Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 43, e20200510 (2021)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0510

Física y Matemáticas, Teorema de Nöther: Contexto la Complejidad de la Educación Científica

Physics and mathematics, Noether's theorem: Context the Complexity of Science Education

Yeison Javier Cuesta Beltrán*[1], Neusa Teresinha Massoni[2], Julián Andrés Salamanca Bernal[3], Carlos Javier Mosquera Suárez[1]

[1]Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE), Bogotá D.C., Colombia.
[2]Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Porto Alegre, RS, Brasil.
[3]Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Grupo de Física e Informática FISINFOR, Bogotá D.C., Colombia.

Recibida en 12 de Diciembre, 2020. Aceptado en 9 de Enero, 2021.

En este artículo haremos la introducción de un teorema importante en la matemática, e influyente en la física, denominado Teorema de Nöther. Se abordará de manera histórica el contexto que llevó a Nöther a su desarrollo, explorando ciertos aspectos importantes en su educación y en su vida. Realizando un acercamiento analítico desde las nociones del capital de Bourdieu, sobre aspectos socioculturales relevantes que posibilitaron los aportes de Nöther en matemáticas y en física. La intención es postular este documento como un rescate histórico que exalte la importancia del contexto sociocultural para el desarrollo del conocimiento científico, procurando plantear una opción de trabajo para la enseñanza de la física y las matemáticas, donde se promueva una concepción humanizada del conocimiento en estas disciplinas.
Palabras claves: Teorema de Nöther, Enseñanza de la Física, Enseñanza de las Matemáticas, Emmy Nöther, Historia de la Ciencia, Capital Cultural, Mujer en la Ciencia.

This article introduces an important theorem for mathematics and physics called Nöther theorem. The historical context that led Nöther to his development will be addressed, exploring certain important aspects in his education and in his life. In the article an analytical approach is made from Bourdieu's notion of capital, on relevant sociocultural aspects that made possible Nöther's contributions in mathematics and physics. The objective is to postulate this document as a historical rescue that exalts the importance of the sociocultural context for the development of scientific knowledge. Seeking to propose a work option for the teaching of physics and mathematics, where a humanistic conception of knowledge is promoted in these disciplines.
Keywords: Nöther's Theorem, Teaching of Physics, Teaching of Mathematics, Emmy Nöther, History of Science, Cultural Capital, Woman in Science.

1. Introducción

En la enseñanza de cursos de física universitaria como mecánica analítica, física teórica, física moderna, física cuántica, teoría cuántica de campos, etc., es habitual que los profesores aborden el Teorema de Nöther enfocando sus explicaciones en los fundamentos y las aplicaciones científicas. Desde nuestra perspectiva consideramos que esta tarea podría enriquecerse de manera potencial integrando en la práctica de aula elementos históricos sobre Nöther y su trabajo, procurando a través de estos, abordar la complejidad de las interacciones sociales que hacen posible la elaboración del conocimiento en física y en matemáticas. Mayly Sánchez profesora de la Universidad de Iowa señala que cuando aprendió el teorema se enamoró de este planteamiento, recordando que su profesor en el pregrado dio una buena clase sobre el tema, indicando que este era uno de los más elegantes principios en la física, lo que no le dijo fue quién era Nöther; Sánchez agrega que es una de esas figuras que en la historia de la física se esconde, solo años más tarde, en el doctorado llegó a descubrirlo [1].

Este artículo tiene como objetivo realizar un rescate histórico sobre Nöther y su trabajo, estudiando algunos aspectos de su trayectoria desde el concepto de capital, generalizado por Bourdieu, autor que planteó un modelo sociológico que consideramos se ajusta bien al análisis de acontecimientos destacables de la vida de Nöther, en particular, aquellos aspectos relevantes que hicieron posible su participación en el mundo de las matemáticas y la física. La idea es postular este documento como una alternativa educativa para el proceso de enseñanza del profesorado que aborda estos contenidos.

El documento busca promover en los lectores concepciones humanizantes sobre el conocimiento científico, posturas que desde nuestra perspectiva consideran que

* Correo electrónico: yjcuestab@correo.udistrital.edu.co

este tipo de conocimiento es una elaboración que hace parte de la cultura, una aproximación del mundo con alcances y limitaciones, que no solamente se ve impactado por aspectos al interior de la disciplina, sino que también por fenómenos socioculturales. En este artículo, en particular, se pretende resaltar las influencias del contexto sociocultural en la vida y obra de Nöther, aspectos que posibilitaron y complejizaron el desarrollo de sus aportes.

2. Referente Metodológico

Desde el punto de vista metodológico, asumimos este como un estudio de caso histórico en el que los hechos y el contexto de construcción del Teorema de Nöther son interpretados, buscando mostrar matices del hacer científico, así como de influencias socioculturales en la ciencia, entendida como un emprendimiento humano. El teorema, nociones e implicaciones son presentados, y en la secuencia discutimos el contexto social e histórico en que fue desarrollado. El estudio es metodológicamente orientado por aspectos historiográficos, considerando que todo discurso escrito sobre acontecimientos y hechos del pasado tiene por objetivo exponer una interpretación sobre los hechos históricos [2]. La historiografía puede mostrar los caminos que cierta área ha pisado; es eficaz en la identificación de influencias sociales, políticas, económicas y personales que un científico, una científica o área de la ciencia hayan sufrido [3]. La historiografía se ocupa de las fuentes y el análisis de datos, con los criterios que conducen a la investigación y el enfoque de puntos de vista [2]. Se preocupa identificar y tornar conscientes sobre las distintas tradiciones historiográficas para evitar que la narrativa sea una "biografía heroica" en la que el científico es siempre exitoso; que haya excesiva exaltación de la ciencia y del conocimiento positivo como un proceso acumulativo y lineal; o que la ciencia sea percibida y narrada como teniendo un fin en sí misma, exenta de influencias externas a ella, o enalteciendo únicamente a algunos científicos que marcaron una época determinada [4], colocando bajo el mando de la invisibilidad a todos los demás. Aspectos historiográficos orientarán este estudio buscando evitar el uso de formulaciones anacrónicas, es decir, evitando interpretar el pasado con valores, ideas, creencias o reglas y normas actuales [5]; centrando la formulación de interpretaciones sobre los acontecimientos de la época en que Nöther vivió y produjo, sin prejuicios (por ejemplo, económicos, raciales, de género, etc.), y teniendo en cuenta que la relación entre el comportamiento de los científicos, la comunidad científica y el contexto sociocultural son indisociables. Aunque estos cuidados han sido foco de nuestra atención en el intento de hacer una adecuada reconstrucción histórica, destacando además que las fuentes fueron secundarias (libros, artículos, publicaciones sobre la vida y obra de Nöther), es decir, no examinamos textos seminales, asumimos que no es posible analizar el pasado sin tener en cuenta los desarrollos científicos sobre los que hoy disponemos. El propio enfoque analítico aquí presentado es soportado teóricamente por conceptos y nociones de Bourdieu, que es un pensador reciente.

3. Referente Teórico

3.1. Sobre el Capital de Bourdieu

El sociólogo francés Pierre Bourdieu, desarrolló una teoría que hoy en día es un marco de referencia sobre: teoría de la escuela, teoría de la movilidad social, teoría de la sociedad y de la acción [6]. Bajo los planteamientos de Bourdieu la idea del campo social es fundamental, para el autor, según [7] este resulta ser un espacio social específico en el que las relaciones se definen de acuerdo a un tipo especial de poder o capital particular, detentado por los agentes (individuos que actúan y pueden producir efectos en el campo) que ingresan en competencia en ese espacio social. "Podemos definir el espacio social como un conjunto de relaciones o un sistema de posiciones sociales que se definen las unas en relación a las otras" [7, p. 14]. Es de resaltar que el campo va ligado al capital y viceversa. Según [8, pp. 6–7] "para elaborar el campo, se debe identificar las maneras de capital específico que operan en este, y para elaborar las maneras de capital específico uno debe conocer el campo".

La especificidad del campo artístico, científico, religioso, literario, político, educativo, empresarial, etc., y sus reglas están determinadas por los tipos de capital, ya sea cultural, económico y social [7]. En los campos pueden surgir alianzas entre los miembros que los componen, buscando obtener beneficios e imponer como legítimas algunas posturas que los definen, en aquella búsqueda se presentan confrontaciones entre grupos, así como también entre agentes, en procura por mejorar posiciones [9]. Ese conjunto de relaciones entre las posiciones sociales en el campo social, se podría definir como un sistema de diferencias, en el que surge distancia social entre los agentes, separando posiciones inferiores y superiores, sin embargo, estas podrían cambiar dependiendo la distribución de los diferentes tipos de capital [7]. [9] con base al trabajo de Bourdieu, señala que la posición presenta dependencia con el tipo, el volumen y la legitimidad del capital que adquieren los agentes a lo largo de su trayectoria.

[7] con base a Bourdieu señala que los diferentes tipos de capital son recursos que se producen y se negocian en el interior del campo, variando en función de las diversas actividades, resultando objeto de lucha entre los agentes en cuestión; estos recursos habitualmente pueden representarse de tres maneras distintas, capital económico, capital cultural y capital social. Para [10] el capital es una fuerza que puede lograr transformaciones en el mundo social; el autor explica que el capital económico es directamente convertible en dinero, es

decir, se relaciona con el control sobre los recursos y derechos de propiedad, el capital social, es el de las obligaciones y relaciones sociales, se asocia a recursos intangibles basados en las redes de influencias, en los grupos de colaboración, de pertenencia, asociándose a los títulos nobiliarios, y el capital cultural, corresponde a la educación, conocimiento, títulos académicos entre otros aspectos que se abordarán posteriormente en este documento.

[10, p. 132] manifiesta:

> Pero la acumulación del capital, ya sea en su forma objetivada o interiorizada, requiere tiempo. Hay una tendencia a la supervivencia ínsita en el capital, pues éste puede producir beneficios, pero también reproducirse a sí mismo, o incluso crecer. El capital es una fuerza inscrita en la objetividad de las cosas que determina que no todo sea igualmente posible e imposible.

[7] comenta sobre la existencia de un cuarto capital, denominado capital simbólico. Sobre el capital simbólico [11] afirman que no es una especie de capital específico, sino aquello en lo que se convierte cualquier capital, cuando no se reconoce en tanto que capital. "El capital simbólico es el poder de representar y otorgar valor, importancia social, a las formas de capital" [7].

En general, sobre la noción de capital [10] afirma: "El capital es trabajo acumulado, bien en forma de materia, bien en forma interiorizada o "incorporada"" (p. 131). El autor también señala: "Como vis insita, el capital es una fuerza inherente a las estructuras objetivas y subjetivas; pero es al mismo tiempo -como lexinsita- un principio fundamental de las regularidades internas del mundo social" [10, p. 131]. Para Bourdieu el capital es un fundamento que va más allá de lo material trascendiendo todas las instancias sociales.

3.1.1. Capital cultural

Se infiere de [10] que este capital concierne a la educación institucionalizada y no institucionalizada, a ese conocimiento construido en el transcurso de la vida, que varía de una cultura a otra, a través del cual se promueven identidades sociales diferenciadas, a partir de los preceptos sociales elaborados por una comunidad específica que comparte características, tradiciones, formas de ver el mundo, entre otros elementos. Según el autor el capital cultural puede existir en tres formas:

El capital cultural incorporado: Se refiere a una interiorización, a una cultivación educativa, que implica un proceso de enseñanza y aprendizaje, que necesita tiempo de quien invierte en este capital; implica un coste personal con privaciones, renuncias y sacrificios, por el afán de saber. [10, p. 140] afirma:

> El capital incorporado es una posesión que se ha convertido en parte integrante de la persona, en *habitus.* Del "tener" ha surgido "ser". El capital incorporado, al haber sido interiorizado, no puede ser transmitido instantáneamente mediante donación, herencia, compraventa o intercambio (a diferencia del dinero, los derechos de propiedad, o incluso los títulos nobiliarios).

El *habitus*, para [12] hace referencia a un sistema de disposiciones perdurables, estructuras estructuradas con predisposición a actuar como estructuras estructurantes, un principio de generación y estructuración de prácticas y representaciones que pueden ser regulares y reguladas sin ser el producto de la obediencia a jefes organizadores o a un conjunto de normas. El *habitus* es producto de la práctica, pero a su vez, es generador de prácticas, de percepciones, apreciaciones y acciones de los agentes, un principio que otorga orden a la acción [7]. Según [13] el *habitus* es un producto social, no corresponde a disposiciones innatas, sino que se adquiere a partir de la interacción social, en donde directamente está implicada la posición que los agentes ocupan en el sistema; no obstante, también es productor social, como un operador de cálculo inconsciente que permite a los agentes orientarse sin reflexión en el espacio social.

Aclarada la noción de *habitus*, retomemos los planteamientos sobre el capital cultural incorporado, destacando que [10] indica que el tiempo necesario de inversión en este tipo de capital depende en primer lugar del capital cultural previamente incorporado en la familia, pues la influencia de ésta es fundamental en la construcción de los agentes de las nuevas generaciones. El entorno físico, familiar y social juega un papel destacable en relación al capital cultural y al *habitus.*

El capital cultural objetivado: se asocia a los bienes culturales, es decir, libros, pinturas, partituras, entre otros elementos, no por su valor económico, sino por su influencia cultural, para lo cual el inversionista de capital cultural debe ser portador del *habitus,* para adquirir él mismo el conocimiento encontrado en los bienes.

El capital cultural institucionalizado: se refiere al reconocimiento que pueden otorgar las instituciones académicas por medio de títulos, un certificado de competencia cultural que se confiere a un sujeto que se convierte en portador de un valor duradero, garantizado legalmente, que asigna reconocimiento institucional al capital cultural adquirido. Para elaborar este tipo de capital se requiere de tiempo y usualmente capital económico, no obstante, el valor del título permite beneficiarse de un desempeño bajo el mercado de trabajo haciendo posible la obtención de un valor económico, o bajo el mercado de productos culturales.

3.2. Nociones previas al Teorema de Nöther

Coordenadas generalizadas: en el estudio físico del movimiento de una o de N partículas, habitualmente se acude a la noción de grados de libertad, que según [14] corresponden al número de magnitudes independientes que determinan la posición de un sistema de manera unívoca. Tales magnitudes podrían ser las coordenadas cartesianas, pero también otras distintas que se ajusten bien a la situación.

Las coordenadas generalizadas representan una opción de trabajo en el estudio de sistemas físicos, permitiendo definir la posición para especificar aspectos del movimiento. Según [15] estas coordenadas han de ser distancias, ángulos o cantidades relacionadas y pueden denotarse como $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$. Sus derivadas son llamadas velocidades generalizadas.

Lagrangiana: Desde la perspectiva de [14] hace referencia a la función lagrangiana, que se puede escribir de la siguiente manera

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_i, \dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_i, t) \tag{1}$$

L es una función de estado del sistema físico en estudio, una función escalar que pertenece a los reales, con la cual se puede obtener un acercamiento a la evolución temporal de un sistema dinámico, así como a sus relaciones con las leyes de conservación. Dicha función se encuentra definida en el marco de los posibles estados del sistema. Cuando L tiene una dependencia explícita del tiempo, esto significa que, por ejemplo, el sistema está sujeto a un campo externo con dependencia temporal. Si este no es el caso, L depende del tiempo en relación a las variables que definen el estado del sistema.

La lagrangiana comprende a q y $\dot{q}$, y no a las derivadas superiores, debido a que el estado mecánico de un sistema está definido por sus coordenadas y sus velocidades [14]. Sin embargo, [16] señala que en ciertos problemas de la mecánica es necesario acudir a funciones lagrangianas donde es oportuno incluir derivadas más altas, como la aceleración, manifestando en particular, que esto aplica en algunos aspectos de la teoría del caos y a una mecánica generalizada a este tipo de problemas que se ha denominado "mecánica de la sacudida".

La función L se define en el contexto de n teorías mecánicas (relativista, no relativista, cuántica, de campos o puntos materiales, interactuando o no). Según [17] la lagrangiana tiene particularidades interesantes como la invariancia por cambios de coordenadas generalizadas, lo que indica que las ecuaciones del sistema no presentan dependencia con la elección particular de coordenadas. Cabe destacar que L presenta simetrías internas (simetrías de calibración, o indicador) que expresa, especifica y describe el sistema mecánico en estudio.

La función lagrangiana comprende el estudio de sistemas con un número finito de grados de libertad, es decir, aplica para cuando estos tienen una cantidad de estados finitos dimensionales. En el caso, cuando se presenta un sistema con infinitos grados de libertad, se hace necesario abordar la noción de densidad lagrangiana $\mathcal{L}$. Cabe destacar, que en particular en este documento se enfocará en la primera.

3.2.1. Principio de mínima acción

También llamado principio de Hamilton. Un planteamiento que reduce las leyes de la mecánica a un enunciado según el cual, en comparación con todos los movimientos imaginables, el movimiento real es aquel para el que es mínima una cierta cantidad denominada, acción, cuyo valor depende del movimiento del sistema en su totalidad [18]. Es decir, este principio indica que la trayectoria que sigue una partícula es aquella que minimiza la acción. Suponga que un sistema mecánico conservativo se desplaza desde un tiempo $t = t_1$ hasta otro $t = t_2$ [15]. En tales instantes el sistema ocupa posiciones caracterizadas por los dos conjuntos de valores de q_1 y q_2 respectivamente [14]. De manera que, cuando un sistema deja el punto $q(t_1)$, en el tiempo t_1, y se dirige a $q(t_2)$, en el tiempo t_2, hay un número infinito de caminos que conectan estos dos puntos. La trayectoria física, seguida y observada experimentalmente, entre todas las posibilidades, se puede encontrar considerando que el movimiento siempre ocurre en un sentido para optimizar sus procesos. Esto matemáticamente se podría escribir como

$$Acción = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{2}$$

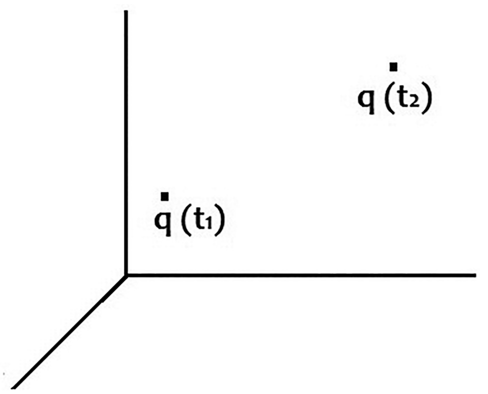
La manera funcional más simple, es una función lineal definida por una integración en el tiempo con los extremos t_1 y t_2. La condición extrema de esta función conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange, que tienen en las ecuaciones de Newton de la mecánica clásica un caso particular, ya que estas últimas generalizan exclusivamente la descripción de los sistemas de partículas descritos como puntos materiales interactivos o como campos interactivos, incluida la cinemática relativista y/o cuántica. En general, la acción presenta bondades para deducir las ecuaciones de evolución de sistemas en física clásica, física relativista y física cuántica.

Con el propósito de resumir aspectos de este apartado y comprenderlo un poco mejor, imaginémonos que una partícula se encuentra $q(t_1)$ y posteriormente se dirige a $q(t_2)$ (ver Figura 1). Una pregunta que valdría la pena plantear es: ¿cuál es la trayectoria que seguirá tal partícula?

Según el modelo de mínima acción, la trayectoria seguida por la partícula corresponde a aquella en la que al plantear la lagrangiana del sistema, y al calcular su integral evaluada en un lapso de tiempo, resulta un valor mínimo, es decir, por aquella trayectoria que optimiza el proceso. Vale la pena aclarar que el principio de Hamilton puede plantearse también para el caso de sistemas no conservativos, no obstante, es necesario avanzar con cautela al establecer las condiciones físicas [17].

3.2.2. Ecuación de Euler-Lagrange

Una trayectoria que corresponda al principio de mínima acción se denomina trayectoria estacionaria, una



Elaboración propia.

Figura 1: Plano sobre el que una partícula se moverá de $q(t_1)$ a $q(t_2)$.

expresión que hace referencia a un valor extremo (mínimo o máximo). El modelo señala que cuando hay ausencia de fuerzas no conservativas, así como independencia entre las coordenadas, para que se lleve a cabo tal trayectoria se debe cumplir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{3}$$

La ecuación diferencial planteada surge al resolver la integral de la lagrangiana, es decir, la acción, para el caso discreto, que hace referencia principalmente a tratar un sistema a partir de un número finito de variables o de grados de libertad. Cabe destacar que la expresión (3) en particular, hace referencia a un solo grado de libertad.

[14] señalan que si hay varios grados de libertad, las n funciones diferentes $q_i(t)$ deben variar independientemente, de manera que se obtienen n ecuaciones de la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{Donde } i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{4}$$

Si se conoce la lagrangiana del sistema mecánico, las ecuaciones (4) establecen la relación entre coordenadas, velocidades y aceleraciones, de manera específica son ecuaciones de movimiento [14].

3.2.3. Lagrangiana, energía y momento

[14] considerando que la lagrangiana de un sistema cerrado o de un sistema que se encuentra sometido a un campo exterior constante no depende de manera explícita del tiempo, demuestran que la lagrangiana puede escribirse de la siguiente manera

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q) \tag{5}$$

Donde T es la energía cinética que depende de la magnitud de las velocidades, y U es la energía potencial que depende de las coordenadas en las que se encuentran las partículas [14, 15]. A su vez, los autores manifiestan que los momentos generalizados pueden expresarse como las derivadas de la lagrangiana respecto a las velocidades generalizadas

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6}$$

[14] además señalan que las derivadas de la lagrangiana con respecto a las coordenadas generalizadas comprenden las fuerzas generalizadas

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7}$$

De manera que

$$F_i = \dot{p}_i \tag{8}$$

Y

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{9}$$

Si para el lector resulta de interés profundizar en la relación de la lagrangiana con la energía y el momento, se invita a revisar de manera cuidadosa el trabajo de [14].

3.3. Acercándose al Teorema de Nöther

[19] en su trabajo titulado Invariante Variationsprobleme propuso avances destacables que relacionan las simetrías con las leyes de conservación, en particular, en aplicación al campo de la mecánica clásica, así como a la teoría de la relatividad general. [20] manifiesta que Nöther trató un problema complejo, con un grado importante de generalidad, ya que abordó la lagrangiana de orden arbitrario con un número arbitrario de variables independientes, y a su vez con un número arbitrario de variables dependientes, considerando la invariancia de tales lagrangianas bajo la acción de grupos de transformaciones infinitesimales.

Para mostrar aspectos de aplicación del trabajo de Nöther, pensemos en que si cambiamos la posición de un objeto en estudio, por ejemplo, se hace una rotación o una traslación, y la lagrangiana no varía, se dice que el sistema presenta una simetría continua, descrita por funciones continuas. En física, habitualmente este tipo de simetrías son espacio-temporales.

En consideración con lo anterior el teorema de Nöther se puede enunciar de la siguiente manera:

Si la lagrangiana de un sistema físico es invariante en rotaciones o en traslaciones o presenta una independencia del tiempo, es decir, es invariante bajo una simetría continua, entonces existe una ley de conservación asociada.

En otras palabras, el teorema de Nöther señala que cuando se calcula la acción, si dentro del sistema existen elementos de simetría aparecen espontáneamente principios de conservación.

3.3.1. Aproximación a la Demostración del Teorema de Nöther

En seguida se presenta una aproximación a la demostración del teorema. Una presentación simplificada para otorgar algunas ideas introductorias al lector, no obstante, se reconoce que la demostración planteada por Nöther conlleva exquisito formalismo y detalle.

Entonces, si existe una simetría continua en el sistema y la tasa de variación total de la lagrangiana es nula se puede plantear

$$dL = 0 \tag{10}$$

Acorde con las coordenadas de la lagrangiana, aunque sin considerar la del tiempo de manera explicita

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2}dq_2 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}}d\dot{q_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}}d\dot{q_2} + \cdots \tag{11}$$

Considerando y sustituyendo las ecuaciones (6) y (9) en (11)

$$dL = \sum_i \left(\dot{p_i} dq_i + p_i d\dot{q_i}\right) = 0 \tag{12}$$

Como la expresión entre paréntesis es la solución a una derivada de producto entonces

$$\sum_i \frac{d}{dt} p_i dq_i = 0 \tag{13}$$

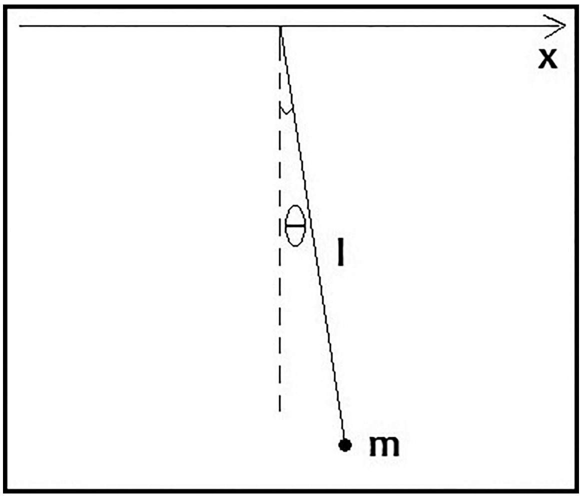
Debido a que la derivada temporal esta igualada a cero, podemos considerar que cierta magnitud no cambia en el tiempo, en este caso en particular, esta ha de denominarse carga Q, que no hace referencia a la carga eléctrica, ni a la noción de carga en mecánica.

$$Q = \sum_i \frac{d}{dt} p_i dq_i \tag{14}$$

Q una cantidad constante, que puede ofrecer información física del sistema, sobre la energía, o la cantidad de movimiento. Cabe señalar que esta última ecuación no representa una expresión única para el teorema, existen diversas formas de expresarlo.

3.3.2. Aplicación: El caso particular del péndulo que oscila suspendido de un punto que se mueve horizontalmente con velocidad constante

El sistema físico en estudio comprende un péndulo simple que oscila suspendido de un punto que se mueve horizontalmente sin experimentar fricción (ver Figura 2). Para iniciar vamos a determinar la lagrangiana del sistema recurriendo a la energía cinética y potencial de



Elaboración propia.

Figura 2: Representación de un péndulo que oscila suspendido de un punto que se mueve horizontalmente con velocidad constante.

este caso en específico, así como a la ecuación (5)

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{m}{2}\left(-l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right) + \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta\right) \tag{15}$$

$$U = -mgl\cos\theta \tag{16}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta \tag{17}$$

Cuando la lagrangiana de un sistema físico no contiene la coordenada q_i, pero sí $\dot{q_i}$, la respectiva coordenada se denomina cíclica [16–18, 21]. Ahora, si se plantea la ecuación i-ésima

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Donde q_i es una coordenada cíclica de la lagrangiana, entonces $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, de modo que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) = 0$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6) resulta

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \tag{18}$$

De manera que el momento generalizado p_i es constante.

En el caso particular, del péndulo que oscila suspendido de un punto que se mueve horizontalmente con velocidad invariante, la lagrangiana no depende de x, sino que es función de $\dot{x}$, por lo que la coordenada x es

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0510

cíclica de modo que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta$$

$$p_x = m\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \tag{19}$$

Siendo p_x el momento lineal constante de la masa oscilante m. De manera, que si la coordenada generalizada está ausente en la lagrangiana L, su momento lineal generalizado resulta constante. En consecuencia, las variaciones en el valor de la coordenada no modifican la lagrangiana [18]. Esa así como la invarianza ante traslaciones del sistema en cierta dirección conlleva a la conservación de la componente del momento lineal en esa dirección [16].

3.3.3. Algunas implicaciones del Teorema de Nöther

- Si en un sistema físico cambia la posición del cuerpo en estudio en cualquier dirección y la lagrangiana es invariante, se conserva el momento lineal.
- Si en un sistema físico se hace una rotación y la lagrangiana es invariante, se conserva la cantidad de movimiento angular.
- Si en un sistema físico varía el tiempo y la lagrangiana es invariante a este incremento, en ese caso existe una simetría temporal, resultando asociada la conservación de la energía.

3.3.4. Algunos alcances del Teorema de Nöther

A continuación se enlistan algunos aspectos relevantes del teorema que fueron aclarándose en la medida que la física avanzó a lo largo del siglo XX y lo que llevamos del XXI:

- El teorema es aplicable en física clásica, física relativista y física cuántica.
- El teorema permitió resolver dificultades respecto al principio de conservación de la energía en la teoría general de la relatividad.
- El teorema al permitir determinar teóricamente la conservación de la energía, el momentum angular y el momentum lineal, se convierte en un fundamento poderoso para la ciencia, pues actualmente muchas de las grandes preguntas y desarrollos de la física están asociados a principios de conservación. Por citar un ejemplo, en física cuántica la conservación de cantidades como la energía han permitido predecir teóricamente partículas subatómicas como el neutrino y hasta el bosón de Higgs. Principios de conservación que aportan a elaboraciones como el modelo estándar de partículas. Cabe destacar que buen número de éstas han sido planteadas de forma teórica y luego detectadas experimentalmente.
- El teorema es aplicable en el estudio del núcleo atómico donde se indaga sobre posibles simetrías que pueden estar asociadas a conservaciones en los números cuánticos.
- El teorema permite dar nociones teóricas sobre las cantidades que se deben medir en el laboratorio para avanzar en la construcción científica.
- El teorema proporciona algunas nociones organizativas para el trabajo de investigación en física.
- Sustenta teóricamente a partir de la noción de simetría continua, los principios de conservación encontrados experimentalmente.
- Minkoswki, Hilbert y Einstein estaban buscando este desarrollo teórico.

4. ¿Quién fue Emmy Nöther?

Amalie Nöther, llamada cariñosamente Emmy, nació el 23 de marzo de 1882 en Erlangen al sur de Alemania. Fue hija de padres judíos. Su padre fue Max Nöther (1844–1921), un profesor distinguido de matemáticas en la Universidad de Heindelberg y en la Universidad Erlangen [22]. Su madre fue Amalia Kaufmann, una mujer de familia adinerada proveniente de Colonia [23]. Emmy tuvo tres hermanos menores. Alfred quien nació en 1883, Fritz en 1884 y Gustav Robert en 1889 [23]. De niña Emmy no parecía excepcional, una niña agraciada, corta de vista, conocida entre sus maestros y compañeras de la escuela como una estudiante inteligente, amable y simpática [24]. En su escuela estudiaba piano, idiomas y aritmética, y aunque inicialmente planeaba impartir clases de inglés y francés, con el tiempo su interés por las matemáticas fue aumentando [22].

[25] narra que Emmy a sus 11 años de edad fue invitada a la fiesta de cumpleaños de Anna, una niña de su edad, cuyo padre el doctor Herder por amenizar la reunión propuso algunos acertijos a los niños, algo que al parecer era del gusto de Emmy, quien se destacó entre los infantes solucionando los cuestionamientos; una vez finalizada la fiesta Anna le preguntó a su padre: ¿cómo es que Emmy resolvió esos acertijos tan rápido? Además, agregó: Lo hizo muy bien, ¿verdad? Su padre estuvo de acuerdo, y le contestó: sospecho que Emmy es una niña muy brillante, su padre es un gran matemático en la universidad, ella parecía disfrutar bastante de los acertijos, Anna preguntó: ¿Podría ser una matemática cómo su padre en el futuro? El doctor Herder respondió: lo dudo hija, no hay lugar académico para una mujer en la universidad, y agregó: Emmy crecerá para ser esposa y madre, una vida plena para una mujer.

En su infancia Emmy ingresó a Höhere Töchterschule, una escuela para niñas privilegiadas, uniéndose a un grupo de chicas hijas de prósperos médicos, abogados, empresarios y académicos, mujercitas que debían ser preparadas no como eruditas, pero si cultivadas para sus futuras vidas como esposas y madres [25]. Ella se destacó en la escuela en el estudio del francés e inglés, no de igual manera en la música, aun cuando su madre la practicaba con devoción [24]. Emmy y sus hermanos crecieron en un ambiente cálido, de apoyo, hogareño e intelectual [25].

En la cotidianidad familiar Emmy preguntó a su padre: ¿Qué haces todo el día? Max respondió: bien, soy matemático, me la pasó haciendo matemáticas y enseñándolas, Emmy admitió: no sé qué son las matemáticas, ¿Me dirías?, su padre dijo: estas aprendiendo aritmética, ese es el comienzo de las matemáticas, algo que te servirá para hacer seguimiento al dinero, para planificar la costura y la cocina, Emmy preguntó: ¿Eso es lo que haces todo el día? Su padre sonrió y dijo: un matemático trabaja con ideas abstractas; espero cuando crezcan tus hermanos alguno se dedique también a las matemáticas, Emmy preguntó: ¿Yo podría ser un matemático? Su padre señaló: no Emmy tú eres una chica, nunca podrías ser un matemático, esa es una labor sólo de hombres, crecerás para ser una buena mujer, como tu madre, pasarás tus días cocinando, cociendo y cuidando niños, así ha sido siempre, Emmy expresó: no veo por qué no puedo ser un matemático [25].

En la Alemania de finales del siglo XIX y comienzos del XX, se esperaba que las mujeres cumplieran el rol de madres y esposas, asumiendo la responsabilidad de la crianza de los niños, las labores de la cocina y los compromisos con la iglesia [26]. De acuerdo con la vida de Nöther y su entorno familiar agregaríamos también la costura. No obstante, cabe destacar que existían diferencias entre las mujeres dependiendo su estatus social, pues las de clase alta tenían apoyo en la servidumbre, mientras que mujeres menos adineradas asumían todo el compromiso de las actividades domésticas [26].

[25] describe que una noche Emmy se acercó a su padre y le dijo: la semana pasada decías que mis hermanos Fritz y Alfred estaban empezando con su clase de álgebra, ¿Qué es el álgebra? Su padre contestó: es una forma de generalizar la aritmética, Emmy seguía preguntando y él respondía manifestando la importancia de este conocimiento, enseñando un ejercicio que la niña entendiera, Emmy expresó: papá me gustaría aprender álgebra ¿tú me enseñas? su padre respondió: no veo por qué no, mañana traeré un libro de álgebra para ti. El interés de Emmy por el álgebra se mantuvo, buscaba aprenderla de manera reflexiva, sin acudir exclusivamente a la memorización de un conjunto de reglas, pretendiendo pensar en la manera como se planteaban los cálculos [25]. La curiosidad acercaba a Emmy cada vez más a su padre y a su trabajo

Emmy a sus dieciocho años, es decir, en 1900, presentó y aprobó los exámenes requeridos para poder enseñar idiomas modernos en instituciones de educación e instrucción de mujeres [24]. Su madre pensaba que la elección de enseñar idiomas era la mejor, pues al parecer Emmy no se iba a casar y formar una familia, sin embargo, a ella no le convencía esta iniciativa, una postura que fue manifestada a sus padres, y sobre lo que su madre le preguntó: entonces ¿Qué estás pensando? Si quieres podemos arreglar un matrimonio, Emmy respondió: no, pongo en duda que posea paciencia para ser una buena esposa, y todavía no me va muy bien con el piano, ni con la costura, tengo un plan diferente, me gustaría presentar y aprobar el Abitur (prueba de selectividad alemana que se realiza al finalizar la secundaria) e ingresar a la universidad a estudiar matemáticas, su madre contestó: no estamos bromeando, necesitas hacer planes reales para tu vida, deja de soñar, su padre en aquel momento más dispuesto a otras ideas interrumpió diciendo: puede que no sea tan descabellado, Emmy es brillante, se desenvuelve bien en el álgebra, su madre no muy convencida, con incertidumbre dijo: en ese caso se necesitan tutores para prepararla, su padre expresó: podemos hacer arreglos para que Emmy pueda asistir a clases en la universidad, creo que Emmy lo lograría, al menos dos mujeres han obtenido el doctorado en matemáticas en Gotinga, su madre señaló: eso es un completo disparate, sin embargo, tienen mi apoyo [25].

En Alemania era muy difícil que el género femenino ingresara a la educación superior, en ese entonces se consideraba que el papel de la mujer era exclusivamente atender el hogar, motivo por el que en las escuelas las formaban para el trabajo en casa, situación que muy lentamente iba a cambiar en la primera mitad del siglo XX, época en la que se incrementó el número de mujeres de clase media en la educación superior, principalmente en la formación de profesoras de escuela, mujeres que si se casaban tenían que abandonar su trabajo [26].

Los padres de Emmy decidieron apoyarla para intentar seguir sus estudios, una tarea nada sencilla, pues en ese momento en el país, muy pocas mujeres asistían a la universidad. Entre 1900 y 1902, ella asistió a la Universidad de Erlangen para permanecer en clases sin ser oficialmente reconocida como estudiante [23]. Las posibilidades académicas de una mujer en aquel contexto eran escasas. [22] señala que en la cultura alemana de aquel tiempo las mujeres no podían matricularse en las universidades del país, aunque podían inscribirse como oyentes en un curso con el permiso del profesor. Cabe destacar que en Alemania entre el siglo XIX e inicios del siglo XX se dio el surgimiento de la sociedad liberal burguesa [27, 28], algo que llevó a la necesidad de capacitar a la sociedad en lectura, en escritura y en cálculos, pero también, se asumió la responsabilidad de formar en saberes técnicos profesionales, en conocimientos científicos y sociales; estos estudios especializados fueron abordados principalmente por instituciones privadas orientadas hacia determinados ambientes sociales [28]. Sin embargo, el proyecto propuesto por la sociedad burguesa iba enfocado hacía el burgués de género masculino, manteniéndose desigualdad jurídica, política y social con las mujeres, no obstante, la educación del género femenino experimentó mejoras que permitieron avanzar en un lento proceso de emancipación de la mujer, que inició tímidamente a finales del siglo XIX y que no podemos considerar concluido de manera definitiva [29].

En julio de 1903 en su primer intento Emmy aprobó el Abitur, una vez en sus manos, siguió adelante con su plan, que era estudiar en Gotinga, ese mismo año se registró en las clases de audición en esa universidad, asistiendo por un semestre a conferencias del profesor Schwarzschild en astronomía y de los profesores Minkowski, Blumenthal, Klein y Hilbert en matemáticas, profesores quienes la alentaron a seguir sus estudios luego de reconocer la profundidad de sus preguntas [24, 25]. Cabe destacar que en aquel tiempo la facultad de matemáticas de la Universidad de Gotinga, era más liberal que otras instituciones alemanas en sus políticas hacia las estudiantes [30].

Luego del semestre en Gotinga Emmy regresó a Erlangen, para ese momento se había modificado la ley, permitiendo que las mujeres pudieran inscribirse en la universidad, realizaran exámenes con el mismo derecho que los hombres, algo que ella aprovechó para ingresar como estudiante regular a la universidad a finales de 1904 [24]. Emmy se inscribió como la única mujer en la facultad de matemáticas con 46 estudiantes varones, para algunos un acto de rebeldía, no obstante, Herman Weyl, un compañero cercano de Emmy, en el discurso conmemorativo después de su muerte, señaló que no conoció en ella actos de rebeldía, pero ¿quién sabe sobre sus pensamientos internos al inicio del siglo XX?, lo único que puede haber al respecto es especulación, sin embargo, lo destacable fue que ella logró iniciar su proceso de formación profesional en matemáticas contra todo pronóstico [30].

Emmy estando de nuevo en Erlangen, tuvo la oportunidad de estudiar con su padre y con Paul Gordan un amigo cercano de la familia, quien era profesor y colega de Max Nöther, Gordan era conocido como el rey de los invariantes debido a sus extensas investigaciones en ese tema, profesor que se convirtió en el mentor de Emmy y ella en su única estudiante de doctorado [25]. Cabe destacar que en su trabajo académico, Max Nöther intentó "algebraizar" la teoría de la función algebraica, buscando liberarla de nociones geométricas analítica e intuitivas, mientras que Paul Gordan se especializó en el cálculo de invariantes, que parecía ser la herramienta para lograr el propósito de Max [31]. En la Universidad Erlangen, Emmy bajo la orientación de Gordan, elaboró un artículo basado en la teoría de invariantes, denominado, Sobre la construcción del sistema de formas para la forma biquadrática ternaria ("Uber die Bildung des Formensystems der ternaren biquadratischen Form"), un trabajo que fue registrado como su tesis doctoral, y que en diciembre de 1907, fue expuesto por Emmy Nöther, recibiendo aprobación con la distinción de Summa Cum Laude [24].

Después de obtener su grado Emmy trabajó en la Universidad de Erlangen desde 1908 hasta 1915, sin una posición académica formal y sin paga [25]. Al no dársele esa oportunidad oficial en la universidad, ella aceptó esas condiciones por amor al conocimiento y por mantenerse en el grupo de académicos. En 1910 Gordan se jubiló siendo reemplazado por Erhard Schmidt (1876–1959), un profesor que duró poco tiempo en el cargo, y que sería sustituido por Ernst Fischer (1875–1954), quien se convirtió en el nuevo tutor de Emmy [24].

[24] señala que a pesar de las frecuentes charlas personales entre Emmy y Fischer, era habitual la comunicación por correspondencia, donde se extendían sus diálogos matemáticos, algo que se incrementó cuando en 1915 ella viajó a Gotinga, y él fue reclutado por los militares, cabe destacar que la influencia de Fischer en el enfoque de trabajo de Emmy Nöther fue apreciable, pues facilitó la modificación de su postura puramente algorítmica acogida de Gordan, para desarrollar un modo de pensar más reflexivo y característico al estilo de Hilbert. Emmy durante su vida expresó el agradecimiento con Ernst Fischer por acercarla al álgebra abstracta, campo en el que iba trabajar por casi 20 años [25]. Es de aclarar que Fischer fue reclutado militarmente debido a que por esa época ya se había desatado la Primera Guerra Mundial, en la que Alemania participó.

Una noche Max Nöther dijo a Emmy, creo que deberíamos hacer un viaje a Gotinga para que pases una o dos semanas trabajando con los profesores Klein y Hilbert, has hecho un importante trabajo en el álgebra de Hilbert, ya es hora de colaborarles activamente, tú eres parte de la nueva generación que llevará ese campo, ¿Por qué no le escribo al profesor Klein y veo lo que piensa? (Max Nöther y Felix Klein habían trabajado juntos años antes), una semana más tarde, Max Nöther recibió una carta de Klein solicitándoles que fueran a Gotinga [25].

Hacer posible el viaje de Emmy a Gotinga, donde la esperaban dos grandes matemáticos, Hilbert y Klein, fue un paso agigantado para la joven matemática, quien compartió con ellos por dos semanas, logrando una segunda invitación para 1915 [25]. La intención de los profesores era que Emmy sustituyera al Privatdozent (una persona que ha adquirido el derecho a enseñar, sin estar en el personal remunerado de la universidad) [24]. Pero las cosas no serían nada fáciles. Ya que dos semanas después de iniciar su viaje la madre de Emmy murió repentinamente [24]. Motivo por el que Emmy se devolvió a Erlangen para estar al tanto de la situación, sin embargo, al cabo de algunas semanas ella volvió a Gotinga [25].

Hilbert y Klein intentaron organizar el ingreso de Emmy a la Universidad de Gotinga como miembro oficial de la facultad. Los trabajos de investigación de la joven eran destacables, si hubiese sido hombre habrían resultado suficientes, pero como no lo era, generaba resistencia en un sector de la comunidad académica, y para que la aceptaran, se requería de la votación de toda la facultad, incluidos filósofos, historiadores, científicos y matemáticos, entre los que se escuchó: ¿Cómo podríamos permitir que una mujer se convierta en conferencista?

¡Después ella querrá ser profesora! ¿Y entonces qué le impedirá a ella convertirse en miembro del senado de la facultad? A lo que respondió Hilbert más o menos con las siguientes palabras: Caballeros, el puesto en cuestión es en una universidad, no en un establecimiento de baños; seguramente el sexo del solicitante no debería ser un factor [25]. La versión habitual en español de las palabras de Hilbert es: Caballeros, yo no veo porque el sexo de un candidato es relevante después de todo esta es una institución universitaria, no una casa de baños. La idea de fondo es la misma.

La iniciativa de conseguirle a Emmy una posición de enseñante en la universidad fue fallida en un comienzo, las leyes sólo aceptaban candidatos masculinos, la resistencia de algunos profesores de otras disciplinas fue constante [23]. Alemania había empobrecido por la guerra, no obstante, si hubiese habido dinero para contratarla, ¿Qué pensarían los soldados que regresan a casa después de la guerra si encontraran a una profesora en esa famosa universidad? ¿Cómo reaccionarían si llegaran a Gotinga y se esperara que aprendieran a los pies de una mujer? [25].

Con el propósito de solucionar la situación de Emmy, a Hilbert se le ocurrió: publicitar las clases con su propio nombre, con la información adicional que contaría con la ayuda de la joven Doctora Emmy Nöther; quien en la práctica enseñó muchos de los cursos en su totalidad, el problema era que no le pagaban por su trabajo. Para Emmy afortunadamente dos tíos maternos le dejaron como herencia una suma importante de dinero, lo que favoreció su manutención, aspecto que le permitió aceptar la propuesta sin paga, en últimas, para ella lo realmente relevante era hablar y hacer matemáticas, motivo por el que estaba agradecida con Hilbert y Klein, ya que ellos la respetaban y la trataban como a una colega [25].

En una charla entre Hilbert y Klein, Hilbert comentó sobre Emmy Nöther: Su paciencia puede tener límites, y ¿Qué ocurriría si alguien más descubre la joya que tenemos?, podríamos perderla, la necesitamos, posiblemente más de lo que ella nos necesita a nosotros, Klein respondió: No creo que estemos en peligro de perderla, Gotinga es el mejor lugar para ella y ella lo sabe [25].

A pesar de no recibir remuneración y de no tener el reconocimiento que se merecía, Emmy no se desanimó y siguió trabajando en sus proyectos. Su elaboración quizá más destacable, el teorema de Nöther, fue desarrollado en 1915, y luego publicado en 1918; cabe destacar que este aporte ha promovido el estudio de las simetrías que se encuentran a la vanguardia del pensamiento de la física hasta hoy día, permitiendo la construcción de planteamientos como la simetría gauge considerada un principio dinámico [22]. Esta última es fundamental en los planteamientos sobre simetrías que subyacen en la física cuántica.

Entre 1917 a 1918 Emmy Nöther se ocupó de estudiar los invariantes diferenciales, un tema sobre el cual presentó ante la Sociedad Matemática de Gotinga una conferencia titulada, Uber Invarianten beliebiger Differentialausdrucke (Sobre invariantes de formas diferenciales arbitrarias), y otra sobre el problema de variaciones invariantes; así mismo, Klein en representación de Emmy, en una reunión regular con la Real Sociedad para las Ciencias presentó el documento con título, Uber Differentialformen beliebigen Grades (Sobre formas diferenciales de grado arbitrario), y luego de algunos ajustes, a finales del 1918 se entregó la versión final de este trabajo, siendo considerado la tesis de habilitación para que Emmy oficialmente tomara el cargo de Privatdozent, en 1919 la universidad dio la oportunidad para realizar la evaluación oral correspondiente al proceso, una defensa del trabajo que se llevó a cabo ante el contingente matemático de la facultad filosófica de Gotinga, que aprobó esta gestión y otorgó el reconocimiento anhelado por Emmy [24]. Cabe destacar que el cargo de Privatdozent, que Emmy alcanzó en ese momento no conllevaba una paga regular, pero sí el derecho a realizar la tarea de enseñanza oficial en matemáticas [30].

Klein y Hilbert en 1915 trabajaron en estrecha colaboración con Albert Einstein en su teoría general de la relatividad, por su experiencia consideraron que posiblemente los aportes de Emmy Nöther en álgebra abstracta serían fundamentales en este tema de la física, es así como en 1917 Hilbert, Klein y Nöther se enfocaron en la conexión entre los invariantes y la teoría de la relatividad de Einstein, considerando que aunque el tiempo se deformara en un marco de referencia que experimenta gran velocidad, habrían cosas que permanecerían invariantes; al respecto Einstein escribió a Hilbert: tuve una conversación interesante con la joven doctora Nöther sobre su trabajo de invariantes . . . Me sorprendió que pudiera ver la relatividad desde diferentes ángulos . . . Me parece que ella entiende bien su trabajo [25]. Einstein fue uno de los primeros en reconocer la importancia del teorema de Nöther, describiéndoselo a Hilbert como un pensamiento matemático penetrante [22]. Emmy Nöther vinculando los invariantes diferenciales con álgebra lineal, logró proporcionar una formulación matemática para la relatividad, una tarea que necesitó de su álgebra abstracta, Einstein sabía de la importancia del argumento matemático para su trabajo, pero él no consiguió hacerlo sólo [25]. [32] afirmó: "A juicio de los matemáticos vivos más competentes, Fräulein Nöther fue el genio matemático creativo más importante producido hasta el momento desde que comenzó la educación superior de las mujeres" (p. 12).

Para 1915, Emmy ya se había dado a conocer en el campo del álgebra abstracta, y en 1920 ya era considerada una matemática con autoridad, no solo un apéndice de Hilbert y Klein [25]. Dedekind, Fischer y Hilbert prepararon el escenario para el trabajo de Emmy Nöther en álgebra abstracta, pero fue ella la que lo juntó en un todo, construyendo planteamientos y proponiendo un método axiomático para tratar problemas algebraicos, consolidando una teoría consistente; sus trabajos y reconocimiento la llevaron a desempeñarse como editora de la revista matemática Mathematische Annalen, donde asesoraba a matemáticos jóvenes [25].

Emmy Nöther en 1921 realizó otro triste viaje a su casa, ahora para el funeral de su padre, con quien siempre había tenido una buena relación unida por el amor y las matemáticas, un padre que estaba orgulloso de su hija, ya que en el campo de las matemáticas ella había ido a donde ninguna otra mujer lo había hecho antes [25]. Es exaltable el apoyo de Max Nöther en el inicio y el progreso de la carrera de Emmy.

Debido al trabajo de Emmy, y a la demostración de sus habilidades, en 1922, el departamento de matemáticas y ciencias naturales de la Universidad de Gotinga realizó la petición al Ministerio solicitando que a la doctora Nöther, quien era Privatdozent, se le otorgara el título oficial de profesor de ausserordentlicher (Profesor titular), solicitud que a pesar de presentar algunas tensiones finalmente fue aceptada [24]. Eso sí, sin salario estable y confiable [25].

Emmy Nöther fue una persona notablemente creativa al abordar variedad de conceptos matemáticos y juntarlos de forma revolucionaria, pero debe reconocerse que tuvo dificultades para explicar sus construcciones al mundo en general, no todos los asistentes a sus conferencias, aun académicos entendían lo que Emmy quería decir; sus exposiciones principalmente fueron comprendidas por algunos de sus colegas y sus pupilos más sobresalientes [25].

En 1931 la doctora Nöther se encontraba enseñando en Gotinga, trabajando en avances matemáticos, así como asesorando las tesis de grado de sus estudiantes, en general, tenía éxito académico y podía ver que sus ideas estaban siendo aceptadas ampliamente en la disciplina, ella pasaba un buen momento a pesar de su bajo salario [25]. Mientras tanto entre 1930 y 1933 el panorama político de Alemania fue agitado, enredado, complejo y determinante, pues se vivía un ambiente donde se mantenían ataques constantes por parte de las viejas élites contra el parlamento de la república de Weimar, el problema económico en el país era evidente, la violencia se incrementaba en las calles, y se presentaba el ascenso de un movimiento de masas, que en un período de dificultades atrajo la atención de una parte de la población que se dejó seducir por un líder carismático como Adolf Hitler, un hombre que vendió su imagen como aquel personaje fuerte que algunos alemanes estaban esperando, la promesa de la nueva comunidad nacional, que restituiría la grandeza de Alemania, acabando con las disposiciones del tratado de Versalles que atentaban contra la nación, que libraría al país de los judíos que habían contaminado a la raza aria, y que proscribiría a los criminales y bolcheviques que no habían traído nada bueno a Alemania, promesas atractivas para los alemanes desesperados por la situación; es así como en enero de 1933 Hitler fue nombrado constitucionalmente canciller, y una vez afianzado en el poder, el 7 de abril de 1933 emite la “ley para la restauración de la función pública”, que prohibía el desempeño de labores en cargos públicos a personas no arias [27].

Hitler impulsó una ley que otorgaba poder independiente al Reichstag (parlamento), promoviendo drásticas medidas, resultando afectadas inicialmente las instituciones públicas, en las que se decretó que los judíos alemanes u otras minorías, ya no podían trabajar como funcionarios, fue así como los profesores de Gotinga con descendencia judía como Emmy Nöther, Richard Courant y otros académicos del Instituto de Matemáticas recibieron telegramas que los colocaron en licencia académica en vigencia inmediata, profesores nacidos en Alemania, eruditos importantes del país, de repente se les dijo que no eran alemanes en absoluto; las cartas de rechazo a esta medida por parte de la academia pronto se manifestaron, resultando un esfuerzo en vano, ya que la situación fue cada vez más compleja [25].

Muchos de los académicos impactados por lo que acontecía en Alemania tuvieron que buscar opciones para salir del país, algunos recibieron invitaciones de instituciones estadounidenses, que en la mayoría de los casos fueron aprovechadas [25]. Sin embargo, intentar ubicar tantos profesores alemanes en las universidades no fue nada fácil, debido a la alta demanda, además, no todas las instituciones tenían las facilidades para contratar profesores visitantes [24]. Pero también, como manifiesta la profesora y periodista Laurel Leff, algunas instituciones no presentaban disposición para el recibimiento, mostrando inconformidad con el origen de los refugiados [33]. En particular, la doctora Nöther esperaba encontrar un puesto en Moscú con el apoyo de su colega Pável Alexandroff, pero el proceso fue lento para la necesidad que se tenía, por otro lado, el Somerville College de Oxford intentó conseguirle fondos externos por la Fundación Rockefeller pero la gestión no dio fruto, sin embargo, la situación empezó a mejorar cuando el Bryn Mawr College invitó a Emmy Nöther como profesora visitante, quien tomó esta opción, saliendo con nostalgia de su país rumbo a New York en octubre de 1933 [25].

El Bryn Mawr College, una universidad femenina ubicada en Pensilvania Estados Unidos abrió las puertas a la doctora Nöther, quien manifestó capacidad y disposición en el proceso de adaptación, asimilando poco a poco las nuevas circunstancias, algo que en general para los migrantes no fue fácil, ya que entre sus preocupaciones estaban las tensiones que se vivían en su país [24]. Cabe destacar que algunos de ellos tuvieron que dejar su casa, sus familiares, sus amigos, y sus trabajos donde quizá ya se sentían cómodos. En particular, a la profesora Nöther le favoreció la cálida bienvenida y el apoyo que le ofreció la universidad que la recibió, una institución sobre la que muy probablemente no sabía mucho antes de ir allí, no obstante, las personas de Bryn

Mawr eran conscientes de su importancia considerándose afortunadas de tenerla como visitante [24].

En Bryn Mawr aunque principalmente se enseñaban carreras de pregrado, también existía un programa de posgrado en matemáticas, un espacio donde Emmy como investigadora podía desenvolverse con destreza, cabe destacar que la dirección del departamento de matemáticas en ese momento estaba a cargo de Anna Pell Wheeler quien había estudiado en Gotinga con Hilbert y Minkowski [25]. [34] señala que Ruth Stauffer quien fue estudiante de doctorado orientada por Emmy Nöther comentó que, entre Wheeler y Nöther se había generado una fuerte amistad quizá debido a que compartían situaciones en común, pues juntas eran conocidas matemáticas, pero además, comprendían las dificultades que tenía una mujer académica en Alemania. Quizá por estas razones la empatía avanzó, convirtiéndose Wheeler en un apoyo para la doctora Nöther.

La Fundación Rockefeller proporcionó fondos para una alianza formal entre Emmy Nöther y el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, donde ella dio una sesión semanal, el público presente en sus conferencias era similar al de Gotinga, logrando que ella disfrutara de la interacción con las personas asistentes [25]. Emmy Nöther sobre su asistencia aclaró de manera escrita que esta no fue en la "universidad de hombres donde no se admiten mujeres", sino que fue en el instituto creado por iniciativa de Abraham Flexner y Oswald Veblen, donde se abordaban algunos temas de investigación; cabe recordar que cuando el gobierno alemán solicitó a la doctora Nöther abandonar su cargo de profesora, Hermann Weyl por ese entonces director del instituto de matemáticas en Gotinga intento establecer contacto con Princeton con la esperanza de concertar un puesto de profesora visitante para Emmy [24]. Sin embargo, como se puede inferir por lo narrado en este texto, tampoco se dio la oportunidad.

El 8 de abril de 1935, Emmy Nöther ingresó en el hospital de Bryn Mawr para someterse a una cirugía con el propósito de extirpar un quiste ovárico, los primeros cuatro días después de la cirugía ella parecía estar recuperándose, pero luego, sin previo aviso, cayó en coma y pasado un par de días murió [25]. Emmy Nöther falleció a los 53 años. Sus exequias se llevaron a cabo el 15 de abril en Bryn Mawr [24].

5. Aproximación Analítica sobre la Formación Intelectual de Emmy Nöther

Para realizar un acercamiento analítico sobre la formación intelectual de Emmy Nöther, acudiremos a la noción del capital propuesta por el sociólogo francés Pierre Bourdieu. Enfatizando en particular, en aspectos del capital cultural expuesto por el autor. Modelo que en nuestra consideración permite avanzar en la comprensión de aspectos que posibilitaron los aportes académicos de la doctora Nöther.

5.1. Los Senderos Académicos de Emmy Nöther, una Interpretación desde el Capital de Bourdieu

El capital cultural previamente incorporado en la familia de Emmy Nöther motivó en su infancia el interés por el estudio. Su padre al ser profesor universitario y su madre, una mujer culta, intentaron que sus hijos se educaran en un entorno de principios socialmente aceptados, promoviendo interés por el conocimiento.

Los Nöther-Kaufmann fueron una familia *con capital económico* que tuvo la oportunidad de pagar a sus hijos escuelas reconocidas en su ciudad. Recordemos que Emmy estudió en una escuela para niñas privilegiadas, no obstante, cabe señalar la limitación educativa que presentaban las mujeres debido a la tradición cultural alemana, en la que el papel social de la mujer era diferenciado con el del hombre.

Max Nöther profesor universitario de matemáticas jugó un papel importante para fomentar el interés de su hija Emmy por los cálculos, una inspiración motivada posiblemente hasta de forma inconsciente, ya que su padre sabía que en Alemania ese trabajo no era para mujeres. Emmy vivía en un entorno familiar donde probablemente habría libros de matemáticas, documentos del trabajo de su padre, juegos matemáticos, es decir, había presencia del *capital cultural objetivado*. Es factible que Emmy escuchara en su casa charlas sobre matemáticas de su padre con colegas invitados, como señala [25] fue un contexto familiar hogareño, intelectual. Una familia donde el *capital cultural* impulsaba la educación de sus hijos.

La cercanía de Emmy con su padre logró que creciera la curiosidad por su trabajo, permitiendo que él compartiera con ella su conocimiento en matemáticas, es decir, su *capital cultural.* Una oportunidad que su hija no desaprovechó, ya que con iniciativa empezó a dedicar tiempo extra al estudio del álgebra fuera de las exigencias de su escuela, tiempo al que hace referencia *el capital cultural incorporado*, permitiendo la consolidación del sistema de disposiciones perdurables para llevar a cabo sus estudios, y de esta manera la elaboración de sus saberes en el *campo* científico.

El capital cultural de Emmy Nöther en particular, aquel gusto por las matemáticas permitió que al momento de tomar decisiones sobre su futuro, propusiera una postura revolucionaria del papel de la mujer alemana en la sociedad, buscando adelantar sus estudios, lo que su padre estaba dispuesto a asumir, pues veía que el *habitus* de Emmy mostraba sus frutos, observando potencial en su hija, su madre no muy convencida por los preceptos culturales sobre el rol social de la mujer, en últimas decidió apoyarla, considerando necesario contratar tutores para avanzar en sus estudios, algo que se podía realizar gracias al capital económico familiar, asimismo,

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0510

su padre realizó algunos arreglos aprovechando su *capital social* como profesor universitario para que Emmy asistiera como oyente a la universidad.

La aprobación del Abitur por parte de Emmy le asignó reconocimiento institucional al capital cultural adquirido hasta ese momento, es decir, *capital cultural institucionalizado*, que necesitaba para intentar seguir sus estudios universitarios. En su primer acercamiento como estudiante oyente en la Universidad de Gotinga, Emmy distinguió e interactuó con académicos importantes como Klein y Hilbert, dando los primeros pasos sobre un *capital social* que en el futuro iba a resultar fundamental en *el campo social* para su desarrollo académico y profesional.

Después de la experiencia de un semestre en la Universidad de Gotinga, los cambios políticos emergentes en la Universidad de Erlangen favorecieron la carrera de Emmy al permitir su ingreso como estudiante regular, algo que evidencia cómo aspectos sociales influenciaron el desarrollo de un potencial personaje académico. Por otro lado, el camino hacia el estudio de los invariantes por parte de Emmy Nöther fue sugerido por el profesor Paul Gordan, una amistad de la familia, que en medio de la adversidad para que ella estudiara en la universidad, favoreció el proceso permitiendo que la joven trabajara este tema con él, es decir, *el capital social* de su familia de cierta manera influyó en lo que serían los intereses académicos de la joven Nöther.

Emmy al obtener su título de doctora se benefició del reconocimiento institucional, pero a pesar de su grado en la universidad no le daban la oportunidad de desempeñarse bajo el mercado de trabajo para obtener beneficio económico por el hecho de ser mujer. No obstante, su *capital cultural institucionalizado* favoreció su *capital social*, dándose a conocer en diferentes medios académicos, algo que era de su interés. [24] señala que en 1908 se convirtió en miembro del *Circolo matematico di Palermo* y en 1909 de la *Asociación alemana de matemáticos*. Cabe exaltar que luego de la jubilación de Gordan, el *capital cultural* del profesor Fischer orientó el trabajo de Emmy hacia el álgebra abstracta, tema en el que ella se convertiría en especialista.

En procura de mejorar la situación de Emmy, su padre de nuevo aprovechó el *capital social*, escribiéndole a su colega Felix Klein, sugiriendo que su hija podía aportar a su trabajo, logrando una invitación de corta duración en la que *el capital cultural* de la joven Nöther se destacó, llamando la atención de los académicos Klein y Hilbert, quienes consideraron que ella podría quedarse en la Universidad de Gotinga. Los prejuicios sociales de una parte de la comunidad no lo querían permitir, sin embargo, el apoyo de los dos matemáticos, *el capital cultural* de Emmy y su persistencia lograron la aceptación, eso sí sin recibir paga, pero a esa situación la joven le tenía la solución, ya que poseía un *capital económico* familiar que la respaldaría.

[10, p. 143] afirma: "... encontramos el hecho de que un individuo sólo puede prolongar el tiempo destinado a la acumulación de capital cultural mientras su familia pueda garantizarle tiempo libre y liberado de la necesidad económica". Emmy aprovechó el dinero heredado de sus tíos para mantenerse y posibilitar avances en su capital cultural y capital social, logrando reconocimiento de la comunidad de miembros que estudiaban matemáticas. Para [10] el reconocimiento del capital cultural, social o económico conlleva a hablar de capital simbólico que hace referencia al poder de representar y otorgar valor, importancia social, a las formas de capital, que logran manifestarse en la medida que sean reconocidas por otros, generando prestigio. Algo que provocó después de varios años su nombramiento como profesora titular.

El capital cultural y social de Emmy Nöther le permitió aportar abstracciones para el desarrollo de la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, así como también a la mecánica analítica, física cuántica, entre otros contenidos científicos. Esta mujer ha dejado un legado académico importante en matemáticas y física, trabajo que fue posible gracias a su perseverancia, pasión y predisposición potencializada por estímulos familiares y hasta sociales, aunque este último en muchos episodios de su vida complicó el asunto por los preceptos sociales de la época sobre las mujeres. Sin embargo, su valor y resiliencia favorecieron la configuración de un campo social donde ella se desenvolvió de manera ejemplar.

6. Posibilidades para la Enseñanza que ofrece esta Reconstrucción Histórica

Este documento pretende postularse como una opción para la enseñanza del teorema de Nöther y sus aspectos concernientes, sugiriendo integrar en el abordaje el rescate histórico sobre la vida de Emmy Nöther. Es probable que quien enseña pueda complementar la introducción formal al teorema, no obstante, la propuesta en este artículo procura proporcionar nociones básicas, reconociendo que la dimensión del trabajo de esta mujer matemática es mayor y profunda.

Este escrito favorece concepciones sobre la complejidad social y contextual en la que vivió Amalie Nöther para desarrollar su trabajo, señalando las múltiples variables que se opusieron y facilitaron su educación, el progreso en su capital cultural, y cómo existe interacción permanente entre el contexto sociocultural, las posibilidades académicas y la elaboración de conocimiento. El documento reconoce el potencial de la historia de la ciencia y las matemáticas, proponiendo un rescate histórico que no limité la enseñanza del teorema de Nöther exclusivamente a las ecuaciones, sino que integre nociones que puedan ampliar la perspectiva de los estudiantes.

La historia de la ciencia y las matemáticas presentan potencial para la educación en estas disciplinas, dado que contextualizan la elaboración del conocimiento, manifestando las problemáticas que afrontaron los académicos para su construcción, mostrando que detrás de esas teorías, teoremas, leyes, etc., existe un ser humano con oportunidades, restricciones, sueños y motivaciones que estuvieron implicados en la elaboración de sus aportes [35, 36].

En la revisión de la literatura sobre posibles potencialidades educativas de la historia de la ciencia, se han elegido las siguientes por considerarse acordes a lo propuesto en este documento:

- La historia de la ciencia proporciona contextos a la enseñanza de la ciencia [37]
- Favorece comprensiones acerca de que la creación científica no es reducible únicamente a un problema lógico, sino que es fruto de un proceso complejo histórico, de la interacción con el entorno social de cada época [38].
- Comparte con los estudiantes una visión más humanizada y realista de la física, favoreciendo el interés de los educandos hacia la disciplina [39].
- Podría inspirar nuevas maneras de presentar las clases de ciencia [37]

A estas potencialidades se propone integrar:

- La historia de la ciencia permite rescatar en la enseñanza el papel de algunos actores partícipes en la construcción del conocimiento científico, sujetos sobre los que habitualmente no se habla en clases, y poco se estudia en los libros de texto. Es probable que en la historia de la ciencia se encuentren las posibles causas por las que estos académicos han sido distanciados de tal reconocimiento. En ocasiones por factores sociales, pero también debido a la excesiva simplificación histórica lineal en la que sólo se muestran héroes científicos a quienes se les atribuye resultados finales, como si el hacer ciencia no fuese un proceso. Aspectos que en el estudiantado podría promover reflexiones en cuanto a las interacciones socioculturales influyentes en la construcción científica, permitiendo en ellos la elaboración de un conocimiento científico más humanizado.

Cuando nos referimos a factores sociales influyentes en el reconocimiento de la obra de los científicos, se busca destacar aquellas interacciones sociales que hicieron posible el trabajo, pero también aquellas que lo dificultaron, así como las interacciones de este tipo que dieron la posibilidad para que se priorizara un modelo, unos resultados experimentales, una sola versión de la historia, una manera de pensar sobre otras. Por citar un ejemplo alternativo al estudio abordado de Emmy Nöther, acudiremos por un instante al contexto de la medición de la carga eléctrica del electrón, que principalmente se le atribuye a Millikan, pero hay que reconocer que antes que él, otros científicos como: Townsend, Wilson y Thomson, realizaron diseños y plantearon ideas que posibilitaron el camino de Miillikan, no obstante, también hubo una contraparte asociada a los mismos resultados experimentales por cuenta de Ehrenhaft, una controversia que duró años [40]. Millikan a diferencia de Ehrenhaft tuvo apoyo por gran parte de la comunidad científica [41]. En 1923 Millikan recibió el premio Nobel de física, Bär en una revisión de la controversia reconoció: “Los experimentos [de Ehrenhaft] dejaron, como mínimo, una sensación incómoda” [42]. La versión habitual de la medición del electrón ubica a Millikan como el héroe científico, en muchos libros de texto se presenta así, sin hacer referencia a Ehrenhaft, ni a la controversia. Sin embargo, las bondades de la historia de la ciencia hacen posible este tipo de rescates.

Este trabajo se postula como una posibilidad para la enseñanza sobre la vida y obra de Emmy Nöther, aprovechando la riqueza de un rescate histórico, procurando favorecer concepciones más humanizantes del conocimiento científico, pretendiendo exaltar la participación de esta mujer en el avance de las matemáticas y la física; mostrando las dificultades que ella afrontó por su género y descendencia, por causa de un entorno hostil discriminatorio al que enfrentó con su talento, pero ante todo con perseverancia. Emmy Nöther fue promotora de una revolución no sólo científica, sino una revolución en el papel académico de la mujer alemana en aquella época. Consideramos que esta es una aproximación histórica que vale la pena abordar con los estudiantes, cuando se enseña el llamado por algunos: “teorema más bello del mundo”.

Referencias Bibliográficas

[1] M. Rodríguez y Emmy Nöther, *La mujer cuyo teorema revolucionó la física y a quien Einstein calificó de un absoluto “genio matemático”*, disponible em: https://www.bbc.com/mundo/noticias-39231616.

[2] R.A. Martins, em *Escrevendo a história da ciência: tendências, propostas e discussões historiográficas*, editado por A.M. Alfonso Goldfarb y M.H. Roxo Beltran, (EDUC/Livraria da Física/Fapesp, São Paulo, 2004).

[3] E.K. Morris, J.T. Todd, B.D. Midgley, S.M. Shneider, y L.M. Johnson, Behav Anal. **13**, 131 (1990).

[4] R.N. Cruz, Revista Brasileira de Terapia Comportamental e Cognitiva **8**, 85 (2006).

[5] T.C. de Mello Forato, M.A. Pietrocola, y R.A. de Andrade Martins, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **28**, 27 (2011).

[6] M.A. Nogueira y C. M. Nogueira, Bourdieu y a Educação (Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2018).

[7] A. García, en *Poder, Derecho y Clases Sociales*, editado por P. Bourdieu, (Editorial Desclée De Brouwer, S.A., Bilbao, 2001).

[8] P. Bourdieu y L. Wacquant, Berkeley Journal of Sociology **34**, 1 (1989).

[9] R. Sánchez, Revista electrónica de investigación educativa **9**, 1 (2007).

[10] P. Bourdieu, *Poder, Derecho y Clases Sociales* (J. Bernuz, Trad.), (Editorial Desclée De Brouwer, S.A., Bilbao, 2001).

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0510

[11] P. Bourdieu y T. Kauf, Meditaciones pascalianas (Anagrama, Barcelona, 1999), v. 1.

[12] P. Bourdieu, Esquisse d'une theorie de la pratique. Précédé de trois etudes d'ethnologie kabyle (Droz, Geneva, 1972).

[13] A. Accardo, lnitiation a la sociologie, (Bordeaux, Le Mascaret, 1991).

[14] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Física Teórica, Mecánica* (Editorial Reverte Barcelona, 1994), v. 1.

[15] M.R. Spiegel, *Mecánica Teórica* (J. A. Ponton, Trad.). (McGraw-Hill, Naucalpan de Juárez, 1977).

[16] R.A. Diaz Sanchez, *Mecánica Analítica: Notas de Clase* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2012).

[17] R.C. Stursberg, *Mecánica y Ondas, Tema 6*, disponible en http://www.mat.ucm.es/∼rutwig/Mem-Tema6.pdf

[18] N. Lemos, *Mecánica analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007).

[19] E. Nöther, Mathematisch-Physikalische Klasse 1918, 235 (1918).

[20] Y. Kosmann-Schwarzbach, *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century* (B. E. Schwarzbach, Trad.), (Springer, New York, 2010).

[21] A. González López, *Mecánica Teórica*, disponible en: http://jacobi.fis.ucm.es/artemio/Notas%20de%20curso/MT.pdf

[22] D. Neuenschwander, *Emmy Nöther's wonderful theorem* (The Jhons Hopkins University Press, Baltimore, 2011).

[23] S. Montero Modino, *Emmy Nöther y su Impacto en la Física Teórica*, disponible en: http://www3.uji.es/∼planelle/APUNTS/QQ/noether.pdf

[24] A. Dick, *Emmy Nöther, 1882–1935* (Birkhäuser, Basel, 1981).

[25] M. Tent, *Emmy Nöther: the mother of modern algebra* (AK Peters Ltd, Massachusetts, 2008).

[26] K. Schmitz, *Situación de la mujer en Alemania/ Gymnich a comienzos del siglo XX.* (A. Fontes. Trad), disponible en: https://www.schoenstatt.org/images/uploads/news/2010-news/2010-11/Situaci%C3%B3n%20de%20la%20mujer%20en%20Alemania.pdf

[27] M. Fulbrook, *A concise history of Germany* (TJ International Ltd, Padstow, 2019).

[28] W. Seitter, Historia de la Educación: Revista interuniversitaria **20**, 11 (2001).

[29] G.F. Budde, Historia Contemporánea, **13–14**, 43 (1996).

[30] P. Noether y G. Noether, en *Emmy Nöther in Bryn Mawr*, editado por B. Srinivasan y J. Sally (Springer-Verlag, New York, 1983).

[31] U.C. Merzbach, en *Emmy Noether in Bryn Mawr*, editado por B. Srinivasan y J.D. Sally (Springer-Verlag, New York Inc, 1983).

[32] A. Einstein, The New York Times, 5 de Mayo de 1935, New York, p. 12.

[33] L. Boissoneault, *The Forgotten Women Scientists Who Fled the Holocaust for the United States*, disponible en: https://www.smithsonianmag.com/history/forgotten-women-scientists-who-fled-holocaust-united-states-180967166/

[34] C.H. Kimberling, The American Mathematical Monthly **79**, 136 (1972).

[35] R. Martínez, Praxis Filosófica, **22**, 29 (2006).

[36] F. Damasio y L.O. Peduzzi, Revista Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências **19**, 1 (2017).

[37] M. Izquierdo, A. García, M. Quintanilla y B. Adúriz, *Historia, filosofía y didáctica de las ciencias: Aportes para la formación del profesorado de ciencias* (Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C., 2016).

[38] I. Hamburger, en *anales del VI Simpósio de Ensino da Física, Sociedade Brasileira da Física, Rio de Janeiro, 1985*, editado por D. Miranda (memorias, Rio de Janeiro, 1985).

[39] M. Matthews, Enseñanza de las ciencias **12**, 255 (1994b).

[40] M. Niaz, Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching **37**, 480 (2000).

[41] G. Holton, Historical Studies in the Physical Sciences **9**, 161 (1978).

[42] R. Bär, Naturwissenschaften **10**, 344 (1922).