δ_i

$$\delta_i(\theta, \phi) = \frac{2T_0}{N} \delta(\cos \alpha_i - 1).$$

Isso é de se esperar, uma vez que a diminuição de σ_T resulta em gaussianas cada vez mais estreitas, e consequentemente uma diminuição na sobreposição. O que ocorre é um isolamento das fontes de flutuação. A temperatura num dado ponto (θ, ϕ) é

$$T(\theta, \phi) = \frac{2T_0}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\cos \alpha_i - 1). \quad (14)$$

Temos então que a função $C(\alpha)$ será zero para todo α , com exceção daqueles valores específicos onde uma separação α corresponde a uma abertura entre dois pontos de flutuação, quando $C(\alpha) \rightarrow \infty$.

Lembrando que as três características que determinam um mapa de temperatura são a quantidade de fontes de flutuação N , a maneira de distribuí-las e o parâmetro de separação angular σ_T , na próxima seção analisaremos as funções de correlação obtidas numericamente variando-se os parâmetros N e σ_T , primeiro para distribuições uniformes e depois para distribuições aleatórias.

4.2. Cálculo numérico dos momentos de multipolo

Até o momento nos limitamos apenas ao estudo das funções de correlação, mas os resultados e conclusões que decorrem delas não são imediatos e nem sempre claros. Devemos portanto recorrer a expansão de $C(\alpha)$ em momento de multipolo, como discutido na seção 2.1. Nessa seção discutiremos o processo de expansão utilizado no projeto. Como estabelecido na Eq. (2) da seção 2.1, podemos escrever a função de correlação como

$$C(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \alpha), \quad (15)$$

onde C_l são os momentos de multipolo. Sabemos que os polinômios de Legendre obedecem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 P_m(\cos \alpha) P_l(\cos \alpha) d(\cos \alpha) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}, \quad (16)$$

onde δ_{lm} é o delta de Kronecker. Multiplicando a Eq. (15) por $P_l(\cos \alpha)$, integrando e usando relação de

ortogonalidade (16) temos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 C(\alpha) P_l(\cos \alpha) d(\cos \alpha) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) C_m \times \\ &\int_{-1}^1 P_m(\cos \alpha) P_l(\cos \alpha) d(\cos \alpha) \implies \\ C_l &= \frac{2\pi}{2l+1} \int_{-1}^1 C(\alpha) P_l(\cos \alpha) d(\cos \alpha). \end{aligned} \quad (17)$$

Uma vez montada a função de correlação $C(\alpha)$, obter os multipolos é imediato. Na próxima seção mostraremos o cálculo das funções de correlação e do espectro de multipolos de diversas distribuições de mapas de temperatura uniformes e aleatórios.

5. Resultados

5.1. Distribuições uniformes

5.1.1. Funções de correlação

Vamos analisar agora as funções de correlação de mapas de temperatura cujas fontes de flutuação foram distribuídas uniformemente segundo nosso algoritmo da seção 3.1. Na Fig. 4 mostramos quatro funções de correlação de mapas com mesma temperatura média $\langle T \rangle$, mesma quantidade N de fontes de flutuação e diferentes parâmetros de separação angular σ_T .

Para valores altos de σ_T , a distribuição $C(\alpha)$ não varia muito, como pode-se observar nas Figs. 4a) e 4b), o que era de se esperar uma vez que as várias distribuições de temperatura se sobrepõem, suprimindo as flutuações de temperatura. Por outro lado, para valores menores de σ_T o caráter da distribuição uniforme começa a se tornar claro, como se vê nas Figs. 4c) e 4d), que apresentam uma forte regularidade. Quanto à simetria das Figs. 4c) e 4d), esperamos, pela distribuição uniforme, que regiões opostas do céu sejam relativamente parecidas, ou seja, que as correlações de pontos (θ, ϕ) e (θ^*, ϕ^*) , e (θ, ϕ) e $(\pi - \theta^*, \pi + \phi^*)$, sejam parecidas.

5.1.2. Momentos de multipolos

Passaremos a investigar o espectro de multipolos de funções de correlação obtidos de mapas de temperatura construídos com processo de distribuição uniforme, como as funções de correlação da subseção 5.1.1. Na Fig. 5 mostramos o espectro das funções de correlação da Fig. 4.

As Figs. 5a) e 5b) mostram alguma estrutura em C_l para baixos valores de l , e valores praticamente nulos de C_l para altos valores de l . Isto se deve ao fato de que o alto valor de σ_T homogeneízam o mapa de temperaturas. A estrutura para baixo valores de l ocorre devido ao nosso processo aproximado de criação

de mapas uniformes, o que cria uma pequena anisotropia em nosso mapa. Por outro lado, diminuindo-se a separação angular, a posição das fontes torna-se clara e o padrão uniforme passa a ser evidente, como se vê nas Figs. 5c) e 5d). Como previsto na subseção passada, temos um pico claro em $l = 50$ nos espectros dos mapa com $\sigma_T = 10^{-3}$ e $\sigma_T = 10^{-4}$, que possuem justamente $n = 50$ pontos num grande círculo, o que indica a separação média entre as fontes de flutuação. Por causa do caráter uniforme da distribuição, as distâncias das fontes aos seus vizinhos mais próximos

estão próximas da média, o que resulta em um desvio padrão pequeno e conseqüentemente em um pico estreito. Agora, a Fig. 5d) possui uma característica interessante. Diminuindo-se ainda mais a separação angular e conseqüentemente a sobreposição das flutuações, as posições de fontes mais distantes a uma dada fonte passam a ser evidentes e devem se refletir no espectro de multipolos. De fato, é o que se observa na Fig. 5d), que possui picos evidentes em $l = 100$ e $l = 150$, ambos multipolos de $l = 50$, e traduzem distâncias características entre pontos que não são vizinhos.

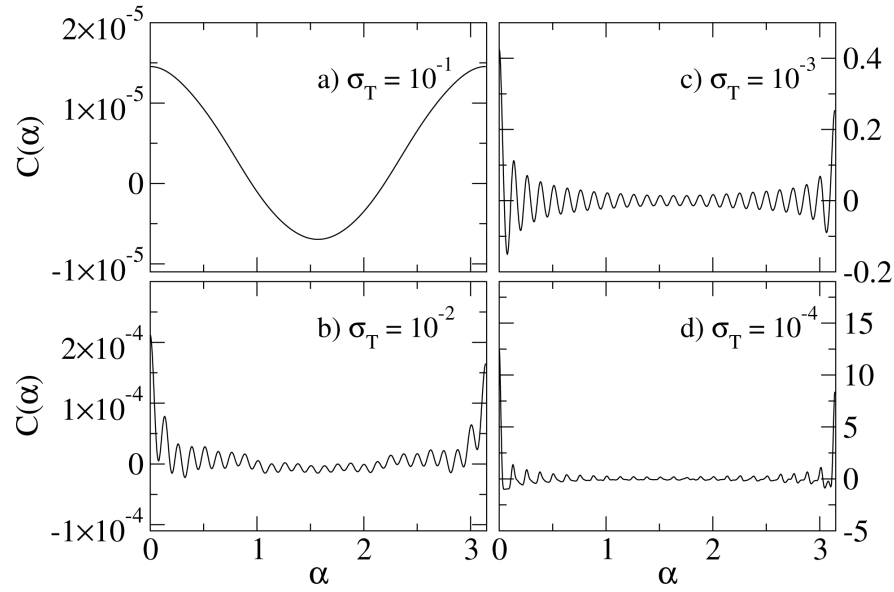


Figura 4 - Funções de correlação de mapas de temperatura com distribuição uniforme de flutuações, $n = 50$ fontes de flutuação num grande círculo, e logo $N = 794$ fontes ao total, e com diferentes parâmetros de separação angular σ_T .

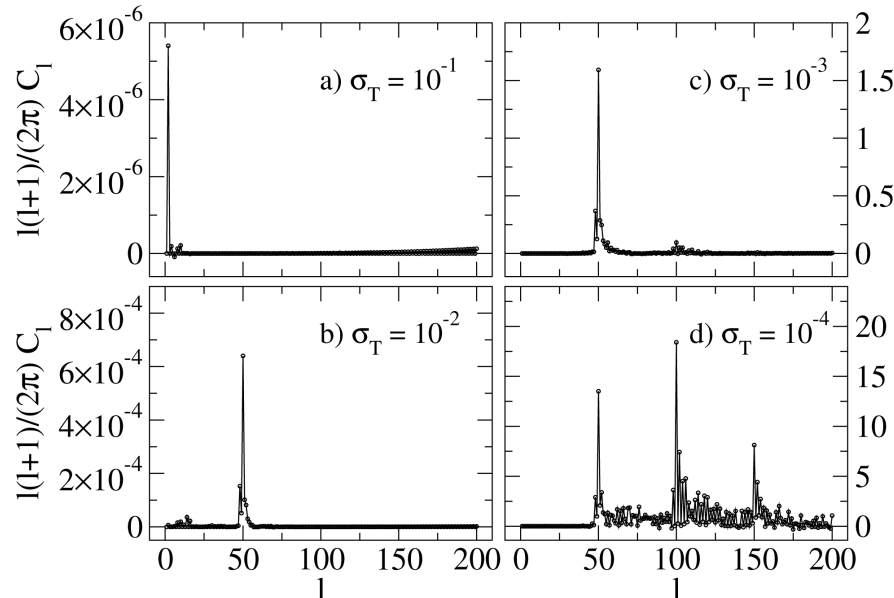


Figura 5 - Momentos de multipolo de mapas de temperatura com distribuição uniforme das flutuações, $n = 50$ fontes de flutuação num grande círculo, e $N = 794$ ao total, e diferentes parâmetros de separação angular σ_T .

5.2. Distribuições aleatórias

Nessa subseção trabalharemos com funções de correlação obtidas através de mapas de temperatura construídos segundo uma distribuição aleatória das fontes de flutuações. Na Fig. (6) mostramos quatro funções de correlação $C(\alpha)$ de mapas com a mesma quantidade N de fontes de flutuações e com diferentes parâmetros de separação angular σ_T .

Notamos que para σ_T relativamente alto, não existe distinção evidente entre as funções de correlação obtidas de mapas aleatórios e mapas uniformes, como se vê comparando as Figs. 6a) e 4a), 6b) e 4b). Uma vez que existe muita sobreposição das fontes de flutuação para $\sigma_T > 10^{-2}$, não importa se elas estão distribuídas uniformemente ou aleatoriamente. Outro ponto a

ser observado é a diferença entre as Figs. 6d) e 4d). Enquanto a Fig. 6d) indica uma tendência de $C(\alpha)$ se aproximar de uma função degrau, com $C(\alpha) \rightarrow 0$ para $\alpha \neq 0$, o mesmo não é verdade na Fig. 4d), que possui uma clara simetria em torno de $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Isso mostra que o fato da distribuição das fontes de flutuação ser aleatória é fundamental para que as médias se anulem quando $\alpha \neq 0$.

5.2.1. Momentos de multipolos

Na Fig. 7 mostramos o espectro de multipolos das funções de correlação da Fig. 6, construídos sobre mapas aleatórios. É costume expressar nos gráficos $\frac{l(l+1)C_l}{2\pi}$ em função de l , então também o faremos aqui.

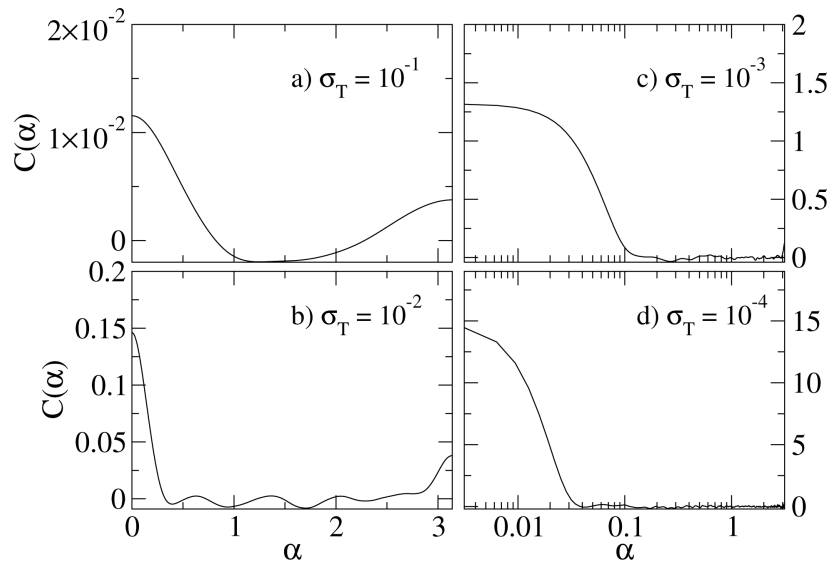


Figura 6 - Funções de correlação de mapas de temperatura com $N = 794$ fontes de flutuação distribuídas aleatoriamente e com diferentes parâmetros de separação angular σ_T .

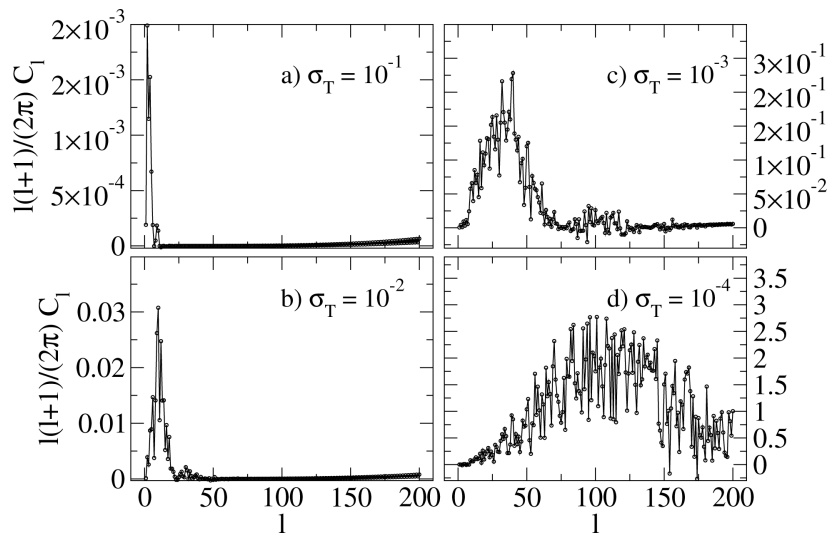


Figura 7 - Momentos de multipolo de mapas de temperatura com distribuição aleatória de flutuações, $N = 794$ fontes de flutuação e diferentes parâmetros de separação angular σ_T .

Observamos o surgimento de um pico ao longo dos espectros, que se desloca ao longo do eixo x e se alarga, tornando-se cada vez menos observável para $\sigma_T \leq 10^{-4}$. Ficou claro na análise dos momentos de multipolo para distribuições uniformes que o pico observado está relacionado com a distância média entre as fontes de flutuação. Não se observa o pico na Fig. 7a) pois a sobreposição das flutuações não permite uma distinção clara das fontes, e logo a determinação de uma distância média. Já a diluição do pico na Fig. 7d) vem da aleatoriedade da distribuição, que resulta em muitos pontos cujas distâncias a outros pontos estão longe da média, o que se traduz em um desvio padrão grande e uma alargamento do pico.

Em contraposição aos resultados da Fig. 5, não é possível associar a posição dos picos nos espectros da Fig. 7 com um valor de l único. Como mencionado na seção 3.1 da distribuição uniforme, distribuir pontos uniformemente de modo que tenhamos $n = 50$ pontos sobre um grande círculo resulta em $N = 794$ pontos distribuídos no total, que é justamente a quantidade de fontes que estivemos utilizando nos mapas expandidos em multipolos até agora. Podemos então pensar que, para uma distribuição aleatória com $N = 794$ pontos, temos aproximadamente 50 pontos sobre um grande círculo qualquer. Porém a aleatoriedade da distribuição faz com que a distância média entre estes picos varie bastante, e a posição dos picos na Fig. 7 refletem justamente este fato.

6. Os resultados da WMAP

A WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) é uma sonda da NASA que possui a missão de estudar a radiação cósmica de fundo e medir suas anisotropias. A WMAP foi nomeada assim em homenagem a David Wilkinson, membro da equipe científica da missão. Até este ano WMAP era o experimento mais preciso na medição da CMB, e desde 2006 vem lançando resultados para a comunidade científica (o experimento Planck [3] divulgou seus dados preliminares no início deste ano, com uma precisão superior àquela do WMAP). Seus dados deram origem ao famoso mapa de temperatura do Universo mostrado na Fig. 8 e ao espectro de multipolos mostrado na Fig. 9.

De modo a caracterizar melhor os dados da WMAP e tentar reproduzi-los, montamos a função de correlação do mapa de temperatura do Universo a partir do espectro de multipolos da Fig. 9. Obviamente, devemos truncar a soma infinita, e no projeto utilizamos multipolos até $l = 1000$ para realizar a conversão do espectro para $C(\alpha)$. O resultado está mostrado na Fig. 10.

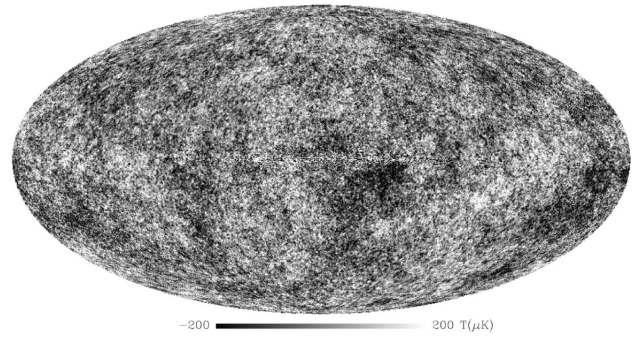


Figura 8 - Mapa de temperatura do Universo medido pela WMAP.

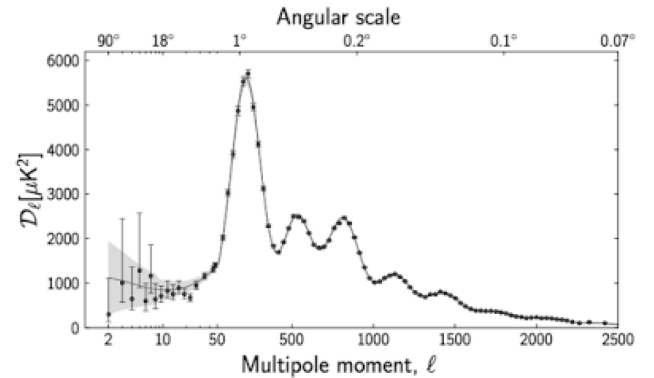


Figura 9 - Espectro de multipolos obtido pela WMAP. Ainda, são mostrados dados de experimentos passados (ACBAR e QUaD). A escala do eixo horizontal não é constante. A linha sólida mostra a curva que melhor se ajusta aos dados baseado no modelo cosmológico de um Universo plano com constante cosmológica Λ . Os erros para baixos momentos de multipolo ($l \approx 10$) vêm da variância cósmica.

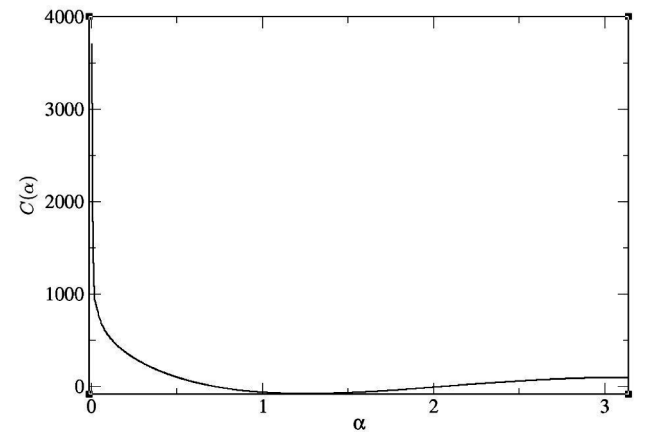


Figura 10 - Função de correlação do mapa de temperatura do Universo obtida através do espectro de multipolos da Fig. 9.

A função de correlação da Fig. 10 é caracterizada por uma queda rápida que logo se suaviza, atinge um mínimo e passa a crescer novamente. Todas funções de correlação das seções anteriores não possuem todas essas características. O melhor que obtivemos foram funções que decaíam, atingiam um mínimo e passavam a crescer novamente, como as Figs. 4a) e 6a). Isso talvez indique que a distribuição de temperatura do Uni-

verso possua um carácter mais próximo de aleatório do que uniforme, o que é de se esperar pela teoria da CMB e pelas condições impostas pela inflação. Estas nossas funções de correlação também possuem uma separação angular relativamente elevada, da ordem de $\sigma_T = 10^{-1}$, o que talvez implique uma quantidade apreciável de sobreposição das flutuações no Universo. Por outro lado, os gráficos das Figs. 4a) e 6a) não possuem uma queda inicial rápida como a da Fig. 10, mas sim suave, então não é possível tirar conclusões exatas sobre a distribuição de temperaturas no Universo apenas com os resultados coletados no projeto. É necessário mais análises para obtermos funções de correlação mais próximas a da Fig. 10. De fato, essa necessidade é sustentada pelo fato de não termos obtido, em nenhum momento ao longo do projeto, um espectro de multipolos como o da Fig. 9 medido pela WMAP.

7. Conclusões

Um mapa de temperatura é caracterizado por basicamente três fatores: a quantidade N de fontes de flutuações que geram as temperaturas em cada ponto do mapa, a maneira de distribuí-las sobre o céu e o fator de separação σ_T que mede o quanto as flutuações de uma fonte se sobrepõem com as flutuações das outras fontes. Existe um quarto fator que não levamos em conta explicitamente: a modelagem das flutuações geradas pelas fontes. No projeto moldamos as flutuações geradas pelas fontes em torno delas através de gaussianas.

Com relação ao modo de distribuição das fontes, utilizamos dois processos, um processo de distribuição aproximadamente uniforme sobre a superfície de esferas, e um de distribuição aleatória sobre o plano D das coordenadas angulares (θ, ϕ) realizada com o auxílio de geradores de números aleatórios.

Com relação ao parâmetro σ_T , ficou claro que ele é fundamental na caracterização da sobreposição das flutuações e na separação espacial das fontes. Valores altos de σ_T homogeneízam a distribuição de temperaturas, enquanto baixos valores de σ_T permitem uma melhor leitura da estrutura da distribuição.

A função de correlação representa uma maneira de medir a correlação entre diferentes pontos do céu. No caso essa correlação é feita através da temperatura, mas nada nos restringe a correlacionar pontos do céu através de outras grandezas, e isso de fato é feito em outras partes da cosmologia. Obviamente, partes do céu sempre estão correlacionadas consigo mesmas, então era de se esperar que $C(0)$ possuísse um máximo, e isso foi observado em todas as funções de correlação medidas, o que suporta a validade do processo computacional utilizado. Ainda, com a variação do parâmetro de separação angular, observamos que, em ambas as distribuições, aleatórias ou uniformes, a diminuição de σ_T aproxima $C(\alpha)$ de zero para $\alpha > 0$, o que indica um descorrelacionamento de diferentes partes do mapa de temperatura.

Realmente, diminuir σ_T torna as gaussianas em torno das fontes mais estreitas, e conseqüentemente diminui a sobreposição das flutuações e a interação das fontes. No caso da distribuição aleatória, $C(\alpha)$ cai a zero para $\alpha > 0$ se σ_T for suficientemente pequeno, o que indica a total descorrelação das fontes provocada pela aleatoriedade da distribuição. No caso uniforme, ainda que, em média, a função de correlação tenda a se anular para ângulos diferentes de zero, existem padrões de simetria e intervalos em que $C(\alpha)$ é substancialmente diferente de zero. Isso é evidência direta da uniformidade da distribuição. O padrão de simetria foi normalmente observado em torno de $\alpha = \pi/2$, o que expõem o fato de diferentes regiões do mapa serem aproximadamente iguais, propriedade da distribuição uniforme. Por outro lado, para σ_T suficientemente grande, notamos que as funções de correlação de distribuições aleatórias e uniformes tornam-se, de modo geral, iguais. Com o aumento do parâmetro de separação angular, a sobreposição das flutuações torna-se cada vez mais pronunciada e a localização das fontes imprecisa, ou seja, as fontes passam a ser deslocalizadas. Conseqüentemente, o carácter da distribuição passa a ser desconsiderável, o que de fato foi confirmado. Confirmamos também que no limite $\sigma_T \rightarrow \infty$ o mapa de temperatura se torna uniforme, e conseqüentemente $C(\alpha) = 0$, já que desaparecem as anisotropias.

O estudo dos mapas de temperatura é facilitado com a expansão da função de correlação em polinômios de Legendre, o que gera o espectro de multipolo do mapa. A principal conclusão a cerca dos espectros de multipolo é que eles dão evidência direta da distância média entre as fontes, do modo em que as fontes foram distribuídas e do grau de sobreposição das flutuações. Caso a sobreposição seja elevada, o que se observa são alguns picos em torno de grandes escalas angulares, tanto nas distribuições aleatórias como uniformes. O fato dos espectros coincidirem em ambas as distribuições é reflexo do que discutimos acima, os mapas se tornam equivalentes se há muita sobreposição. Já os picos na região de baixos valores de l mostram diferenças de temperaturas apenas entre regiões afastadas do mapa, ou seja, em grandes escalas angulares. Para separações angulares pequenas, e conseqüentemente l elevado, a temperatura do mapa é praticamente uniforme, e os momentos de multipolo se anulam. Agora, com a diminuição de σ_T , passa-se a observar estruturas na região de pequena separação angular. O que se concluiu é que picos em torno de l revelam a distância média entre as fontes, de modo que se tenha aproximadamente l fontes num grande círculo da esfera celeste, e logo uma distância angular $2\pi/l$. Esse fato é observado tanto nas distribuições aleatórias como nas uniformes. A diferença entre ambas está na largura dos picos. Como numa distribuição aleatória temos uma quantidade apreciável de fontes cujas distâncias aos seus vizinhos próximos diferem do valor médio, o desvio padrão dos picos torna-

se grande, e logo suas larguras. De maneira oposta, na distribuição uniforme as distâncias entre as fontes permanecem ao redor do valor médio, e o que se tem são picos estreitos. Então o formato dos picos no espectro evidencia o carácter da distribuição das fontes. Agora, um fato interessante observado foi a evidência de distâncias entre fontes não próximas, que se refletem por picos de ordem superior. Com a diminuição de σ_T , fontes mais distantes passam a ser evidentes, e as distâncias entre elas podem ser caracterizadas, por exemplo, por picos em $l = 100$ e $l = 150$ para mapas uniformes com $n = 50$. Obviamente, esse fato ficou claro apenas nas distribuições uniformes, e parece ser improvável de ser observado em distribuições aleatórias, pois a aleatoriedade provavelmente impede a existência de uma distância característica de ordem superior. Por fim, a teoria da CMB prevê um espectro que possui um platô para baixos valores de l , um pico em $l = 220$ e subsequentes picos menores para pequenas separações angulares. A partir do espectro previsto pela teoria, montamos a função de correlação do mapa de temperatura do Universo. O que se observa é uma função que decresce rapidamente com o aumento do ângulo de separação para então torna-se suave até atingir um mínimo e voltar a crescer lentamente. Pode-se concluir de nossa análise que o espectro observado da CMB é um espectro com uma estrutura bastante específica, e não é reproduzível com distribuições simples como as adotadas aqui. Ou seja, qualquer teoria cosmológica deve ter um alto poder de previsão para a formação das anisotropias da CMB. E a comparação com os resultados experimentais é um teste crucial para a sobrevivência de tal teoria.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à FAPESP, pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] E. Komatsu, K.M. Smith, J. Dunkley, C.L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M.R. Nolta, L. Page, D.N. Spergel, M. Halpern, R.S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S.S. Meyer, N. Odegard, G.S. Tucker, J.L. Weiland, E. Wollack, E.L. Wright *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011).

- [2] N. Jarosik, C.L. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M.R. Greason, M. Halpern, R.S. Hill, G. Hinshaw, A. Kogut, E. Komatsu, D. Larson, M. Limon, S.S. Meyer, M.R. Nolta, N. Odegard, L. Page, K.M. Smith, D.N. Spergel, G.S. Tucker, J.L. Weiland, E. Wollack, E.L. Wright, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 14, (2011).

- [3] P.A.R. Ade, N. Aghanim, M.I.R. Alves, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, H. Aussel, C. Baccigalupi, A.J. Banday, R.B. Barreiro, R. Barrena, M. Bartelmann, J.G. Bartlett, N. Bartolo, S. Basak, E. Battaner, R. Battye, K. Benabed, A. Benoît, A. Benoit-Lévy, J.-P. Bernard, M. Bersanelli, B. Bertin-court, M. Bethermin, P. Bielewicz, I. Bikmaev, A. Blanchard, J. Bobin, J.J. Bock, H. Böhringer, A. Bonaldi, L. Bonavera, J.R. Bond, J. Borrill, F.R. Bouchet, F. Boulanger, H. Bourdin, J.W. Bowyer, M. Bridges, M.L. Brown, M. Bucher, R. Burenin, C. Burigana, R.C. Butler, E. Calabrese, B. Cappellini, J.-F. Cardoso, R. Carr, P. Carvalho, M. Casale, G. Castex, A. Catalano, A. Challinor, A. Chamballu, R.-R. Chary, X. Chen, *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1303.5062 [astro-ph.CO].

- [4] B.A. Reid, W.J. Percival, D.J. Eisenstein, L. Verde, D.N. Spergel, R.A. Skibba, N.A. Bahcall, T. Budavari, M. Fukugita, J.R. Gott, J.E. Gunn, Z. Ivezic, G.R. Knapp, R.G. Kron, R.H. Lupton, T.A. McKay, A. Meiksin, R.C. Nichol, A.C. Pope, D.J. Schlegel, D.P. Schneider, M.A. Strauss, C. Stoughton, A.S. Szalay, M. Tegmark, D.H. Weinberg, D.G. York, I. Zehavi, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **404**, 60-85 (2010).

- [5] V.F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, New York, 2005).

- [6] J.B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2003).

- [7] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology* (Wiley, Chippingham, 2009, 2nd ed).

- [8] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, San Diego, 2003).