

# Experimento de baixo custo para medição da dissipação da energia em um pêndulo

Low-cost experiment for measuring energy dissipation on a pendulum

Marcos M. de Almeida<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Salvador, BA, Brasil.

Recebido em 25 de agosto de 2020. Revisado em 05 de novembro de 2020. Aceito em 17 de novembro de 2020.

Neste artigo apresentamos um sistema para aquisição de intervalos de tempo e estimativas da velocidade a partir de sensores de luz infravermelha acoplados à placa Arduino. Devido à precisão das medidas de tempo, que apresentam incertezas da ordem de  $10^{-4}$  s, somos capazes de determinar a taxa de amortecimento para o pêndulo devido à resistência do ar em um regime de pequenos ângulos. Estudamos o sistema físico formado por um pequeno frasco de vidro suspenso por um fio. Este sistema foi modelado por diferentes pêndulos, como o pêndulo físico, o pêndulo simples e o pêndulo amortecido, onde discutimos sobre os limites de validade destes modelos.

**Palavras-chave:** Pêndulos, dissipação de energia, medidas de tempo, Arduino.

In this paper we present an acquisition system of time intervals and estimates of velocity by infrared light sensors connected to Arduino board. Because of precision in time measurements, which present uncertainty in time on the order of  $10^{-4}$  s, we are able to determine the damping ratio for pendulum produced by air friction in a small angles regime. We studied the physical system formed by a small glass bottle suspended by a wire. This system was modeled as different pendulum kinds, *e. g.*, compound pendulum, simple pendulum and damped pendulum, where we discuss about validity limits of these models.

**Keywords:** Pendulums, energy loss, time measures, Arduino.

## 1. Introdução

Neste trabalho apresentamos um sistema para aquisição de dados de intervalos de tempo e estimativas da velocidade para experimentos nos laboratórios didáticos e salas de aula de Física. Em particular, estamos interessados em estudar o pêndulo amortecido. O sistema de aquisição é baseado na utilização da plataforma embarcada Arduino [1] juntamente com sensores de luz infravermelha.

Entre as vantagens da plataforma Arduino podemos citar a sua enorme comunidade em fóruns, que compartilha seus códigos e diagramas de circuitos, sua facilidade de utilização e a possibilidade de emprego dela sem estar acoplada ao computador, onde o uso de LCD's pode ser feito para leitura dos dados adquiridos. Um livro bastante interessante em português, no qual alguém interessado em iniciar trabalhos na plataforma Arduino pode ter um primeiro contato é o “Arduino Básico” de Michael McRoberts [2].

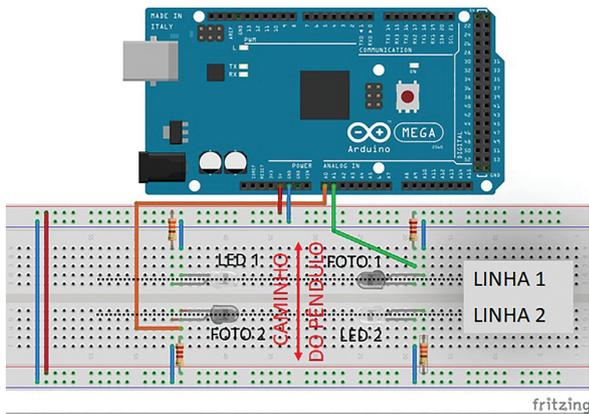
A proposta de utilização do Arduino no Ensino de Física tem sido vista com uma frequência cada vez maior nos periódicos especializados. Podemos citar trabalhos, somente nesta revista, em eletricidade [3, 4], transferência de calor [5], amortecimento de vibrações

em corpos extensos [5, 6], ondas [7], estudo do impulso sobre corpos em uma colisão [8], Física Moderna [9], entre outras áreas.

O estudo particular de oscilações empregando uma interface computacional associada a diferentes tipos de sensores para a aquisição de dados não é nada novo. Os trabalhos de Figueira e Veit [10], Haag [11] e Aguiar e Laudares [12] têm apresentado um sistema de aquisição de dados baseado na leitura obtida pela porta de jogos de placas de som. Com algumas diferenças entre as montagens, eles conseguem medir tanto o período de oscilação como estimar a velocidade com que os pêndulos passam no ponto mais baixo da trajetória. Uma dificuldade em montar estes dispositivos atualmente é que, em um intervalo de menos de 20 anos, estas entradas não são mais encontradas nos computadores atuais, que utilizam, em sua maioria, portas USB e HDMI.

Trabalhos para estudo de osciladores utilizando Arduino também são encontrados, destacamos o de Hinrichsen [13] que acopla um acelerômetro em um sistema massa-mola e Silva et al. [14] que o acopla a um pêndulo físico, para determinação da aceleração dos sistemas, e Rinaldi e Fauzi [15] que utilizam um sensor ultrassônico para determinação das amplitudes de oscilação em um sistema massa-mola amortecido. Em particular, temos o trabalho de Carvalho Neto et al. [16] que aplica sensores de luz infravermelha

\* Endereço de correspondência: marcosma@ufba.br



**Figura 1:** Representação gráfica dos elementos de circuito do dispositivo de aquisição e suas ligações.

na construção de um sistema *photogate*, semelhante aos trabalhos com porta de jogos acima citados. Uma vantagem na estimativa da velocidade instantânea por nosso sistema, comparando com os outros similares citados acima, é a independência que temos com relação às dimensões do corpo. Todos os sistemas estimam a velocidade instantânea através do cálculo da velocidade média durante um trecho da trajetória. Quanto mais extenso for o trecho, pior a aproximação teórica da velocidade instantânea pela velocidade média. Assim, em trechos definidos pela extensão do corpo, quanto mais extenso este for, pior é a aproximação. No nosso sistema, o trecho é independente do corpo, já que ele é definido pelas duas linhas de fotossensores, e a separação entre estas duas linhas tendo como limitação apenas a dimensão dos sensores. Uma representação gráfica destes sensores e suas linhas é encontrada na Figura 1.

Comparando os nossos resultados com os obtidos por Figueira e Veit e Aguiar e Laudares, podemos dizer que observamos o amortecimento do pêndulo em diferentes situações. Nas medições realizadas por eles, o amortecimento do pêndulo foi verificado quando este oscilava em uma situação de grandes aberturas angulares, de forma que ao passar para um regime de pequenas aberturas, as curvas dos tempos de duração dos diferentes ciclos em função do tempo por eles determinadas apresentavam um comportamento assintótico para o valor determinado teoricamente pelo modelo do pêndulo simples. Nas medições que realizamos, devido à grande precisão na medida dos tempos, com incertezas da ordem de  $10^{-4}$  s, fomos capazes de observar uma tendência de diminuição dos tempos de duração dos diferentes ciclos no regime de pequenas aberturas angulares. Nesta situação, teoricamente o pêndulo simples descreveria um movimento periódico caso não houvesse forças dissipativas agindo sobre ele.

Apresentamos na seção 2 um diagrama do dispositivo montado para ser o sistema de aquisição, onde apresentamos algumas das suas características. Na seção 3 discutimos a teoria do pêndulo, apresentando três diferentes

modelos para este: o pêndulo físico, o pêndulo simples e o pêndulo amortecido. Determinamos as soluções horárias da posição e as energias mecânicas em função do tempo. Os resultados são discutidos na seção 4, onde um tratamento dos dados é feito a partir da definição do modelo teórico representando o sistema, e algumas constantes importantes na construção destes modelos são determinadas, como a gravidade para um pêndulo simples e o fator de amortecimento para o pêndulo fracamente amortecido. Por fim, na seção 5 apresentamos as nossas considerações finais sobre o trabalho.

## 2. Montagem do sistema de medição

Não trataremos aqui dos detalhes de projeto do dispositivo de aquisição. Este não é o objetivo do trabalho. Pretendemos apresentar um dispositivo de aquisição simples, barato e de fácil montagem.

O dispositivo de aquisição de dados montado para determinação dos tempos de duração dos diferentes ciclos e estimativa da velocidade do pêndulo no ponto mais baixo de sua trajetória é bastante simples. Este é formado pelos seguintes elementos:

- 1 placa Mega 2560,
- 1 protoboard,
- 2 resistores de 2,2 k $\Omega$ ,
- 2 resistores de 330  $\Omega$ ,
- 2 LED's infravermelhos,
- 2 fototransistores infravermelhos e
- fios para a conexão.

Na Figura 1 é apresentada uma representação gráfica destes elementos e suas ligações.

No Apêndice é encontrado o *sketch* carregado na placa Arduino Mega 2560.

As entradas analógicas desta placa fazem a leitura das tensões entre o coletor e o emissor dos fototransistores. Para uma discussão mais detalhada sobre o funcionamento dos transistores, e conseqüentemente dos fototransistores também, o leitor interessado pode ver em Malvino e Bates [17]. Ao passar em frente aos fototransistores, o pêndulo interrompe o fluxo da luz infravermelha dos LED's na base destes. A base do fototransistor ao deixar de ser iluminada aumenta a barreira para a passagem da corrente entre o emissor e o coletor. Deste modo, a tensão entre o coletor e o emissor do fototransistor aumenta e a corrente elétrica no circuito do fototransistor deixa de circular. Isto ocorre sempre quando o frasco de vidro interrompe a linha de luz infravermelha emitida pelo LED e que chega à base do fototransistor. Monitorando as variações na tensão entre o coletor e o emissor poderemos medir as diferenças de tempo entre as passagens sucessivas do pêndulo em frente aos fototransistores. Tomamos o cuidado de alterar as posições do fototransistor e do LED infravermelho de uma linha para outra, de forma a evitar interferência entre as linhas de sensores.



**Figura 2:** Pêndulo e os fotossensores utilizados no trabalho.

Montamos o circuito do nosso protótipo em uma placa protoboard, mas a confecção de uma placa de circuito para montagem deste não é uma tarefa complexa e pode ser pensada de forma a manter os LED's e fototransistores fixos e protegidos em uma caixa. Uma outra estratégia é fazer como Figueira e Veit [10], que utilizaram peças plásticas de brinquedos de montagem para construir seus sensores. Assim você terá um sensor sempre montado para utilização. Na Figura 2 é possível ver o pêndulo junto aos fotossensores utilizados.

### 3. Discussão teórica

A modelagem do objeto que estamos interessado é o primeiro passo para a construção de um modelo teórico. Podemos pensar o pêndulo concreto, utilizado no experimento, a partir do modelo do pêndulo físico como descrito por Nussenzveig [18]. Porém, podemos descrever o período de oscilação deste pêndulo físico associando a ele um pêndulo simples equivalente. Como nos alerta Silveira [19], o comprimento deste pêndulo equivalente é maior do que somente a distância entre o ponto fixo PF e o centro de gravidade do pêndulo concreto, que aqui assumiremos coincidir com o centro de massa CM, já que assumiremos a aceleração da gravidade percebida pelo sistema como constante. Uma representação esquemática do pêndulo físico e dos pontos definidos acima pode ser visualizada na Figura 3.

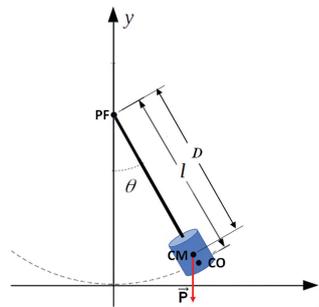
Da equação para o torque resultante sobre o pêndulo físico em relação ao eixo perpendicular ao plano de oscilação passando por PF temos

$$I\ddot{\theta} = -MgD\text{sen}\theta, \quad (1)$$

onde  $I$  é o momento de inércia com relação ao eixo passando por PF,  $M$  é a massa do objeto,  $g$  é o módulo da aceleração gravitacional e  $D$  é a distância entre PF e CM.

Comparando a Equação (1) com a equação associada à componente da aceleração tangencial à trajetória do pêndulo simples:

$$l\ddot{\theta} = -g\text{sen}\theta,$$



**Figura 3:** Representação esquemática do pêndulo físico e o sistema de referência utilizado para descrição das posições.

onde  $l$  é o comprimento do pêndulo simples, podemos escrever que

$$l = \frac{I}{MD}$$

Aplicando o teorema de Steiner ou teorema dos eixos paralelos [20], podemos escrever o momento de inércia  $I$  em função do momento de inércia com relação ao eixo paralelo passando pelo CM,  $I_{CM}$ :

$$I = \frac{MD^2 + I_{CM}}{MD} = D + \frac{I_{CM}}{MD}$$

sendo o comprimento do pêndulo equivalente igual à distância entre o ponto fixo PF e o ponto conhecido como centro de oscilação, CO, do pêndulo físico. A separação entre CM e CO é dada pelo termo  $I_{CM}/MD$ . Segundo Silveira, para que o valor da distância entre CO e o ponto que fixa o objeto ao fio “não se altere significativamente durante o experimento é necessário que não apenas o peso do fio seja desprezível frente ao peso do objeto suspenso, mas que também sejam desprezíveis as dimensões do objeto suspenso frente ao comprimento do fio” (ver página 87 em [19]). E mais, ele afirma que se o termo  $I_{CM}/MD$  for da mesma ordem de grandeza, ou de ordem menor, que o erro na determinação do comprimento do fio, podemos investigar a razoabilidade de quase invariância na determinação do centro de oscilação. Daremos um passo a mais. Considerando o resultado acima, vamos assumir que se o termo  $I_{CM}/MD$  for da ordem de grandeza da incerteza da medida do comprimento do fio, a aproximação do CO ao CM será razoável e poderemos modelar o pêndulo concreto como um pêndulo simples de comprimento  $D$  para estudar o período de oscilação deste.

#### 3.1. Análise da aproximação por um pêndulo simples

Primeiramente vamos assumir que a massa do fio é desprezível com relação à massa da pequena garrafa de vidro utilizada, sendo esta última representada por uma casca cilíndrica com duas tampas em forma de disco. Assim poderemos definir numericamente o momento de inércia

deste objeto com relação a um eixo  $z'$  perpendicular ao plano de oscilação e passando pelo seu centro de massa CM:

$$I_{CM} = I_{casca} + 2I_{disco}$$

O momento de inércia da casca cilíndrica com relação ao eixo  $z'$  é:

$$I_{z'} = \rho \int_{\text{volume}} (x'^2 + y'^2) dx' dy' dz'$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa do objeto, e  $x'$  e  $y'$  são os outros dois eixos principais, sendo o último o eixo axial do cilindro. O plano  $z'x'$  é paralelo às tampas deste objeto, e devido à simetria axial da casca vamos transformar estas coordenadas cartesianas nas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ :

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \rho \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (r^2 \cos^2 \theta + y'^2) r dr d\theta dy' \\ &= \rho \left[ \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta dy' \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r y'^2 dr d\theta dy' \right] \\ &= \rho \left[ \left( \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} \right) \pi h + \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \right) 2\pi \left( \frac{h^3}{24} - \frac{-h^3}{24} \right) \right] \\ &= \frac{m_{casca}}{12} [3(r_2^2 + r_1^2) + h^2] \end{aligned}$$

Assumimos que a altura da casca é  $h$  e os raios externo e interno são respectivamente  $r_2$  e  $r_1$ , tal que o volume da casca é igual a  $\pi(r_2^2 - r_1^2)h$ .

O momento de inércia de um disco em relação ao eixo axial de simetria é igual a  $m_{disco}r_2^2/2$  [20]. Utilizando o teorema dos eixos perpendiculares e novamente o teorema dos eixos paralelos ou teorema de Steiner apresentados em Symon [21], temos que o momento de inércia dos discos com relação ao eixo  $z'$  passando pelo centro de massa do objeto é igual a

$$I_{disco} = m_{disco} \frac{r_2^2 + h^2}{4}$$

Fazendo uma estimativa para a separação entre o CM e o CO do nosso pêndulo temos

$$\begin{aligned} \frac{I_{CM}}{MD} &= \frac{m_{casca} [(r_2^2 + r_1^2) + h^2/3] + 2m_{disco}(r_2^2 + h^2)}{4MD} \\ &< \frac{3r_2^2 + r_1^2}{4D} + \frac{7h^2}{12D} \end{aligned}$$

já que  $M = m_{casca} + 2m_{disco}$ . Agora, somente para efeito de cálculo da estimativa da separação, vamos assumir  $r_2 = r_1$ . Esta assunção deve-se ao fato de não conhecermos a espessura das paredes da garrafa, ela aumentará o valor da nossa estimativa, assim estimaremos um valor máximo para a separação entre o CM e o CO.

$$\frac{I_{CM}}{MD} < \frac{r_2^2}{D} + \frac{7h^2}{12D}.$$

Seja  $r_2 = 1,5 \text{ cm}$  e  $h = 7,5 \text{ cm}$ . Temos para o pêndulo com o menor comprimento que utilizamos, com uma distância entre o ponto fixo e o centro de gravidade igual a  $50,0 \text{ cm}$ , que

$$\frac{I_{CM}}{MD} < 7,0 \text{ mm}.$$

Este seria o maior valor estimado para a separação entre os diferentes comprimentos de pêndulos utilizados neste trabalho. Além disto, este limite máximo para a separação é da mesma ordem de grandeza da incerteza na medida dos comprimentos do fio e da determinação da posição do centro de gravidade da garrafa. Este resultado justifica a utilização de um modelo mais simples para descrição do movimento oscilatório do pêndulo concreto.

### 3.2. Pêndulo simples

O pêndulo simples é um modelo teórico bastante simplificado e utilizado com frequência no ensino de Física como representação do Movimento Harmônico Simples (MHS), um movimento periódico tomado como primeira aproximação na descrição de inúmeros fenômenos físicos associados ao movimento de um objeto confinado em uma região de equilíbrio estável. Como exemplo podemos citar o movimento de vibração de átomos em moléculas. Uma representação gráfica deste pêndulo é apresentada na Figura 4.

Nesta representação assumimos que a origem do sistema de coordenadas encontra-se no ponto mais baixo da trajetória do pêndulo. Desta forma podemos assumir que ao passar por este ponto, a energia potencial do sistema pêndulo-Terra é nula, isto é,  $U(y = 0) = 0$ , e a sua energia mecânica é numericamente igual à sua energia cinética.

Segundo Bunge [22], “um *modelo teórico* é um sistema hipotético-dedutivo que concerne a um objeto-modelo, que é, por sua vez, uma representação conceitual esquemática de uma coisa ou de uma situação real ou suposta como tal.” (BUNGE, 2017, página 16). No caso do pêndulo simples, o sistema hipotético-dedutivo ou teoria geral aqui empregada é a Mecânica Clássica

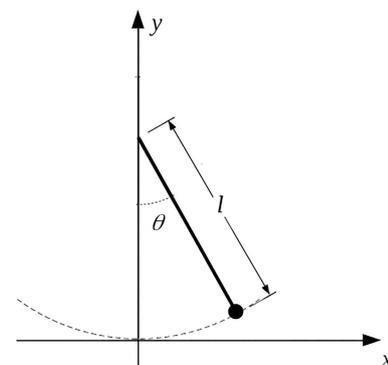


Figura 4: Representação esquemática do pêndulo simples e o sistema de referência utilizado para descrição das posições.

newtoniana. O objeto-modelo, como representação de uma coisa, é um objeto conceitual concebido a partir de abstrações e idealizações: as dimensões do corpo são reduzidas a um ponto que concentra a sua massa, isto é, o corpo é idealizado como uma partícula, que está suspensa por um fio inextensível de comprimento  $l$  e de massa desprezível. Estas são algumas destas abstrações e idealizações.

Desenvolvendo este modelo teórico, deduzimos a equação do movimento para o pêndulo simples [18]:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (2)$$

A equação (2) está associada à componente tangencial à trajetória da aceleração da partícula. A componente radial da aceleração, também conhecida como aceleração centrípeta, dependerá da taxa de variação temporal da posição angular da partícula e do comprimento do pêndulo em uma relação bastante conhecida.

Uma aproximação utilizada no caso do pêndulo simples, conhecida como aproximação de pequenos ângulos, permite aproximar o  $\sin\theta$  por  $\theta$ , e a Equação (2) se transforma na equação do MHS, que tem o seu período dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

A solução geral do MHS para o caso do pêndulo simples é dada por:

$$\theta(t) = \Theta \cos(\omega_0 t + \delta)$$

onde as constantes arbitrárias  $\Theta$  e  $\delta$  serão determinadas pelas condições iniciais do problema e  $\omega_0$  é a frequência angular do pêndulo simples, dada por  $\sqrt{g/l}$ .

Vamos assumir que no instante inicial  $\theta(0) = 0$  e  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ . Dadas estas condições iniciais, temos que

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \Theta \cos \delta = 0 \Rightarrow \delta = -\pi/2 \\ \dot{\theta}(0) &= -\Theta \omega_0 \sin \delta = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \omega_0 \Theta \end{aligned}$$

onde  $\dot{\theta}_0$  é a velocidade angular inicial do pêndulo.

Uma outra hipótese do modelo teórico em questão é assumir que forças dissipativas não atuam sobre o sistema. Mais uma idealização. Uma hipótese interessante e simplificadora, e que em muitas experiências realizadas em salas de aula e em nossos laboratórios didáticos se ajustam muito bem aos dados. Desta forma podemos afirmar que a energia mecânica do sistema pêndulo-Terra

$$E(t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (4)$$

é conservada.

### 3.3. Pêndulo fracamente amortecido

Quando uma força dissipativa passa a fazer parte da explicação, o modelo teórico deve ser reformulado para

dar conta dos fenômenos observados. Assim, a equação do movimento para o pêndulo amortecido é dada por

$$l\ddot{\theta} + \gamma l\dot{\theta} + g \sin\theta = 0$$

onde o termo dissipativo na equação acima é proporcional ao módulo da velocidade da massa suspensa,  $l\dot{\theta}$  [23]. Utilizando novamente a aproximação de pequenos ângulos, a equação acima passa a ser escrita como:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad (5)$$

onde  $\gamma$  é conhecido como o fator de amortecimento do sistema e  $\omega_0$  é a frequência angular teórica do pêndulo simples.

A solução geral desta equação é dada por (ver o capítulo 4 de Nussenzveig [18] para determinação da solução geral e uma discussão sobre o balanço de energia do sistema.)

$$\theta(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}).$$

onde  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$ . No regime que trataremos, de um amortecimento fraco, temos que  $\omega_0 \gg \gamma/2$ . Este regime de oscilação do pêndulo é também conhecido como amortecimento subcrítico.

Tomando a parte real da solução acima, podemos escrever

$$\theta(t) = \Theta e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \delta). \quad (6)$$

As condições iniciais são as mesmas do problema do pêndulo simples, o que nos leva às relações  $\Theta = \dot{\theta}_0/\omega$  e  $\delta = -\pi/2$  para as constantes arbitrárias.

Consequências bem conhecidas deste modelo: 1) o movimento não é mais periódico e 2) a energia mecânica do sistema é dissipada com o tempo.

Assumindo a aproximação para ângulos pequenos e substituindo a solução geral (6) na Equação (4), temos:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \frac{\theta^2}{2} \\ &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}_0^2 e^{-\gamma t} \left[ 1 + \frac{\gamma}{2\omega_0} \sin(2\phi) + \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} \cos^2 \phi \right] \end{aligned}$$

onde  $\phi = \omega t + \delta$ . Implicitamente, ao escrever a equação acima, também assumimos  $\omega \approx \omega_0$ , tal que  $g/l\omega^2 \approx 1$ .

Como estamos admitindo um amortecimento subcrítico, vamos assumir que  $\exp(-\gamma t)$  não vai alterar significativamente dentro de uma oscilação. Além disto, o fator  $\gamma^2/4\omega_0^2 \ll 1$  e o termo associado ao quadrado do cosseno será desprezado. Desta forma, ao tomarmos o valor médio da energia mecânica em um ciclo, este fator será considerado constante durante a integração:

$$\bar{E}(t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}_0^2 e^{-\gamma t} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \left[ 1 + \frac{\gamma}{2\omega_0} \sin(2\phi) \right] dt' \right\}$$

onde  $\tau$  é a duração do ciclo.

Como o valor médio das funções trigonométricas seno e cosseno são nulas dentro de um número inteiro de ciclos, o valor médio da energia mecânica em uma oscilação é dado por

$$\bar{E}(t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}_0^2 e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\gamma t}$$

onde  $E_0 = ml^2 \dot{\theta}_0^2 / 2$  é a energia mecânica inicial do pêndulo amortecido. Considerando a energia mecânica dos outros ciclos com relação à energia do ciclo inicial, podemos escrever uma expressão para a energia mecânica relativa:

$$\bar{E}_r(t) = \bar{E}(t)/E_0 = e^{-\gamma t} \quad (7)$$

Como o amortecimento é subcrítico, aproximaremos o valor médio da energia mecânica no ciclo para o valor da energia mecânica em um instante de tempo  $t$  durante este ciclo:

$$\bar{E}_r(t) = e^{-\gamma t} \approx E(t)/E_0. \quad (8)$$

Esta será uma quantidade com um papel relevante na experiência que realizaremos para determinação do fator de amortecimento  $\gamma$ .

### 3.4. Determinação experimental da energia do pêndulo

Assumindo que a energia mecânica no ponto mais baixo da trajetória é numericamente igual à energia cinética, se formos capazes de estimar a velocidade neste ponto, podemos inferir indiretamente a energia mecânica do pêndulo.

Para isto aproximaremos a velocidade instantânea à velocidade média entre dois pontos próximos na região mais baixa da trajetória. Somos capazes de determinar o intervalo de tempo na passagem do pêndulo por estas linhas e conhecendo a separação entre as duas linhas de sensores da Figura 1, podemos estimar a velocidade instantânea. No nosso caso, como estamos interessados na energia relativa, a separação entre as linhas de sensores não influencia explicitamente na determinação desta. Seja  $\Delta t_i$  o tempo de passagem entre as linhas de sensores no  $i$ -ésimo ciclo. A energia mecânica relativa do pêndulo é aproximada por

$$\bar{E}_r(t) = e^{-\gamma t} \approx \frac{v_i^2(t)}{v_0^2} \approx \frac{\Delta t_0^2}{\Delta t_i^2(t)}$$

onde  $v_i$  é a velocidade medida quando o ciclo se completa, isto é, no ponto mais baixo da trajetória, e  $\Delta t_0$  é o tempo de passagem do pêndulo no primeiro ciclo medido. Assumimos este primeiro ciclo completo como referência para o instante inicial e conseqüente inferência da energia mecânica inicial.

## 4. Resultados

Agora passamos a apresentar os resultados obtidos para o pêndulo simples com 5 diferentes comprimentos

$l = 0,500 m, 0,650 m, 0,800 m, 0,950 m$  e  $1,100 m$ . O comprimento do pêndulo simples equivalente com período igual ao pêndulo físico que modela o objeto real ou concreto deve levar em consideração a posição do centro de oscilação deste último, como afirmado por Silveira [19] e Silveira e Ostermann [24]. Porém, como discutido na subseção 3.1, a separação entre o CM e CO do pêndulo concreto que estamos utilizando é da ordem de grandeza da nossa incerteza na medidas do comprimento. Assim, estimamos a posição do centro de gravidade para determinação do comprimento do pêndulo simples deixando o frasco suspenso por um eixo, e depois repetimos o procedimento para outros dois eixos distintos. O cruzamento entre estes três eixos determinou a posição do centro de gravidade a  $3,0 cm$  da base do frasco de vidro. Como o frasco possui uma altura de  $7,5 cm$ , mais  $4,5 cm$  foram adicionados ao comprimento do fio para definir o comprimento do pêndulo.

Foram medidas 50 oscilações para cada comprimento dos pêndulos. Na Tabela 1 apresentamos o valor médio do conjunto de oscilações.

Na Figura 5 são apresentados, em forma gráfica, os resultados experimentais e o ajuste realizado para os dados da Tabela 1. Para realizar o ajuste, primeiro linearizamos a Equação (3) utilizando uma transformação logarítmica:

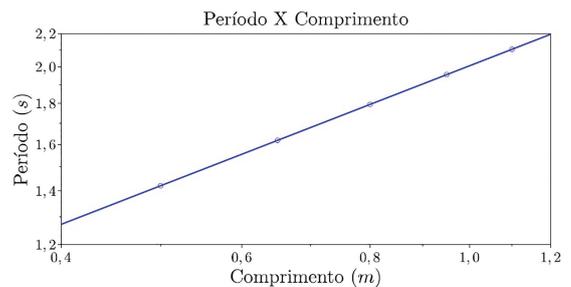
$$\log(T) = \log\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) + \frac{1}{2} \log(l)$$

$$Y = a_0 + a_1 X,$$

onde  $Y = \log(T)$ ,  $a_0 = \log(2\pi/g^{1/2})$ ,  $a_1 = 1/2$  e  $X = \log(l)$ .

**Tabela 1:** O valor médio das 50 oscilações medidas para diferentes comprimentos do pêndulo. Entre parênteses encontramos a incerteza avaliada para os comprimentos e a incerteza estimada para os períodos dado pelo valor de desvio padrão da amostra.

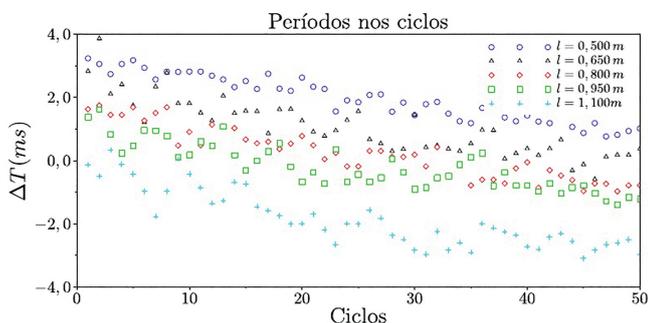
$l$ (m)	0,500(3)	0,650(3)	0,800(3)	0,950(3)	1,100(3)
$T$ (s)	1,4212(7)	1,6192(9)	1,7954(8)	1,9561(7)	2,1032(9)



**Figura 5:** Gráfico em escala logarítmica dos valores médios do período das oscilações em função do comprimento do pêndulo. A linha contínua representa o ajuste realizado e os círculos representam os dados experimentais.

**Tabela 2:** Parâmetros do ajuste linear de  $\log(T)$  em função do  $\log(l)$ . Entre parênteses encontramos o valor da incerteza estimada pelo ajuste.

$a_0$	0,3024(4)
$a_1$	0,497(4)



**Figura 6:** Diferença entre os períodos medidos nos diferentes ciclos e o seu valor teórico determinado pelo modelo do pêndulo simples para diferentes comprimentos do pêndulo.

Os parâmetros ajustados aos dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados [25] são encontrados na Tabela 2.

Os parâmetros do ajuste encontram-se em excelente acordo com os resultados esperados, apresentando um valor para o coeficiente de determinação  $R^2$  igual a 0,9999991. O parâmetro linear  $a_0$  produzindo um valor para a aceleração da gravidade local igual a  $9,81(2) m/s^2$ , onde a aceleração da gravidade local medida pelo sensor G de um *tablet* utilizando o sistema Android através do aplicativo *Gravity Meter* foi de  $9,807(1) m/s^2$ , próximo ao nível do mar em Salvador-BA.

Uma análise da duração dos 50 ciclos medidos nos mostra que os valores apresentam uma tendência de redução, como pode ser visto através da Figura 6.

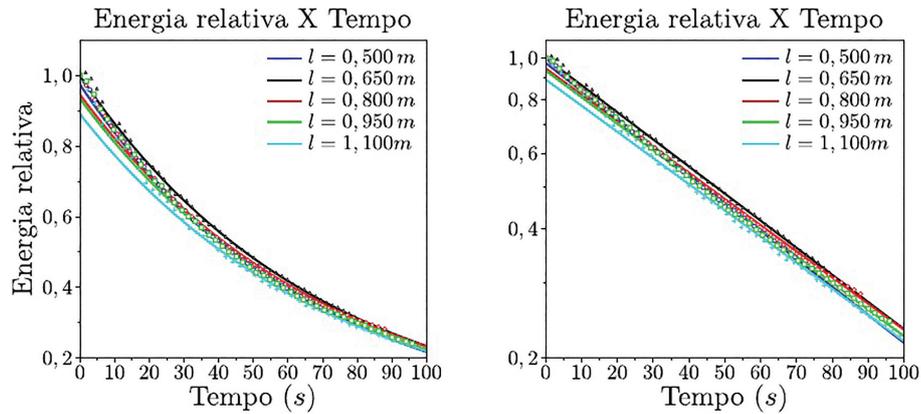
O instrumento de medida desenvolvido neste trabalho apresenta uma incerteza estimada de  $0,2 ms$ . Esta estimativa foi realizada considerando o tempo de  $100 \mu s$  que cada uma das entradas analógicas utilizadas leva para responder ao chamado da função *AnalogRead* incorporadas no *sketch* carregado na placa Mega 2560, conforme podemos ver no sítio do projeto Arduíno [26]. Observamos uma diferença entre as durações do primeiro e último ciclos medidos na ordem de grandeza de unidades de milissegundos. Esta variação no período dos pêndulos a cada ciclo explica o fato das incertezas encontradas na Tabela 1 serem maiores que 3 vezes a incerteza associada ao instrumento de medida. Para dar conta da diminuição do período de oscilação com o tempo, o modelo do pêndulo simples deve ser modificado para o modelo do pêndulo amortecido. É fato que a diminuição do tempo vem acompanhada de uma diminuição da amplitude angular máxima em cada ciclo, como apresentado por

Silveira [19] na correção para o período em função da amplitude angular máxima, porém esta diminuição da amplitude está associada diretamente à dissipação de energia do pêndulo.

Um outro detalhe que podemos investigar é o fato da diferença entre os períodos medidos e o período estimado para o pêndulo simples apresentar um desvio maior nos primeiros ciclos para os menores comprimentos, mantendo a tendência nos ciclos seguintes. Num primeiro momento, podemos supor que este desvio deve-se à separação entre o centro de massa e o centro de oscilação que não foi levada em conta nos modelos, mas não é isto. Ao calcular os períodos levando em conta a separação entre o centro de massa e o centro de oscilação no comprimento do pêndulo, notamos que a diferença entre eles e os períodos calculados sem considerar esta separação é de  $10 ms$  para o menor comprimento do pêndulo, e vai diminuindo até ser de apenas  $3 ms$  para o pêndulo com maior comprimento. Quando comparamos estes dois resultados com os períodos médios obtidos experimentalmente, vemos que o desvio é menor entre os valores médios e os períodos estimados sem considerar a separação no cálculo do comprimento. Podemos imaginar duas coisas aqui: a primeira é que a aproximação do pêndulo simples foi boa, a segunda é que devemos considerar as aberturas angulares para a determinação dos períodos, como sugerido por Silveira no trabalho citado acima, se conseguimos descrever cada ciclo individualmente como neste trabalho. Acreditamos que esta tendência dos períodos para os comprimentos de pêndulos mais curtos diferirem mais do período estimado teoricamente deve-se ao fato do deslocamento linear na direção  $x$  do pêndulo de sua posição de equilíbrio antes de ser liberado, ter sido muito parecido para os diferentes comprimentos do pêndulo. Isto produziu ângulos máximos maiores para os pêndulos com comprimentos mais curtos, e consequentemente períodos maiores foram medidos.

Heidemann et al., em um trabalho nesta revista [27], apresentaram uma proposta de episódios de modelagem, inspirada nos trabalhos dos ciclos de modelagem de Hestenes [28, 29], no qual os limites das aproximações para um pêndulo simples eram testados e os modelos propostos analisados. Nos episódios de modelagem propostos por Heidemann, a discussão sobre os limites das aproximações era baseada nas características físicas do pêndulo. Acreditamos que com este dispositivo, uma análise da dissipação da energia de um pêndulo fracamente amortecido pode ser realizada e a limitação do modelo de pêndulo simples discutida em sala de aula em função também das limitações impostas pelo equipamento de medida.

Na Figura 7, encontramos os dados da energia relativa obtida experimentalmente de forma indireta pelos tempos de passagem entre as duas linhas de sensores e as curvas encontradas a partir dos ajustes para os diferentes pêndulos.



**Figura 7:** À esquerda, o gráfico representando a energia relativa do pêndulo após cada ciclo. À direita, o mesmo gráfico com o eixo  $y$  em escala logarítmica. As linhas contínuas representam os ajustes realizados e os diferentes marcadores representam os dados experimentais.

**Tabela 3:** Os fatores de amortecimento ajustados e as estimativas da energia relativa inicial,  $\bar{E}_r(0)$ , para diferentes comprimentos do pêndulo com os respectivos coeficientes de determinação  $R^2$  para os ajustes. Entre parênteses encontramos os valores da incerteza estimados pelo ajuste.

$l$ (m)	0,500 (3)	0,650 (3)	0,800 (3)	0,950 (3)	1,100 (3)
$\gamma$ ( $10^{-2} s^{-1}$ )	1,502 (3)	1,453 (2)	1,402 (2)	1,424 (2)	1,404 (1)
$\bar{E}_r(0)$	0,974 (1)	0,999 (1)	0,946 (1)	0,935 (1)	0,891 (1)
$R^2$	0,99897	0,99898	0,99761	0,99598	0,99405

A Tabela 3 apresenta os fatores de amortecimento determinados pelo ajuste dos dados obtidos para a energia mecânica relativa. O parâmetro  $\gamma$  ajustado é o coeficiente angular obtido na linearização da Equação (8),  $\ln(\bar{E}_r) = \ln(\bar{E}_r(0)) - \gamma t$ , onde o valor teórico de  $\bar{E}_r(0)$  é 1. O ajuste de  $\gamma$  foi realizado permitindo-se o ajuste do coeficiente linear da retas representadas à direita da Figura 7.

Tomando os diferentes valores  $\gamma$ , encontramos o seu valor médio,  $\bar{\gamma} = 1,44(8) \times 10^{-2} s^{-1}$ , onde o número entre parênteses é o desvio padrão da amostra. Os valores ajustados de  $\bar{E}_r(0)$  estão próximos de 1, mas não tem o valor igual à unidade dentro do intervalo definido pela incerteza. Eles possuem um valor médio igual a 0,95 com um desvio padrão da amostra igual a 0,04.

## 5. Considerações finais

Apresentamos um sistema de baixo custo e alta precisão para medidas de intervalos de tempo e estimativas da velocidade instantânea independente das dimensões do corpo, diferente do que geralmente é realizado em propostas de experimentos didáticos. Além da fácil montagem do dispositivo, há também uma facilidade no seu transporte devido ao baixo peso e dimensões.

Com ele foi possível medir, em um regime de pequenos ângulos, a dissipação da energia mecânica em um pêndulo de maneira rápida e eficiente. Os resultados

apresentam um excelente acordo com a teoria e o resultado obtido para a gravidade local quando comparada com o resultado apresentado pelo aplicativo Gravity Meter é ótimo, apresentando uma precisão excelente quando comparada com os resultados tradicionais obtidos dentro do laboratório didático, onde cronômetros acionados manualmente ainda são muito utilizados. Esta precisão nos permitiu observar a dissipação da energia mecânica.

Apesar dos resultados excelentes, para uma descrição mais completa dos resultados teremos que levar em consideração as aberturas angulares descritas pelo movimento dos pêndulos. Assim, acreditamos poder explicar alguns desvios encontrados nos dados experimentais que não podemos explicar com o modelo teórico empregado.

O baixo custo e facilidades que o Arduino tem oferecido para a realização de experimentos em Física tem se mostrado uma excelente alternativa para construção de equipamentos de aquisição de dados para montagens de experimentos de baixo custo. O crescente número de publicações e pessoas interessadas na sua utilização tem trazido para a sala de aula novas possibilidades de experimentos e discussões que não seriam permitidas anteriormente pelo custo ou complexidade na montagem dos equipamentos.

Por fim, o autor gostaria de expressar o seu agradecimento ao(a) revisor(a) anônimo(a) deste trabalho pelas sugestões, que contribuíram enormemente para o resultado final apresentado aqui.

## Apêndice: *Sketch* carregado no Arduíno

```
// PROJETO DE UM SENSOR DE VELOCIDADE E MEDIDA DE
// PERIODO DE
// UM PENDULO

// AUTOR: MARCOS MELO DE ALMEIDA

#define pi 3.14159265359

int FT1, FT2; // VARIAVEIS DAS ENTRADAS ANALOGICAS
int i; // VARIAVEL PARA CONTROLE DE MEDIDAS
SUCESSIVAS
int j = 0; // VARIAVEL PARA CONTROLE DE MEDIDAS
SUCESSIVAS
int k = 0; // VARIAVEL PARA CONTROLE DE MEDIDAS
SUCESSIVAS
int pinoFT1 = 0; // DEFINE O PINO DE SAIDA 1
int pinoFT2 = 1; // DEFINE O PINO DE SAIDA 2
int periodos = 5; // DEFINE O NUMERO DE PERIODOS
ANTES DO REGISTRO
int LED = 13; // DEFINE O PINO DE AVISO DE PASSAGEM
int limite = 400; // TENSÃO DE DETECCAO NO
FOTOTRANSISTOR (Vft=2V)
int contador = 1; // CONTADOR DE PERIODOS

float periodo, tempo, Vel, gravidade;
float distancia = 5; // DISTANCIA ENTRE OS PARES DE
SENSORES EM MM
float comprimento = 0.5; // COMPRIMENTO DO PENDULO

unsigned long a, aux1, aux2; // VARIAVEIS
AUXILIARES PARA AQUISICAO
unsigned long tempo1 = 0; // VARIAVEL PARA CALCULOS
DAS GRANDEZAS
unsigned long tempo2 = 0; // VARIAVEL PARA CALCULOS
DAS GRANDEZAS
unsigned long tempo1_velho = 0; // VARIAVEL PARA
CALCULOS DAS GRANDEZAS
unsigned long decisao = 0; // VARIAVEL DE DECISAO
PARA AQUISICAO

void setup(){
  Serial.begin(9600); // INICIA O SERIAL MONITOR PARA
  LEITURA NO COMPUTADOR

  pinMode(LED,OUTPUT);
  pinMode(pinoFT1,INPUT);
  pinMode(pinoFT2,INPUT);

  //CABEÇALHO DA SAIDA DOS DADOS ADQUIRIDOS E
  CALCULADOS

  Serial.print("N \t Período (s) \t Delta t (ms) \t
  Vel (m/s) ");
  Serial.println("\t Gravidade (m/s2) ");
}
```

```
void loop(){

  a = micros(); // MEDICAO DO TEMPO PASSADO EM
  MICROSSEGUNDOS

  i = 1;

  while( (analogRead(pinoFT1) > limite)){ //ENTRA SE
  PENDULO ESTA EM FT1
  if( i == 1 ){tempo1_velho = aux1; i++; k++;}
  aux1 = a; j = 1; // REGISTRA APENAS A PRIMEIRA
  LEITURA DE FT1
  }

  a = micros();

  while( analogRead(pinoFT2) > limite ){ // ENTRA SE
  PENDULO ESTA EM FT2
  aux2 = a;
  if( abs(aux2 - aux1) < abs(aux1 - tempo1_velho) &&
  j == 1 ){
  // ENTRA APENAS O PRIMEIRO REGISTRO EM FT2 NO
  SENTIDO ESCOLHIDO
  periodo = float(aux1 - tempo1)*1E-6;
  tempo1 = aux1;
  tempo2 = aux2;
  tempo = float(tempo2 - aux1)*1E-3; // CALCULA O
  TEMPO EM MS
  Vel=distancia/tempo*1E+2; // VELOCIDADE EM CM/S
  gravidade = 4.0*pi*pi*comprimento/periodo/periodo;
  // GRAVIDADE EM M/S2
  if( k > periodos ){
  // APOS UM NUMERO K DE PERIODOS COMECA A ESCREVER
  OS RESULTADOS
  Serial.print(contador,10);
  Serial.print("\t ");
  Serial.print(periodo,5);
  Serial.print("\t ");
  Serial.print(tempo,2);
  Serial.print("\t ");
  Serial.print(Vel,4);
  Serial.print("\t ");
  Serial.println(gravidade,5);
  contador++;}
  j = 0;
  }
}
```

## Referências

- [1] <https://www.arduino.cc/>, acessado em 02/07/2020.
- [2] M. McRoberts, *Arduíno Básico* (Novatec Editora, São Paulo, 2011), 1ª ed.
- [3] M.A. Cavalcante, C.R.C. Tavoraro e E. Molisani, Rev. Bras. Ens. Fís. **33**, 4503 (2011).
- [4] G. Dionisio e L.E.S. Spalding, Rev. Bras. Ensino Fís. **39**, e1501 (2017).

- [5] A.R. Souza, A.C. Paixão, D.D. Uzêda, M.A. Dias, S. Duarte e H.S. de Amorim, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **33**, 1702 (2011).
- [6] M. Varanis, A.L. Silva, P.H.A. Brunetto e R.F. Gregolin, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **38**, 1301 (2016).
- [7] M.V. da Silveira, R.B. Barthem e A.C. dos Santos, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **41**, e20180084 (2019).
- [8] J.F. Nascimento Júnior, V.E.S. Borges e R.M.M.F. Nascimento, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **41**, e20180219 (2019).
- [9] S. Silveira e M. Girardi, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **39**, e4502 (2017).
- [10] J.S. Figueira e E.A. Veit, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **26**, 203 (2004).
- [11] R. Haag, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **23**, 176 (2001).
- [12] C.E. Aguiar e F.A. Laudares, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **23**, 371 (2001).
- [13] P.F. Hinrichsen, *The Physics Teacher* **57**, 250 (2019).
- [14] C.B.C. da Silva, B.B. Fagundes, J.D. Ribeiro, A.P. Tonel, F.L. Silveira e P.F. Dorneles, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **42**, e20190085 (2020).
- [15] R.G. Rinaldi e A. Fauzi, *Phys. Educ.* **55**, 015024 (2020).
- [16] J.T. de Carvalho Neto, F.R. Apolinário e A.A. Soares, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **40**, e1504 (2018).
- [17] A. Malvino e D.J. Bates *Eletrônica – volume I* (AMGH Editora Ltda., Porto Alegre, 2016), 8ª ed.
- [18] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2002), 4ª ed.
- [19] F.L. da Silveira, *Cad. Cat. Ens. Fís.* **9**, 86 (1992).
- [20] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 1: Mecânica* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2002), 4ª ed.
- [21] K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1971), 3ª ed.
- [22] M. Bunge, *Teoria e Realidade* (Ed. Perspectiva, São Paulo, 2017), 3ª reimpressão, 1ª ed.
- [23] M.M. de Almeida, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **41**, e20190039 (2019).
- [24] F.L. da Silveira e F. Ostermann, *Cad. Bras. Ens. Fís.* **19**, 7 (2002).
- [25] J.H. Vuolo, *Fundamentos da teoria de erros* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1996), 2ª ed.
- [26] <https://www.arduino.cc/reference/en/language/functions/analog-io/analogread/>, acessado em 03/07/2020.
- [27] L.A. Heidemann, I.S. Araujo e E.A. Veit, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **38**, 1504 (2016).
- [28] L.A. Heidemann, I.S. Araujo e E.A. Veit, *Cad. Bras. Ens. de Fís.* **29**, 965 (2012).
- [29] J. Jackson, L. Dukerich e D. Hestenes, *Science Educator* **17**, 10 (2008).