

Proposta de atividade para o estudo de movimentos bidimensionais nos cursos introdutórios de Física

Proposal of activity for the study of two-dimensional movements in the introductory courses of Physics

Marcos Melo de Almeida^{*1}

¹Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA, Brasil

Recebido em 14 fevereiro, 2019. Revisado em: 27 de maio, 2019. Aceito em: 4 de junho, 2019.

Neste artigo apresento uma proposta sobre a utilização do algoritmo de Verlet no estudo de lançamentos bidimensionais nos cursos universitários introdutórios de Física. A proposta visa, ao mesmo tempo que estudamos os processos dinâmicos sobre uma partícula movendo-se sob a influência de uma força conhecida, analisar os conceitos matemáticos de limite e derivada de uma função. Tais conceitos matemáticos, apesar de fundamentais e básicos, apresentam uma dificuldade a mais para os estudantes dos cursos introdutórios, visto que para muitos deles o curso de Física é o primeiro contato com estes conceitos.

Palavras-chave: Lançamentos, força de resistência, algoritmo de Verlet.

In this paper I present a proposition for the application of the Verlet algorithm to the two-dimensional projectile motion in College Introductory Physics Courses. This work intends to study dynamical process on a particle moving under the influence of a known force and analyze the mathematical concepts of limit and derivative of a function. These mathematical concepts, besides fundamental and basic ones, present one more difficulty to students in Introductory Physics Courses, since it is probably the first time students have contact with them.

Keywords: Projectile motion, resistive force, Verlet algorithm.

1. Introdução

Para muitos estudantes universitários da área de Ciências e Tecnologias, os cursos introdutórios de Física são o primeiro contato que estes têm com conceitos matemáticos básicos para as ciências: o limite e a derivada de uma função. A minha experiência lecionando a disciplina para o público formado por recém-ingressos na Universidade tem me mostrado que uma das principais angústias destes com relação ao curso são estes conceitos, que para grande maioria dos estudantes não foram vistos ainda nas disciplinas introdutórias de Cálculo Diferencial e Integral.

Pensando em trabalhar estes conceitos com os estudantes de uma maneira mais aplicada, proponho a utilização do algoritmo de Verlet para determinação das trajetórias de projéteis movimentando-se próximo a superfície terrestre. O movimento de lançamento de projéteis é familiar para estes estudantes, que já tiveram contato com as equações que descrevem este movimento durante o Ensino Médio e por isto não deve se apresentar como uma barreira para o desenvolvimento da atividade.

Na tentativa de aproximar o tema do cotidiano discente, estudos de forças de resistência sobre móveis em um meio tem um interesse prático em alguns setores da sociedade: seja no desenho de automóveis, aeronaves e embarcações,

onde pode-se ter como objetivo a economia no consumo de energia ou o aumento da velocidade que estes podem desenvolver em um trajeto; seja no esporte, onde atletas tentam quebrar marcas utilizando trajes que reduzam a influência desta força sobre eles. Um dos casos mais polêmicos e comentados foi o dos “super maiôs” utilizados pelos nadadores nas Olimpíadas de Pequim em 2008¹.

Contextualizando historicamente o tema, as críticas ao processo de antiperistasis proposto por Aristóteles para explicação do movimento de corpos lançados originaram no século XIV a Teoria do *Impetus* [1, 2], proposta pelo francês Jean Buridan e colaborada por outros pensadores. Segundo a teoria, uma “força” seria impressa ao corpo por um lançador, o movimento seria mantido até que esta “força motora” fosse consumida por influências externas, como a gravidade ou a resistência do meio. Dentro do contexto de debate sobre esta força impressa, desde a Antiguidade com as ideias de Hiparco, uma questão surgiu sobre a forma como esta força seria extinta. Alguns filósofos como Filoponos de Alexandria, no século VI, propõe que esta força era auto-extinguível quando o movimento dava-se no vazio devido a finitude do universo não permitir um movimento retilíneo indefinidamente. Uma questão subjacente a este problema é o papel da

¹Sobre os trajes, veja no artigo de 4 de julho de 2018 da revista Super Interessante, intitulado “Como funcionam os novos maiôs usados na natação?”, disponível em <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-funcionam-os-novos-maios-usados-na-natacao/>.

*Endereço de correspondência: marcosma@ufba.br.

resistência do meio, levando a considerações sobre a existência ou não do vácuo. Mais tarde, no século XVII, esta teoria desempenhará um papel importante na construção de ideias que formariam a base da revolução científica iniciada por Galileu.

Um dos aspectos deste trabalho é a utilização de algoritmos numéricos em cursos introdutórios de Física, uma ferramenta raramente empregada por professores em sala de aula. Acredito que alguns dos colegas devem achar a ferramenta inapropriada ou mesmo de difícil utilização por recém-ingressos na Universidade, supondo que muitos dos estudantes não conhecem uma linguagem computacional para a sua implementação. O algoritmo de Verlet apresenta uma implementação bastante simples, podendo o estudante utilizar qualquer *software* de planilhas eletrônicas, o qual provavelmente ele já tem alguma intimidade, que pode ser encontrado para os diferentes sistemas operacionais aos quais ele tem acesso. Desta forma, o estudante não precisa conhecer nenhuma das linguagens de programação comumente utilizadas pela comunidade científica para o desenvolvimento da atividade.

Utilizando o teorema do valor médio [3], introduzo uma expressão para a determinação das derivadas de primeira ordem de uma função qualquer a partir do valor da função tomado em dois pontos diferentes na seção 2. Esta expressão, que também é uma aproximação, nos permitirá encontrar uma relação de recorrência para a determinação da trajetória da partícula submetida a uma aceleração conhecida. Esta abordagem para obtenção da relação de recorrência do algoritmo tem a vantagem de utilizar teoremas e conceitos que eles estão estudando nas disciplinas introdutórias de Cálculo, permitindo a discussão da validade da aproximação da derivada de uma função em um ponto a partir dos resultados encontrados, comparado-os com as soluções já conhecidas.

Na seção 3 apresentamos em detalhes o algoritmo de Verlet, a partir de uma abordagem utilizando a expansão das funções de interesse em séries de Taylor. A partir da expansão, deduzimos as equações de recorrência e discutimos a precisão da aproximação com relação ao tamanho da discretização temporal das equações. O erro cometido nesta primeira aproximação é conhecido como erro local. Analisaremos também um outro tipo de erro encontrado nos resultados devido às recursões realizadas. Este último sendo conhecido como erro acumulado. Veremos que enquanto a ordem de grandeza dos erros locais permanece estável, a ordem de grandeza do erro acumulado cresce com o número de recursões realizadas.

O método será implementado primeiramente na seção 4 para o estudo do movimento de projéteis sem a resistência do ar. Com os resultados obtidos é possível realizarmos uma comparação com as soluções exatas determinadas analiticamente na disciplina e discutir a partir do parâmetro Δt , o intervalo de tempo entre dois instantes, o erro cometido com a aproximação, a vali-

dade da aproximação e consequentemente os conceitos de limite e derivada.

Uma lacuna deixada nos livros didáticos dos cursos introdutórios de Física é uma discussão menos superficial dos efeitos da resistência do meio, também conhecida como força de arrasto [4, 5], sobre os corpos se movendo nele.

Alguns trabalhos sobre lançamentos tem sido publicados em revistas nacionais dedicadas ao Ensino de Física. Encontramos trabalhos teóricos, que levam em conta a discussão sobre a determinação de faixas de segurança para utilização de explosivos a partir da envoltória de uma família de curvas [6], ou tratam o problema do lançamento com resistência de forma qualitativa [7] ou simplificando a resistência do meio a uma força horizontal e constante devido a ação do vento [8]. As abordagens utilizadas nestes trabalhos permitem desacoplar os movimentos horizontal e vertical realizados pelo projétil e determinar trajetórias analíticas, assumindo que a força de resistência é proporcional ao vetor velocidade. Trabalhos experimentais voltados ao ensino tem levado em consideração a montagem de aparatos que sejam utilizados pelos estudantes, onde a construção de dispositivos eletrônicos de medida com interface para computadores [9, 10] ou montagem de baixo custo [11] foram utilizadas no estudo de lançamentos sem a resistência do ar.

Pela complexidade em determinar as soluções do ponto de vista analítico, devido ao acoplamento entre as componentes da velocidade quando a força de arrasto é introduzida na modelagem, muito pouco é discutido em sala ou fora dela sobre a influência e importância destas forças nos movimentos que observamos no nosso cotidiano. Proponho uma modificação no método de Verlet, introduzindo uma aceleração dependente da velocidade para a modelagem do movimento de lançamento com a resistência do ar. As modificações são mínimas, precisando apenas introduzir o cálculo da velocidade do projétil. Uma das vantagens do método de Verlet para determinação da dinâmica de partículas submetidas a uma força conhecida é que a determinação das velocidades não é necessário, mas para modelarmos com uma força dependente da velocidade será obrigatória a sua determinação. Com os resultados encontrados podemos analisar o efeito da resistência do ar na trajetória e nas quantidades cinemáticas de interesse quando comparadas com os resultados do movimento sem resistência. Acreditamos que este trabalho pode ser também utilizado em um segundo momento do curso, quando uma discussão da dissipação da energia mecânica por meio de forças dependentes da velocidade surgir. Como as posições e velocidades serão determinadas pelo método, podemos calcular a energia mecânica em diferentes momentos e analisar o seu comportamento. Este problema não será abordado neste trabalho. Os resultados são apresentados na seção 5.

Pela simplicidade do método e fácil implementação via uma planilha eletrônica, acredito que o método pode ser

empregado no estudo de outros problemas encontrados também nos cursos introdutórios.

Apresento as considerações finais sobre o trabalho na seção 6, além de algumas questões que jugo importantes de serem tratadas com os estudantes durante a realização da atividade. Um apêndice com o código desenvolvido a partir do programa SCILAB é encontrado em um material suplementar disponível online.

2. Quantidades cinemáticas e a equação de recorrência

Apresento nesta seção, uma maneira de derivar as equações de recorrência do algoritmo de Verlet baseada na utilização dos conceitos de limite e derivada e de teoremas associados a estes conceitos. Com isto pretendo tornar o desenvolvimento do método compreensível ao estudante nos cursos universitários introdutórios de Física. A forma apresentada nos permite discutir com os estudantes, a partir dos resultados encontrados, a validade das aproximações realizadas, assim como revisar os conceitos matemáticos a partir de uma abordagem não usual, possibilitando aos estudantes mais um momento de reflexão sobre este tema.

A velocidade de uma partícula é definida como a derivada temporal do vetor posição

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}$$

onde o vetor posição $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ está escrito em coordenadas cartesianas.

Da definição da derivada de uma função de uma variável temos que

$$\frac{df(t_0)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad (1)$$

Assumindo que a função $f(t)$ é uma função contínua dentro do intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ e diferenciável no intervalo aberto $(t_0, t_0 + \Delta t)$, temos da aplicação do teorema do valor médio que

$$f'(\bar{t}) = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

onde \bar{t} é um valor pertencente ao intervalo $(t_0, t_0 + \Delta t)$.

2.1. Demonstração

Assumamos a função auxiliar

$$F(t) = f(t) - \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}t$$

Como $f(t)$ é uma função contínua e diferenciável dentro do intervalo $(t_0, t_0 + \Delta t)$, temos que $F(t)$ também é. Assim sendo, ambas são limitadas neste intervalo. Isto é, $F(t)$ possui um valor mínimo l e um valor máximo L .

Se l for igual a L , temos que a função $F(t)$ é constante e sua derivada é nula, satisfazendo o teorema do valor médio. Se $l \neq L$, temos que para um determinado valor \bar{t} , a função satisfaz $F(\bar{t}) = L$. Para valores de $t < \bar{t}$ temos que

$$\frac{F(t) - F(\bar{t})}{t - \bar{t}} \geq 0, \quad (2)$$

enquanto para valores de $t > \bar{t}$ temos que

$$\frac{F(t) - F(\bar{t})}{t - \bar{t}} \leq 0. \quad (3)$$

Tomando o limite lateral a esquerda da Equação (2)

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \frac{F(t) - F(\bar{t})}{t - \bar{t}} = F'(\bar{t}) \geq 0, \quad (4)$$

e o limite lateral a direita da Equação (3)

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} \frac{F(t) - F(\bar{t})}{t - \bar{t}} = F'(\bar{t}) \leq 0. \quad (5)$$

Como $F(t)$ é contínua e diferenciável, a única solução possível para as duas desigualdades acima é se, e somente se, $F'(\bar{t}) = 0$. Um resultado idêntico é encontrado assumindo o valor mínimo l de $F(t)$. Consequência imediata deste resultado é que

$$F'(\bar{t}) = f'(\bar{t}) - \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = 0 \Rightarrow$$

$$f'(\bar{t}) = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Demonstrando o teorema do valor médio.

2.2. Equação de recorrência

Do teorema do valor médio podemos verificar que quanto menor for o valor de Δt , maior será a aproximação dos valores de $t_0 + \Delta t$ e \bar{t} com t_0 . Assim, quanto menor for o valor de Δt melhor será a aproximação

$$f'(t_0) \approx \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}, \quad (6)$$

tornando-se uma igualdade no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ (Definição da derivada, Equação (1)).

Discretizando o intervalo de tempo no qual estamos interessados em descrever o movimento, tal que $t_i = t_0 + i\Delta t$, onde t_0 é o instante inicial, quase sempre tomado nulo, e $i = 1, 2, \dots, n$, podemos aproximar a aceleração a qual o projétil encontra-se submetido pela Equação (6),

$$a_y(t_i) = \frac{v_y(t_{i+1}) - v_y(t_i)}{\Delta t}, \quad (7)$$

onde por simplicidade escrevemos apenas a expressão da componente y da aceleração, o mesmo deverá ser feito para a componente $a_x(t)$. Como esperamos que as

derivadas sejam contínuas, os dois limites laterais que a definem devem ser iguais, de forma que

$$a_y(t_i) = \frac{v_y(t_i) - v_y(t_{i-1})}{\Delta t} \quad (8)$$

também deve ser uma boa aproximação para a aceleração no tempo t_i . Observe que no caso do lançamento sem a resistência do ar, as Equações (7) e (8) são exatas já que a aceleração a_y é assumida constante.

Tomando a aproximação dada pela Equação (6) para a velocidade, e substituindo na Equação (8), temos

$$a_y(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1}))}{(\Delta t)^2} \quad (9)$$

Conhecendo a aceleração para cada instante de tempo t_i , podemos escrever a relação de recorrência para as posições calculadas em tempos sucessivos como

$$y(t_{i+1}) = 2y(t_i) - y(t_{i-1}) + a_y(t_i)(\Delta t)^2 \quad (10)$$

Esta é a equação principal do algoritmo de Verlet para determinação da trajetória da partícula submetida a uma aceleração $a_y(t)$. Importante salientar que apesar da Equação (8) ser exata para o lançamento sem resistência, a Equação (9) não é, já que a velocidade estimada pela Equação (6) possui um erro. Atenção deve ser dada a este erro que se propagará na determinação dos diferentes $y(t_{i+1})$, constituindo o que chamaremos de erro acumulado na determinação das coordenadas. Na próxima seção discutiremos um pouco mais sobre este problema.

3. O algoritmo de Verlet

O algoritmo de Verlet foi proposto em 1967 por Loup Verlet [12] para solução do problema da dinâmica de um conjunto de algumas centenas de partículas que interagem aos pares submetidas a um potencial de Lennard-Jones. Uma vez que o potencial é conhecido, podemos determinar a força com a qual as partículas interagem dada por menos o gradiente do potencial. Assim, partindo da Segunda Lei de Newton para o movimento de uma partícula, temos que

$$\vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{F}/M,$$

determinando a aceleração a que a partícula está submetida.

O método pode ser enquadrado dentro do arcabouço do que chamamos de método das diferenças finitas, que consiste em escrever as derivadas de uma função como uma combinação linear dos valores dela em um domínio discretizado. Um exemplo é a determinação da derivada segunda no tempo da coordenada cartesiana $y(t)$, associada com a aceleração na direção y , em uma malha de pontos igualmente espaçados por um intervalo de tempo Δt , Equação (9).

Tomando uma função $f(t)$ em um instante de tempo $t + \Delta t$, podemos escrever

$$f(t + \Delta t) = f(t) + f'(t)\Delta t + \frac{f''(t)}{2!}\Delta t^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(t)}{m!}(\Delta t)^m + R_m(\bar{t}; \Delta t)$$

onde $f^{(m)}(t)$ representa a m -ésima derivada de f e $R_m(\bar{t}; \Delta t)$ é o resto de Lagrange para estimativa do erro ao truncar a expansão de Taylor em um polinômio de ordem m , que é escrito como

$$R_m(\bar{t}; \Delta t) = \frac{f^{(m+1)}(\bar{t})}{(m+1)!}(\Delta t)^{m+1} \quad (11)$$

onde \bar{t} é um valor de t pertencente ao intervalo $(t, t + \Delta t)$.

Aplicando este resultado a componente y da posição, medida em instantes de tempo $t_i + \Delta t$ e $t_i - \Delta t$, encontramos as equações:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \dot{y}(t_i)\Delta t + \frac{\ddot{y}(t_i)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\ddot{\ddot{y}}(t_i)}{3!}(\Delta t)^3 + R_3(\bar{t}_+; \Delta t)$$

$$y(t_{i-1}) = y(t_i) - \dot{y}(t_i)\Delta t + \frac{\ddot{y}(t_i)}{2!}(\Delta t)^2 - \frac{\ddot{\ddot{y}}(t_i)}{3!}(\Delta t)^3 + R_3(\bar{t}_-; -\Delta t)$$

Somando ambas equações acima temos:

$$y(t_{i+1}) = 2y(t_i) - y(t_{i-1}) + \ddot{y}(t_i)(\Delta t)^2 + E.$$

A mesma Equação de recorrência (10) encontrada na seção anterior, exceto pelo erro E que deve ser da ordem de grandeza de $R_3(\bar{t}, \Delta t)$. A estimativa representada por E é conhecida também como erro local, estando associada ao erro cometido na determinação de uma função em um ponto $t + \Delta t$ por valores da função em tempos anteriores. A ordem de grandeza do erro local será considerada da mesma ordem de grandeza que $(\Delta t)^{m+1}$. Note que quanto menor o Δt , menor deve ser o erro local cometido na estimativa das coordenadas.

Um outro erro encontrado no processo de determinação das coordenadas é devido a propagação dos erros cometidos em determinações anteriores no cálculo da coordenada atual. Este erro é conhecido como erro acumulado.

Voltemos a Equação de recorrência (10), com a qual calcularemos $y(t_2)$ em função de $y(t_1) = y_1 + \epsilon$ e $y(t_0) = y_0$. Vamos assumir que $y(t_0)$ é uma quantidade sem nenhuma incerteza em sua determinação, y_0 , obtida da condição inicial, e que $y(t_1)$ é uma quantidade que apresenta um erro local ϵ de sua determinação a partir de y_0 . A aceleração também será considerada conhecida exatamente, isto é, sem incertezas. A estimativa para $y(t_2)$ pode ser escrita como

$$y(t_2) = 2y_1 + 2\epsilon - y_0 + a_y(t_1)(\Delta t)^2 = y_2 + 2\epsilon,$$

onde o erro acumulado em $y(t_2)$ é o dobro do erro em $y(t_1)$. Prosseguindo na determinação das coordenadas para tempos posteriores, podemos concluir que o erro acumulado na estimativa de $y(t_3)$ será

$$y(t_3) = 2y_2 + 4\epsilon - y_1 - \epsilon + a_y(t_2)(\Delta t)^2 = y_3 + 3\epsilon,$$

e por indução teríamos que

$$y(t_{i+1}) = 2y_i + 2i\epsilon - y_{i-1} - (i-1)\epsilon + a_y(t_i)(\Delta t)^2 = y_{i+1} + (i+1)\epsilon,$$

isto é, o erro acumulado aumenta linearmente com relação ao número de recursões realizadas. Para um número de algumas centenas ou milhares de recursões, o erro acumulado na estimativa da última coordenada será no mínimo (assumi acima que o erro introduzido deveu-se a estimativa de $y(t_1)$) duas ou três vezes a ordem de grandeza do erro local, sendo este último praticamente irrelevante na composição do erro a partir de um determinado número de recursões. Porém, um erro local menor na estimativa das primeiras coordenadas fornecerá erros acumulados menores, já que estes também são proporcionais ao erro local.

4. O lançamento bidimensional

Passemos agora a estudar os casos de lançamentos bidimensionais nas proximidades da superfície terrestre, de maneira tal que possamos aproximar a força gravitacional, a qual o projétil está submetido, pela força peso $\vec{F} = M\vec{g}$, onde a aceleração da gravidade é considerada constante: $\vec{g} = (-9,81 \text{ m/s}^2)\hat{j}$.

4.1. Movimento sem resistência do ar

Como a única força a atuar sobre o projétil é a força peso, temos que a aceleração percebida pelo projétil é \vec{g} . Podemos escrever a Equação de recorrência (10) para estimativa da coordenada y como

$$y(t_{i+1}) = 2y(t_i) - y(t_{i-1}) - |\vec{g}|(\Delta t)^2,$$

onde consideramos o erro E cometido desprezível. Veremos na seção 5 que isto depende muito do tamanho de Δt

Para o caso da coordenada x , temos que a aceleração percebida é nula.

$$x(t_{i+1}) = 2x(t_i) - x(t_{i-1}) = x(t_i) + \Delta x(t_{i-1} \rightarrow t_i) \quad (12)$$

onde $\Delta x(t_{i-1} \rightarrow t_i) = x(t_i) - x(t_{i-1})$ é o incremento da coordenada x_i para determinação de x_{i+1} .

A relação de recorrência do método de Verlet nos fornece uma estimativa para as coordenadas em um tempo t_{i+1} se conhecemos a aceleração em suas respectivas direções e as coordenadas para dois instantes de tempo anteriores: t_i e t_{i-1} . Um problema surge então para as

determinações de $y(t_1)$ e $x(t_1)$, visto que conhecemos apenas $y(t_0)$ e $x(t_0)$. Este problema é contornado a partir da condição inicial para as componentes da velocidade.

Utilizando a Equação (6) para aproximar a velocidade inicial, temos que

$$v_y(t_0) \approx \frac{y(t_1) - y(t_0)}{\Delta t}$$

o que implica em que afirmar que

$$y(t_1) = y(t_0) + v_y(t_0)\Delta t. \quad (13)$$

Uma vez encontrados $y(t_0)$ e $y(t_1)$ podemos determinar as outras coordenadas para tempos posteriores. Para o caso da coordenada x , temos que

$$x(t_1) = x(t_0) + v_x(t_0)\Delta t. \quad (14)$$

A igualdade acima apresenta a mesma relação encontrada na Equação (12), onde o incremento $\Delta x(t_1 \rightarrow t_0) = v_x(t_0)\Delta t$. Analisando o incremento $\Delta x(t_2 \rightarrow t_1)$ a partir da igualdade acima aplicada na Equação (12), encontramos

$$\Delta x(t_1 \rightarrow t_2) = x(t_2) - x(t_1) = x(t_1) - x(t_0) = v_x(t_0)\Delta t.$$

Por indução podemos analisar que os incrementos para a variável x , caso o passo de tempo Δt se mantenha constante, serão constantes. Uma característica do Movimento Retilíneo Uniforme descrito por esta coordenada. O algoritmo de Verlet descreve a coordenada x para o movimento de lançamento sem resistência de maneira exata.

4.2. Movimento com resistência do ar

No caso do movimento com resistência do ar, a aceleração passa a depender do módulo da velocidade que o projétil encontra-se. Com isto, modificações no algoritmo de Verlet devem ser implementadas para permitir o cálculo do módulo da velocidade do projétil.

Como definiu Nussenzveig [4], a força de resistência a qual um corpo é submetido pela ação de um fluido em que ele encontra-se imerso e em movimento relativo é dada por

$$\vec{F}_r = -(A|\vec{v}| + B|\vec{v}|^2)\hat{v} \quad (15)$$

onde \hat{v} é o versor com mesma direção e sentido do vetor velocidade, os parâmetros A e B são constantes que dependem de características do projétil e do meio no qual este encontra-se. Notemos que o módulo da força \vec{F}_r depende do módulo do vetor velocidade, isto é, depende de $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Esta força, acopla os movimentos nas direções perpendiculares, de forma que o princípio da independência dos movimentos proposta por Galileu não é mais válida. Por questões de simplicidade, irei assumir que $A = 0$, assim como faz Halliday [5], de forma que a força de resistência dependa apenas do quadrado do

módulo da velocidade. Isto não acarretará mudanças nas principais características do movimento estudado.

Escrevendo a Equação de recorrência (10) para a coordenada y temos

$$y(t_{i+1}) = 2y(t_i) - y(t_{i-1}) + a_y(t_i)(\Delta t)^2$$

$$y(t_{i+1}) = 2y(t_i) - y(t_{i-1}) - [|\vec{g}| + b|v(t_i)|v_y(t_i)](\Delta t)^2, \quad (16)$$

onde $b = B/M$. E para a coordenada x

$$x(t_{i+1}) = 2x(t_i) - x(t_{i-1}) - b|v(t_i)|v_x(t_i)(\Delta t)^2 \quad (17)$$

Agora para encontrar as coordenadas em um tempo t_{i+1} , além das coordenadas nos tempos t_i e t_{i-1} , temos que conhecer a velocidade no tempo t_i . Assim, conhecida a velocidade em um tempo t_{i-1} , a partir da Equação (6) podemos aproximar a aceleração nas direções y e x por

$$a_y(t_{i-1}) = \frac{v_y(t_i) - v_y(t_{i-1})}{\Delta t}$$

$$a_x(t_{i-1}) = \frac{v_x(t_i) - v_x(t_{i-1})}{\Delta t}$$

e as componentes da velocidade podem ser dadas por

$$v_y(t_i) = v_y(t_{i-1}) - [|\vec{g}| + b|v(t_{i-1})|v_y(t_{i-1})] \Delta t \quad (18)$$

$$v_x(t_i) = v_x(t_{i-1}) - b|v(t_{i-1})|v_x(t_{i-1}) \Delta t \quad (19)$$

O algoritmo de Verlet modificado passa então a ser:

1. Das condições iniciais determine $\vec{r}(t_1)$ e $\vec{v}(t_1)$.
2. Para $i \geq 1$, calcule $\vec{r}(t_{i+1})$ com auxílio das Equações (16) e (17).
3. Calcule $\vec{v}(t_{i+1})$ como auxílio das Equações (18) e (19).
4. Se t_{i+1} for o tempo necessário, pare. Se não, volte a instrução 2.

5. Resultados

Utilizei o *software* SCILAB² para desenvolvimento do código. Uma versão semelhante ao código usado pode ser encontrada em [13]. A parte central do código que desenvolvi encontra-se no material suplementar disponível online. Foram omitidos apenas os comandos para apresentação dos diferentes gráficos encontrados nesta seção.

Começo a apresentar os resultados encontrados utilizando o algoritmo de Verlet modificado, mas antes precisamos discutir a validade da aproximação feita na

Equação de recorrência (10). Para esta discussão realizamos os cálculos para diferentes passos de tempo Δt para o caso em que o projétil possui uma massa de $1,0 \text{ kg}$ e $b = 0,0 \text{ kg/m}$, caso do lançamento sem resistência. O valor exato das quantidades calculadas aqui são conhecidas e é assunto dos diferentes livros didáticos de Mecânica para o Ensino Médio. As condições iniciais do problema são dadas por

$$\vec{r}_0 = (0, 0 \text{ m})\hat{i} + (0, 0 \text{ m})\hat{j},$$

$$|\vec{v}_0| = 20,0 \text{ m/s e}$$

$$\theta_0 = 45,0^\circ,$$

onde $|\vec{v}_0|$ é o módulo da velocidade inicial e θ_0 é o ângulo de lançamento do projétil.

A aproximação proposta pela Equação (6) deve ser melhor quanto menor for o valor do passo de tempo Δt . A convergência dos resultados numéricos para os cálculos exatos com a diminuição do passo temporal Δt , como visto na Figura 1, pode ser explicada a partir da validade da Equação (6), que assegura a igualdade apenas no limite em que o passo temporal tende a zero.

Em particular, no caso do lançamento sem atrito, temos que a Equações (7) e (8) utilizadas na derivação da Equação de recorrência na seção 2 são exatas, já que a aceleração gravitacional é assumida constante. Porém, o uso da Equação (13) para estimativa de $y(t_1)$, introduz um erro local da ordem de grandeza de $(\Delta t)^2$, estimado pela Equação (11) aproximadamente igual a $4,9 \times 10^{-4} \text{ s}$, para um passo de tempo $\Delta t = 0,01 \text{ s}$.

A Figura 1 nos apresenta diferentes cálculos das trajetórias para diferentes passos temporais. Uma análise das primeiras estimativas das coordenadas nos mostra que os erros para os valores calculados são pequenos, mas crescem com o aumento do número de passos. Este aumento do erro para as coordenadas das trajetórias é uma evidência do aumento do erro acumulado com o número de recursões. Uma estimativa do erro acumulado é dada na Figura 2, que trataremos a seguir. Voltando aos cálculos das trajetórias, podemos observar que quanto maior Δt , maior o erro acumulado ao final das recursões. Uma melhor estimativa das coordenadas iniciais a partir

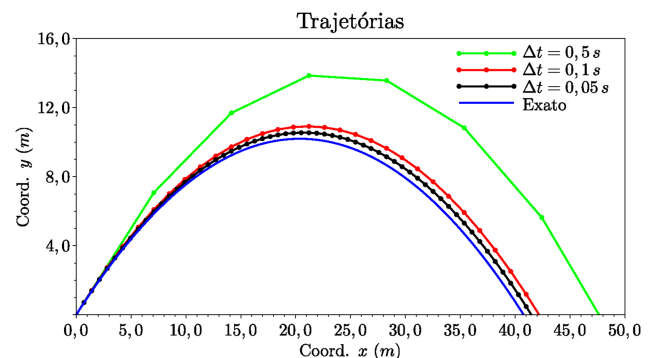


Figura 1: Comparação entre os cálculos das trajetórias para diferentes Δt e o valor exato.

²É um *software* que pode ser baixado gratuitamente da internet no sítio <https://www.scilab.org/>. Existem versões disponíveis tanto para LINUX quanto para WINDOWS.

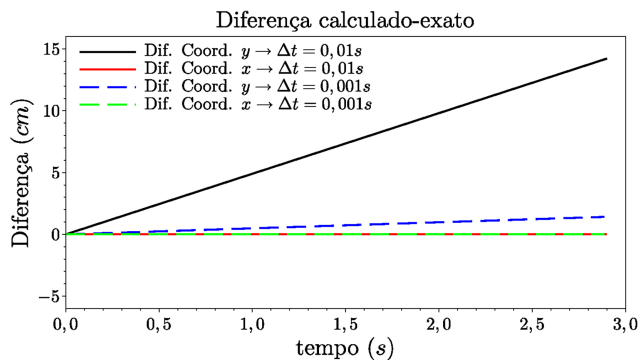


Figura 2: Diferença entre os valores calculados das coordenadas do projétil e o valor exato para dois diferentes valores de Δt .

de um menor erro local, promove um cálculo mais preciso. Esta melhor estimativa é encontrada diminuindo-se o passo temporal, que é uma consequência da validade da aproximação da derivada, que deve ser calculada em um processo de limite, pela razão entre duas diferenças finitas.

O professor pode utilizar estes resultados em uma discussão com estudantes sobre os resultados por eles obtidos, aprofundando a discussão sobre a definição dos conceitos matemáticos de limite e derivada.

Utilizando os passos de tempo $\Delta t = 0,01 s$ e $\Delta t = 0,001 s$, comparamos os resultados obtidos com os valores exatos para as coordenadas do vetor posição. A Figura 2 apresenta o erro cometido neste cálculo.

Como era esperado, o movimento uniforme descrito pela coordenada x é exatamente descrito pela equação de recorrência. O erro local cometido na estimativa de $x(t_1)$ pela Equação (14) é nulo e independente de Δt , visto que ele deve ser proporcional a aceleração nesta direção.

Porém, o erro cometido na determinação da coordenada y aumenta de forma linear com o passo, como mostrado na seção 3. Apesar deste acúmulo no erro, este não ultrapassa os $15 cm$ na descrição do lançamento em questão. Apresentando uma aproximação muito boa se compararmos com o valor teórico da altura máxima atingida no lançamento,

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_{0y}^2}{2|\vec{g}|} = \frac{|v_0|^2 \sin^2(\theta_0)}{2|\vec{g}|} = 10,19 m,$$

com os determinados numericamente, $10,26 m$ e $10,20 m$ respectivamente para passos temporais de $0,01 s$ e $0,001 s$. O erro relativo no primeiro caso é menor que 1% , e no segundo caso é menor que $0,1\%$.

Os valores encontrados para o tempo de retorno ao solo e o alcance do projétil foram respectivamente $2,89 s$ e $40,87 m$, para um $\Delta t = 0,01 s$ e $2,884 s$ e $40,786 m$, para um $\Delta t = 0,001 s$, que encontram-se em excelente

acordo com os valores teóricos:

$$t_r = 2v_{0y}/|\vec{g}| = 2v_0 \sin(\theta_0)/|\vec{g}| = 2,883 s$$

$$x_m = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{|\vec{g}|} = \frac{|\vec{v}_0|^2 \sin(2\theta_0)}{|\vec{g}|} = 40,775 m,$$

apresentando erros relativos menores que $0,5\%$ e $0,05\%$ para o tempo de retorno e alcance respectivamente para $\Delta t = 0,01 s$ e $\Delta t = 0,001 s$.

Uma vez apresentado o algoritmo e que os seus resultados encontram-se com excelente acordo com a teoria, passamos a tratar o caso do movimento do projétil com resistência. Os erros cometidos nestes cálculos podem ser considerados da mesma ordem de grandeza que os cometidos nos cálculos sem resistência. Uma possível nova fonte de erro poderia ser a determinação da aceleração a partir da estimativa das velocidades, mas você pode notar que o erro cometido na determinação da aceleração é de ordens de grandeza menor que o das coordenadas. Isto decorre do fato do novo termo da aceleração associado a força de resistência ser pequeno comparado a aceleração da gravidade (b é da ordem de grandeza de Δt) e ser ainda multiplicado por $(\Delta t)^2$, como apresentado nas Equações (16) e (17).

A Figura 3 apresenta diferentes trajetórias para um projétil lançado com as mesmas condições iniciais, para diferentes valores do parâmetro b .

Devido a resistência encontrada pelo projétil, a trajetória já não é mais parabólica como no caso sem resistência. A trajetória apresenta um movimento descendente que não é mais espelhado pelo movimento ascendente (simetria da parábola). Quanto maior for o parâmetro b e consequentemente a intensidade da força de resistência sofrida pelo projétil, menor é a altura máxima atingida e menor é o alcance do projétil. Esta “distorção” entre os movimentos pode ser vista a partir dos efeitos nas componentes da velocidade do projétil. É o que apresento nas Figuras 4 e 7.

Na Figura 4 observamos que a componente v_y da velocidade do projétil apresenta um comportamento diferente

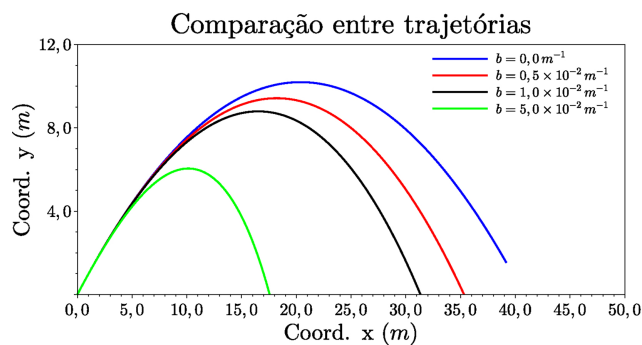


Figura 3: Comparação entre os cálculos das trajetórias para diferentes valores de b . Foi utilizado $\Delta t = 0,001 s$, $|\vec{v}_0| = 20,0 m/s$ e $\theta_0 = 45,0^\circ$

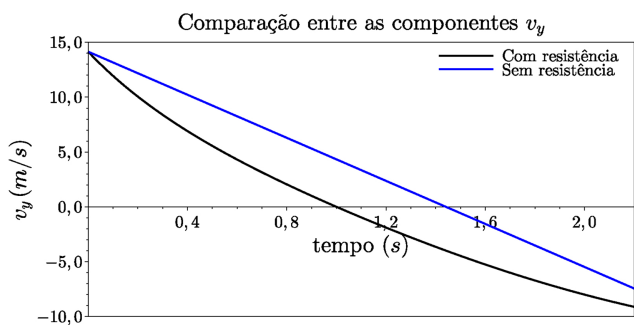


Figura 4: Comparação entre as componentes y da velocidade para um lançamento com $b = 0,05 \text{ m}^{-1}$ e um sem resistência do ar.

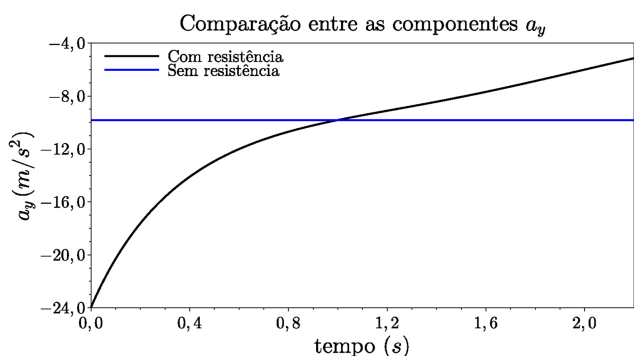


Figura 5: Componentes a_y da aceleração para um lançamento com $b = 0,05 \text{ m}^{-1}$ e um sem resistência do ar.

do linear, apresentado no caso sem resistência. Analisando o gráfico vemos que a altura máxima é atingida em um intervalo de tempo menor que no caso sem resistência, isto é, o tempo para quando a componente v_y da velocidade é nula. Os gráficos devem se cruzar novamente em algum instante de tempo durante o movimento descendente, porém o intervalo de tempo a partir do instante em que alcança a altura máxima para atingir esta velocidade é maior para o movimento com resistência.

Uma análise interessante pode ser realizada a partir da componente a_y da aceleração, apresentada na Figura 5.

A variação da componente v_y é maior na subida quando comparada com a variação da velocidade produzida pela aceleração da gravidade. Porém, quando $a_y = -|\vec{g}| \Rightarrow v_y = 0$ e o projétil começa a descer, o módulo desta aceleração vai ficando cada vez menor, até atingir o valor nulo de forma assintótica. Este limite assintótico determina a velocidade conhecida como *velocidade limite*. Isto ocorrerá quando a força peso e a força de resistência produzirem uma força resultante nula sobre este projétil, atingindo assim uma situação de equilíbrio estável.

Na Figura 6, o comportamento da componente a_x com o tempo é apresentado.

Uma diminuição persistente no valor do módulo da componente x da aceleração também é percebido. Porém, no caso da componente v_x o seu valor limite é nulo. A

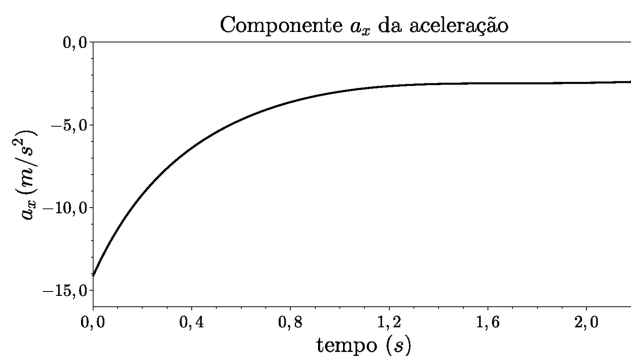


Figura 6: Componente a_x da aceleração para um lançamento com $b = 0,05 \text{ m}^{-1}$.

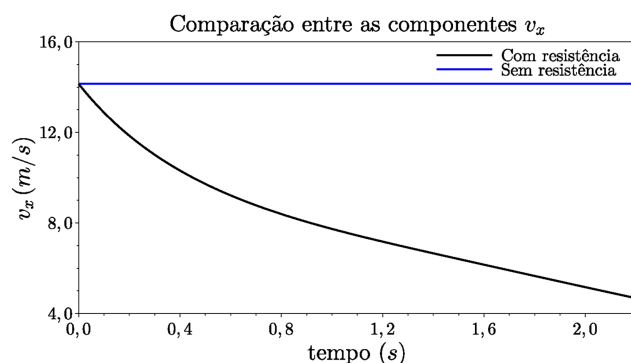


Figura 7: Comparação entre as componentes x da velocidade para um lançamento com $b = 0,05 \text{ m}^{-1}$ e um sem resistência do ar.

Figura 7 apresenta o comportamento desta componente da velocidade com o tempo.

Diferentemente do caso sem resistência, no qual a componente v_x da velocidade permanece constante, podemos notar que o módulo desta componente da velocidade apresenta uma diminuição constante.

Realizei o cálculo de um lançamento horizontal, com $|\vec{v}_0| = 20,0 \text{ m/s}$, $\vec{r}_0 = (100,0 \text{ m})\hat{j}$ e $b = 0,05 \text{ m}^{-1}$, de forma a explicitar os comportamentos assintóticos das componentes da velocidade e da aceleração aos quais me referi anteriormente. Nas Figuras 8 e 9 são apresentados os gráficos das componentes da velocidade e aceleração para x e y respectivamente.

Do ponto de vista computacional, a velocidade limite pode ser calculada para tempos longos o suficiente para assumirmos que o valor das componentes da velocidade não mais se alteram. Tomando os dois últimos valores que calculamos antes de finalizar o código para um tempo de simulação de $8,365 \text{ s}$, temos a componente $v_y = -14,006 \text{ m/s}$ e $v_x = 0,066 \text{ m/s}$, variando muito pouco em casas decimais de ordem de grandeza menor do que as que utilizamos para representar estes valores. Assumo então uma velocidade limite igual a $14,006 \text{ m/s}$ para este projétil movendo-se no meio com $b = 0,05 \text{ m}^{-1}$.

Um cálculo igualando o módulo da força peso e o módulo da componente y da força de resistência nos leva

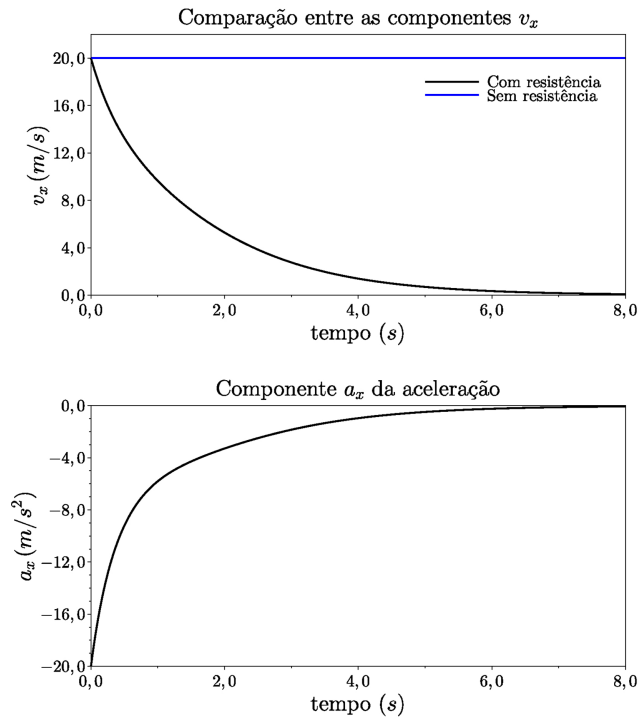


Figura 8: Componentes x da velocidade e aceleração para um cálculo com passo temporal $\Delta t = 0,001$ s. Podemos observar a tendência da aceleração de ser nula e o comportamento assintótico da componente da velocidade.

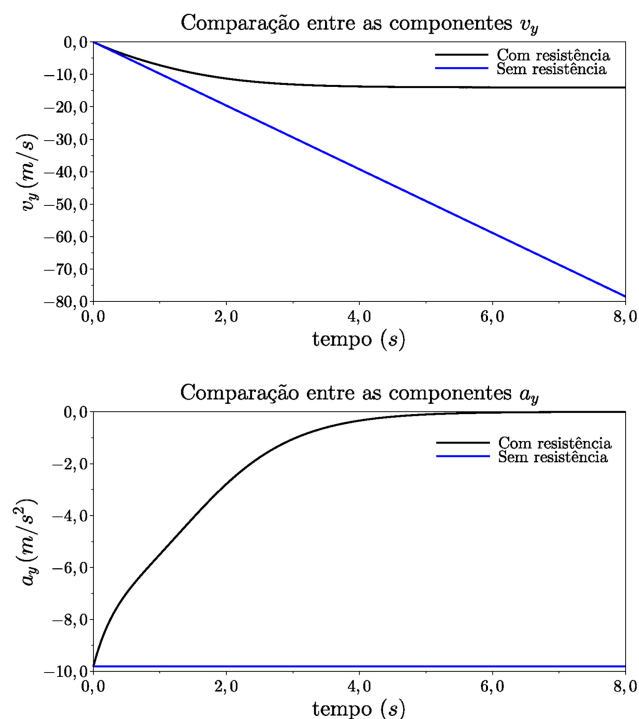


Figura 9: Componentes y da velocidade e aceleração para um cálculo com passo temporal $\Delta t = 0,001$ s. Podemos observar a tendência da aceleração de ser nula e o comportamento assintótico da componente da velocidade.

a

$$M|\vec{g}| = B|\vec{v}||v_y| \Rightarrow |\vec{g}| = b|\vec{v}||v_y|.$$

Aproximando o valor da componente v_x a zero a expressão acima pode ser escrita como

$$|v_y| = \sqrt{\frac{|\vec{g}|}{b}} \approx 14,007 \text{ m/s},$$

onde o erro relativo na determinação da velocidade limite é menor que 0,01%.

6. Considerações finais

A importância das forças de resistência na vida diária deste estudantes por si, já é um argumento suficiente para a necessidade da sua introdução e discussão em sala. Aproximarmos as teorias propostas e ensinadas nos cursos do cotidiano destes estudantes é uma demanda cada vez mais urgente no contexto das Universidades, onde a evasão e o desinteresse de parcela das turmas é evidente aos olhos dos docentes.

Este trabalho visa apresentar aos estudantes e docentes uma forma pouco tradicional de abordar os assuntos nas disciplinas introdutórias do curso de Física. Mostro como o algoritmo de Verlet pode ser modificado para o caso de forças dependentes da velocidade e implementado de forma simples, podendo utilizar por exemplo os *softwares* de planilhas eletrônicas encontradas nos diferentes sistemas operacionais.

Uma discussão sobre os aspectos cinemáticos do lançamento de projéteis submetidos a forças de resistência foi realizada, onde aspectos interessantes e que são pouco explorados em sala de aula deste movimento, como o surgimento de uma velocidade limite e a variação da aceleração com a velocidade, foram apresentados.

Dentro do contexto deste trabalho, um estudo sobre a variação da energia mecânica também pode ser levada em conta. Para isto seria necessário a implementação de um algoritmo de integração para o cálculo da energia dissipada. Esta quantidade pode ser determinada a partir da integração em um intervalo de tempo da potência instantânea dissipada.

Do ponto de vista didático, uma atenção deve ser tomada na derivação da Equação de recorrência (10). Acredito que esta possa ser a fonte de maiores dúvidas na execução da atividade pelos estudantes. A compreensão de que uma aproximação está sendo realizada e a validade desta pode não ser assimilada muito bem pelos mesmos.

7. Material suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online: Apêndice - Código Scilab do algoritmo de Verlet

Referências

- [1] L.O.Q. Peduzzi, *Força e movimento: de Thales a Galileu*, disponível em: https://docs.wixstatic.com/ugd/7d71af_fb96e93af2c24cccba6c98af2e8beced.pdf
- [2] P. Lucie, *A gênese do método científico* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1977).
- [3] L. Leithold, *O cálculo com geometria analítica* (Editora Harbra, São Paulo, 1994).
- [4] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 1: Mecânica* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2002), 4ª ed.
- [5] R. Resnick, J. Walker e D. Halliday, *Fundamentos de Física, volume 1 : Mecânica*, (Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2012), 8ª ed.
- [6] L.R. Pereira e V. Bonfim, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **30**, 3313 (2008).
- [7] W.H.C. Freire, M.L. Medeiros, D. Leite e R.M. Silva, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **38** 1306 (2016).
- [8] H. Maceti, C.L. Levada e I.J. Lautenschleguer, *Cad. Fís. UEFS* **10**, 7 (2012).
- [9] M.A. Cavalcante e C.R.C. Tavoraro, *Cad. Cat. Ens. Fís.* **14**, 276 (1997).
- [10] J.T.G. Junior, G.S. Ramos, S.L. Silva e A.C. Gama, *Cad. Bras. Ens. Fís.* **33**, 619 (2016).
- [11] A.M.A. Taveira, A.C.M. Barreiro e V.S. Bagnato, *Cad. Cat. Ens. Fís.* **9**, 38 (1992).
- [12] L. Verlet, *Phys. Rev.* **59**, 98 (1967).
- [13] C. Scherer, *Métodos computacionais da Física: versão Scilab, 2ª edição* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2010).