

Efeitos relativísticos nos relógios dos satélites de navegação

Relativistic effects in navigation satellite clocks

Lucas G. Vivacqua^{*1}, José H. Fernandez¹

¹Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Recebido em 22 de julho de 2024. Revisado em 09 de setembro de 2024. Aceito em 18 de setembro de 2024.

Os satélites de geonavegação são o exemplo mais comum de aplicação da relatividade no cotidiano. Como exatamente a deformação do espaço-tempo afeta os relógios embarcados nos veículos espaciais não é de conhecimento comum. A dedução das equações utilizadas hoje pelas constelações satelitais para compensar esse efeito é um trabalho interdisciplinar que não está presente na literatura. Por isso, este trabalho aborda de forma didática a questão. Partimos da equação de campo de Einstein e obtivemos todas as equações que possibilitam medições de precisão da ordem de milímetros. Primeiramente com uma abordagem clássica que representa a maior parte do atraso dos relógios. Atraso este associado a uma incerteza de dezenas de quilômetros por dia. Em seguida observamos como as órbitas excêntricas dos satélites de navegação geram variações periódicas com amplitudes que chegaram a 217 ns , gerando incertezas de até 65 m . Por fim utilizamos um termo de perturbação do potencial terrestre para deduzir uma equação ainda mais precisa, da ordem de centímetros. Esta leva em conta o achatamento do planeta e a inclinação das órbitas.

Palavras-chave: Relatividade especial, relatividade geral, satélites, GNSS.

Navigation satellites are the most common example of the application of relativity in everyday life. How exactly space-time deformation affects the watches onboarded in space vehicles is not common knowledge. The deduction of the equations used today by each satellite constellation to compensate for these effects is an interdisciplinary work not present in the literature. Therefore this work addresses in a didactic way the issue. We started with the Einstein field equation and obtained all the equations that would allow precision measurements on the order of millimeters, first with a classic approach that accounts for most of the clock offset, compensating for errors of tens of kilometers per day. We then observe how the eccentric orbits of navigation satellites generate periodic variations with amplitudes that reach 217 ns , generating uncertainties of up to 65 m . Finally, we use a perturbation term of the terrestrial potential to deduce an even more accurate equation, in the order of centimeters. This takes into account Earth's oblateness and the inclination of the orbits.

Keywords: Special relativity, general relativity, satellites, GNSS.

1. Introdução

A relatividade geral, publicada por Einstein em 1915, tem sido repetidamente provada em contextos astronômicos, desde o famoso eclipse de Sobral em 1917. Como, contudo, podemos aproximar esta teoria à realidade das pessoas? Um exemplo que sempre surge neste contexto são os satélites de navegação global, como o GPS. Entretanto pouco se discute como exatamente o espaço-tempo curvo interfere com os relógios atômicos dos satélites, e qual a magnitude deste efeito.

Este trabalho toma por objetivo obter de forma analítica, a partir das teorias de Einstein para a relatividade geral e restrita, as equações utilizadas para estimar o atraso relativístico em satélites na órbita da Terra.

Vejam os porquê de os satélites de navegação serem sempre os escolhidos para se discutir a respeito da relatividade. Em linhas gerais, a navegação por satélite funciona a partir do princípio de tempo de chegada. Ou seja, a posição é determinada sabendo-se a distância de

um objeto em relação a pontos de localização conhecida, no caso, os satélites. Esta distância é obtida, por sua vez, a partir do tempo que o sinal percorre do emissor ao receptor multiplicado pela velocidade do sinal. Esta velocidade é a velocidade da luz. O que leva a conclusão de que mesmo um atraso de $0,01\text{ ns}$ acarretaria em erros para aplicações na ordem de centímetros. Por isso, estes satélites carregam relógios atômicos com derivas de frequência de 10^{-14} [1] podendo chegar a 10^{-18} nos modelos mais novos [2]. Atualmente estão em operação seis constelações GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*), são elas: GPS (*Global Positioning System*) (EUA), GLONASS (*Globalnaya navigatsionnaya sputnikovaya*) (Rússia), GALILEO (UE), Beidou (China), QZSS (*Quasi-Zenith Satellite System*) (Japão) e NavIC (*Navigation Indian Constellation*) (Índia).

As equações que serão aqui derivadas não são novidade, no sentido de que são aplicadas à navegação satelital há pelo menos duas décadas. Falta na literatura, contudo, um artigo que compile sua dedução desde o nível mais geral das equações de campo, até o mais específico. Passando pelas etapas intermediárias de maneira

*Endereço de correspondência: lucasgvivacqua@gmail.com

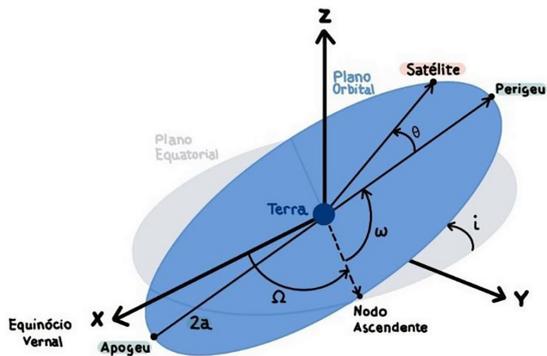


Figura 1: Parâmetros orbitais.

que as equações possam ser discutidas em diversos níveis, inclusive com propósitos didáticos.

É importante fazer uma breve observação sobre as quantidades que usaremos ao longo do trabalho. R_{\oplus} , M_{\oplus} , Ω_{\oplus} , J_2 representam o raio equatorial da Terra, a massa da Terra, a velocidade angular de rotação da Terra e o coeficiente do segundo harmônico zonal da Terra, respectivamente. Utilizamos a velocidade da luz $c \approx 299.792.458$ m/s. G é a constante gravitacional universal e μ sendo o produto $G \cdot M_{\oplus}$. Utilizamos as coordenadas esféricas r, θ, ϕ .

As demais constantes são os chamados elementos orbitais, apresentados na Figura 1. O semi-eixo maior a é a metade da distância entre o apogeu e o perigeu, de maneira geral determina o tamanho da órbita. A excentricidade e é a razão entre a distância medida do centro da elipse a um de seus focos e o semi-eixo maior. Este número varia de 0 a 1 em órbitas fechadas e descreve quão eclíptica é a órbita. A inclinação i é o ângulo descrito entre o plano equatorial e o plano orbital. A ascensão reta do nodo ascendente Ω é o ângulo descrito entre a linha do Equinócio Vernal e o nodo ascendente, ponto no qual o plano da órbita cruza o plano equatorial. O argumento do perigeu ω é a distância em graus entre o nodo ascendente e o perigeu. A anomalia verdadeira θ é o ângulo entre o perigeu e a posição instantânea do satélite; localiza o objeto na órbita e varia com o tempo.

Começamos por discutir brevemente as transformadas de Lorentz e a métrica de Schwarzschild como uma primeira aproximação para órbitas circulares. Em seguida apresentamos o formalismo pós newtoniano e obtemos a métrica de Schwarzschild isométrica. Partimos desta para obter equações para o atraso constante e para as variações periódicas atreladas às excentricidades das órbitas. Por fim, usamos equações de perturbação para obter a variação relativística relacionada ao achatamento da Terra.

2. Atraso Constante

A relatividade especial descreve como as dimensões do tempo e do espaço são percebidas por um referencial

em movimento S' com uma velocidade \mathbf{v} . Essa descrição é representada matematicamente pelas transformações de Lorentz nas quais o tempo é uma dimensão que varia em função da velocidade. Diferentemente das transformações de Galileu onde o tempo é constante, as transformações de Lorentz formam um continuum espaço-temporal de geometria plana no espaço-tempo de Minkowski. A solução para a dimensão tempo é dada por [3]

$$t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{1}$$

É razoável pensar que para um observador no referencial S o intervalo de tempo é dado por

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 - \frac{vx'_2}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 - \frac{vx'_1}{c^2} \right), \tag{2}$$

com $\gamma = 1/\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$. Se considerarmos um observador em repouso em relação ao referencial S' , como o relógio está em repouso em relação ao satélite, temos $x'_1 = x'_2$ e então

$$\Delta t = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'. \tag{3}$$

Essa relação de intervalo é essencial em nossa análise, já que descreve o tempo decorrido em um referencial em movimento medido por um observador em um referencial estático. Em nosso caso de estudo isso se aplica aos relógios dos satélites ($\Delta t' = t_o$) estando em movimento relativo aos receptores em solo ($\Delta t = t_e$).

$$t_e = \frac{t_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{4}$$

onde o subscrito ‘e’ se refere ao referencial parado S (em solo) e o referencial ‘o’ ao referencial S' em movimento (em órbita). Podemos ver aqui que a dilatação do tempo não depende da direção do movimento, e que nos interessa apenas o módulo da velocidade. No nosso caso, o módulo da velocidade pode ser obtido a partir da equação *vis viva*, que determina a velocidade instantânea de um objeto a depender de sua posição [4].

$$v^2 = GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \tag{5}$$

Nesta primeira seção nos interessa o atraso constante. Portanto, podemos considerar a órbita circular ($r = a$). Neste caso teríamos a velocidade puramente na direção θ , ou seja, a direção arbitrária x coincide com a direção $\hat{\theta}$ e o vetor $\mathbf{v} = v_{\theta} \cdot \hat{\theta}$, mas como o que nos interessa é o módulo da velocidade, isso não interferirá nos cálculos posteriores. Substituindo (5) em (4) obtemos

$$t_e = t_o \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{GM_{\oplus}}{ac^2}}}. \tag{6}$$

Se aplicarmos os valores para a órbita média onde estão alocados os satélites GNSS teremos que a diferença entre o tempo decorrido em solo e aquele medido pelos relógios atômicos é da ordem de picossegundos ($10^{-12} s$) para cada segundo decorrido em solo. O valor positivo indica uma dilatação temporal, uma vez que o tempo decorrido em órbita é maior do que o decorrido em solo. Para o GPS (*Global Positioning System*), por exemplo, esse valor é de $7,21 \mu s/dia$.

A relatividade geral tem uma construção mais complexa. Usa tensores para explicar como matéria e energia afetam o espaço-tempo [5]. Esta relação é escrita pela equação de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{7}$$

De modo geral a equação descreve como a métrica $g_{\mu\nu}$ é afetada pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. A relação exata é obtida considerando a conservação do tensor $T_{\mu\nu}$. Usa-se a identidade de Bianchi para obter um tensor que se conserve da mesma maneira e que seja função apenas da métrica e de suas derivadas. No caso, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Por fim, a constante de proporcionalidade se obtém em comparação com o limite newtoniano e com a equação de Poisson.

A fim de obter uma solução exata para esta equação, Karl Schwarzschild [6] partiu de uma métrica genérica com simetria esférica, ou seja, independe dos ângulos θ e ϕ , e estática, ou seja, não dependente do tempo. A solução obtida foi uma solução externa ($P = 0$) para corpos não girantes e sem carga dependente apenas da dimensão r [7].

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + d\Phi^2, \tag{8}$$

onde $d\Phi^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\phi^2$. Se considerarmos apenas a dimensão temporal obtemos uma relação direta entre o tempo decorrido em solo e o tempo em órbita, dado por [8]

$$t_e = -t_o \frac{\sqrt{1 - \frac{2M_{\oplus}G}{c^2 R_{\oplus}}}}{\sqrt{1 - \frac{2M_{\oplus}G}{rc^2}}}. \tag{9}$$

De maneira similar ao que fizemos para a relatividade restrita, se desconsiderarmos a excentricidade da órbita, descobriremos que o relógio do satélite avança em dezenas de picossegundos em relação ao segundo decorrido em solo. Para o mesmo exemplo do GPS o relógio estará adiantado em $45,65 \mu s/dia$.

O efeito relativístico total sobre um satélite em órbita seria simplesmente a soma das equações (6) e (9). Ambas são funções apenas do semi-eixo maior da órbita do satélite e de constantes do planeta. Estas equações, por serem simples, podem ser bons exemplos didáticos, funcionando não somente para quaisquer satélites em órbita da Terra como para qualquer corpo orbitando qualquer

outra corpo celeste. Além disso elas correspondem à maior parte do efeito relativístico, que na literatura é chamado de atraso relativístico constante. Para o GPS esse efeito é de $446,47 ps$ por segundo decorrido em solo ou $38,44 \mu s/dia$ [9]

3. Efeitos da Excentricidade

O efeito relativístico sobre os relógios dos satélites GNSS não se resume a uma deriva constante. Existem ainda efeitos periódicos que dependem da excentricidade e da inclinação das órbitas. Persistimos na investigação, primeiramente, do efeito periódico relacionados à excentricidade. Para isso usamos a equação da órbita que nos diz a posição instantânea de um objeto em função da anomalia verdadeira

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}. \tag{10}$$

Lembramos também da Equação (5), que nos diz que a velocidade instantânea de um objeto em órbita é função somente de sua posição. Sendo assim poderíamos definir tanto a Equação (4) quanto a (9), ou seja, teríamos os efeitos locais respectivamente para a relatividade restrita e para a relatividade geral. Se aplicarmos os valores das constantes nesta nova equação, obtemos uma variação periódica, com o período correto, mas com amplitude da ordem de dezenas de pico segundos. Este resultado não está de acordo com os valores reais obtidos por [10, 11] que têm amplitude três ordens de grandeza maior. Quando a teoria não concorda com os dados experimentais deve ser revista a teoria. Buscamos, portanto, metodologia similar àquelas encontradas na literatura.

A abordagem mais comum na literatura é pela aproximação pós newtoniana [12–15]. O formalismo pós-newtoniano parametrizado (PPN) é uma teoria de gravitação linearizada que descreve, a partir da variação de seus parâmetros, as mais diferentes teorias métricas de gravitação [5]. Ou seja, parte de uma aproximação de campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{11}$$

com $\eta_{\mu\nu}$ sendo a métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$) e $h_{\mu\nu} \ll 1$ de modo que termos não lineares em h podem ser negligenciados ($h_{\mu\nu}^2 \approx 0$) e que, longe de um corpo massivo, h tende assintoticamente a zero [16]. A partir deste formalismo podemos definir uma métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas [17]. Para isso realizamos procedimento semelhante àquele utilizado para obter a métrica de Schwarzschild, mas partindo da aproximação de campo fraco, Equação (11).

Começamos por definir as conexões. Usamos o símbolo $\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}$ para definir a conexão de Levi-Civita, um pseudo tensor de ranque três simétrico nos índices inferiores

que carrega informações da métrica e de derivadas da métrica

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda} \left[\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right]. \quad (12)$$

Usaremos, a partir daqui, também a notação $\partial_{\alpha} \equiv \partial/\partial x^{\alpha}$. Substituindo a métrica dada pela Equação (11) na Equação (12), lembrando que $\partial_{\mu}\eta_{\mu\nu} = 0$ e que termos de ordem $O(h_{\mu\nu}^2) \approx 0$.

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\nu\lambda} [\partial_{\alpha}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\alpha}]. \quad (13)$$

Usaremos as conexões para construir o tensor de Riemann. Este tensor aparece naturalmente quando se tenta fazer o transporte paralelo de um vetor por uma superfície em um referencial qualquer, e é resultado do comutador entre duas derivadas covariantes. O importante é que este é composto apenas por símbolos de Christoffel e suas derivadas. Por consequência, é dependente da métrica e de suas derivadas de primeira e segunda ordem. Mais do que isso, é o único tensor que pode ser construído com essa característica que seja linear nas segundas derivadas da métrica [18] e é dado por

$$R_{\sigma\alpha\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}. \quad (14)$$

Substituindo (12) em (14) teremos o tensor de Riemann agora em termos da perturbação h

$$R_{\sigma\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\sigma\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} - \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\sigma\mu}). \quad (15)$$

Podemos definir o tensor de Ricci contraindo a Equação (15) com a métrica plana ($R_{\alpha\nu} = \eta^{\sigma\mu}R_{\sigma\alpha\mu\nu}$). Lembrando que como $h_{\mu\nu}^2 \approx 0$ contrações com $g_{\mu\nu}$ e com $\eta^{\mu\nu}$ são equivalentes.

$$R_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\mu\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\sigma} - \square h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\sigma\sigma}), \quad (16)$$

o símbolo \square representa o D'alembertiano, que é uma generalização do Laplaciano (∇) para quatro dimensões, na forma $\square = -(1/c^2)\partial_0^2 + \nabla^2$, ou representando $\square = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$. Aqui vemos aparecer, também, o termo $h_{\sigma\sigma}$ que representa o traço do tensor $h = h_{\sigma\sigma}$.

O escalar de curvatura é o traço do tensor de Ricci, por isso podemos obtê-lo fazendo uma contração do tensor de Ricci com a métrica ($R = \eta^{\alpha\nu}R_{\alpha\nu}$). Teremos

$$R = (\partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\mu\nu} - \square h). \quad (17)$$

Estamos, então, em posse dos elementos necessários para construir a equação de Einstein. Substituindo (11), (16) e (17) em (7) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\mu\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\sigma} - \square h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\sigma\sigma}) \\ & - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}(\partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\mu\nu} - \square h) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (18)$$

É interessante agora que definamos, como em [19], um tensor de traço reverso

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (19)$$

essa é uma operação reversível, de modo que se trocando h por \bar{h} a equação permanece a mesma. Com ela podemos, primeiro escrever a equação de Einstein de maneira mais enxuta

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\nu} &= \partial_{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\alpha\sigma} \\ &- \square\bar{h}_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\nu}\partial_{\sigma}\partial_{\mu}\bar{h}_{\mu\sigma}. \end{aligned} \quad (20)$$

É importante introduzir o entendimento do *gauge* de Lorentz, que delimita os graus de liberdade da perturbação $h_{\mu\nu}$ sem perda de generalidade [5]

$$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (21)$$

O que simplifica a Equação (20) deixando a simplesmente como

$$-\square\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (22)$$

O tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$) pode ser escrito como uma função da densidade de energia $\bar{\rho}$, da pressão P e da quadri-velocidade u [3]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u^{\mu}u^{\nu} - Pg^{\mu\nu}. \quad (23)$$

Procuramos, assim como Schwarzschild, uma solução externa ao corpo, por isso podemos considerar a pressão nula. O vetor u^{μ} é igual a $\partial x^{\mu}/\partial t$ e pode ser escrito como $\gamma \cdot \text{diag}(c, \vec{u})$, sendo \vec{u} o vetor velocidade. No regime de campo fraco podemos considerar $\gamma^2 = 1$. Assim podemos obter $T_{00} = \rho c^2$.

Podemos obter a solução da Equação (22) como uma equação de Green em quatro dimensões. A solução é da forma [20]

$$\bar{h}_{00} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \frac{dV}{r}. \quad (24)$$

Pode-se extrair de (23) que a solução externa nos dá $T_{\mu\nu} = 0$ para todo μ e ν diferentes de 0. Agora, se assumirmos $T_{00} = \rho c^2 = c^2 dM/dV$ ficamos com o tensor de traço reverso

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00} &= \frac{4GM}{c^2 r}, \\ \bar{h}_{0j} &= \bar{h}_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Teremos então $\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -4GM/c^2 r$. Substituindo cada um dos termos da Equação (19) obtemos aquilo que mais nos interessa, a perturbação h

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{2MG}{rc^2}, \\ h_{0j} &= h_{i0} = h_{ij} = 0 \quad |i \neq j, \\ h_{ij} &= \frac{2MG}{rc^2} \quad |i = j. \end{aligned} \quad (26)$$

A métrica de Schwarzschild, agora em coordenadas isotrópicas é descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}\theta d\phi^2). \tag{27}$$

Buscamos uma relação entre $d\tau = ds/c$ e dt . Para isso seguimos o raciocínio apresentado em [13] a partir da Equação (27), tomamos o limite

$$ds^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-c^2 \Delta t^2 \times \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt^2}{\Delta t^2} \times \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}\theta d\phi^2}{c^2 \Delta t^2} \right) \right], \tag{28}$$

por definição $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \approx dt$. Assim podemos definir o vetor velocidade no espaço como

$$v^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}\theta d\phi^2}{\Delta t^2}, \tag{29}$$

se ignorarmos, novamente, termos de ordem $O(c^{-3})$ ou menor, obteremos

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}\right)c^2 dt^2. \tag{30}$$

Tiramos, então, a raiz quadrada usando a aproximação por série de Taylor para $x = (2GM + rv^2)/(rc^2) \ll 1$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \tag{31}$$

obtendo

$$\frac{-ds}{c} = d\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt. \tag{32}$$

Lembrando da Equação (5) podemos escrever o quadrado da velocidade v em função apenas da posição, o que nos possibilita reescrever a Equação (32) em função das constantes

$$d\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{r}\right)\right) dt. \tag{33}$$

É comum na literatura aparecerem nesta equação ainda dois termos [21], um para o geopotencial terrestre ao nível médio do mar e outro termo que leva em conta efeitos de maré causados por outros corpos celestes, em especial Lua e Sol. Ignoraremos o último por estar fora de nosso escopo, uma vez que é desnecessário para aplicações com precisão da ordem de picossegundos.[15, 22, 23]

O termo de geopotencial ao nível do mar tem papel similar ao numerador da Equação (9), que compensa os efeitos relativísticos sentidos pelo usuário em solo e pode escrito como [23]

$$\frac{W_0}{c^2} = \frac{GM}{R_{\oplus} c^2} + \frac{\Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus}^2}{2c^2}, \tag{34}$$

Onde R_{\oplus} é o raio médio da Terra e $\Omega_{\oplus} = \frac{d\phi}{dt}$ é a velocidade angular de rotação do planeta. O último termo da equação é o chamado efeito Sagnac que quantifica o efeito da relatividade restrita em um referencial girante. Esta quantidade é obtida ao se comparar a dimensão tempo na métrica de Minkowski com uma métrica de Langevin e é da ordem de 10^{-12} [24].

$$d\tau = \left(1 + \frac{GM}{2ac^2} + \frac{W_0}{c^2} - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt. \tag{35}$$

Percebe-se que os três primeiros termos do lado direito da igualdade são constantes, de modo que integrando ambos os lados temos

$$T_o = T_e \left(1 + \frac{GM}{2ac^2} + \frac{W_0}{c^2}\right) - \int \frac{2GM}{c^2 r} dt. \tag{36}$$

Para resolver a integral usaremos o conceito de anomalia excêntrica (E), que é o ângulo medido entre o eixo maior e uma reta traçada entre o centro da elipse e um ponto P que está sobre um círculo auxiliar de raio a e alinhado no sentido do semi-eixo menor com o objeto em órbita. Assim como a anomalia verdadeira, posiciona o corpo em sua órbita, variando com o tempo. Seu valor é obtido a partir da equação transcendental onde t_p é o tempo da última passagem pelo perigeu

$$E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t - t_p) + e \text{sen} E. \tag{37}$$

A partir da anomalia excêntrica podemos reescrever a posição do satélite de maneira conveniente

$$r = a(1 - e \cos E). \tag{38}$$

A partir da equação transcendental (37) obtém-se a relação [25]

$$dt = r \sqrt{\frac{a}{GM}} dE, \tag{39}$$

substituindo em (36) e integrando temos

$$T_o - T_e = \Delta t = \left(\frac{GM}{2ac^2} + \frac{W_0}{c^2}\right) t - \frac{2\sqrt{aGM}}{c^2} E. \tag{40}$$

Substituindo a Equação (37) para a anomalia excêntrica e reorganizando teremos por fim

$$\Delta t = -\left(\frac{3GM}{2ac^2} - \frac{W_0}{c^2}\right) t - \frac{2\sqrt{aGM}}{c^2} e \text{sen} E, \tag{41}$$

$$\Delta t_{fix} = -\left(\frac{3GM}{2ac^2} - \frac{W_0}{c^2}\right) t, \tag{42}$$

$$\Delta t_{per} = -\frac{2\sqrt{aGM}}{c^2} e \text{sen} E = -\delta t_{per} \text{sen} E. \tag{43}$$

Fica claro o porque de separarmos o efeito relativístico em constante e periódico. A Equação (42) é a parcela constante e calculamos que é equivalente aos resultados

obtidos na primeira seção até uma ordem de 10^{-17} , ou seja é equivalente as equações (6) e (9). Esta convergência foi observada também por [8].

O mais interessante aqui é, contudo, a parcela periódica. Esta nos mostra que os relógios não são afetados apenas por uma deriva de frequência, mas também por variações periódicas que geram um nível de incerteza nas medidas. Podemos ainda observar que a amplitude desta incerteza está associada diretamente com a excentricidade da órbita. Esta variação chega, por exemplo, a 56ns para alguns satélites da constelação GPS, o que representa uma incerteza de 17 metros. E é ainda mais forte nos satélites da constelação QZSS (*Quasi-Zenith Satellite System*), já que por decisão de projeto estes ocupam órbitas altamente excêntricas ($e \approx 0,075$), chegando a um atraso instantâneo de 216,96 ns. O erro da constelação japonesa está associada com uma incerteza da ordem de 65 metros.

4. Efeitos do Achatamento

Há ainda outro efeito relacionado a relatividade que afeta o GNSS na precisão da casa dos centímetros e, por tanto, nos é interessante. A Terra não é perfeitamente esférica. Essa não-esfericidade é medida pelos harmônicos esféricos terrestres. Estes podem ser matematicamente representados como termos de perturbação no potencial gravitacional da Terra, construída a partir dos polinômios de Legendre. O mais significativo deles é o termo J_2 que corresponde ao achatamento do planeta, e é 10^3 vezes maior do que qualquer outro [26]. O potencial pode ser reescrito como

$$\Phi = \frac{\mu}{r} + \Phi'(J_k) = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{k=2}^7 J_k \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^k P_k(\cos \phi), \quad (44)$$

onde R_{\oplus} é o raio equatorial da Terra, ϕ é a latitude medida a partir do polo, J_k os harmônicos zonais com k variando de 2 a 7, já que a partir do sétimo termo os valores decrescem mais algumas ordens de magnitude [27, 28], e P_k os polinômios de Legendre, tal que

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d}{dx^k} (x^2 - 1)^k. \quad (45)$$

Como em nosso escopo é apenas interessante levar em conta o efeito de achatamento descrito por J_2 podemos reduzir a Equação (44) como [5]

$$\Phi = \frac{\mu}{r} \left(1 + J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \phi - 1) \right). \quad (46)$$

Será interessante adaptar a dependência do termo perturbativo Φ' das coordenadas esféricas para parâmetros orbitais. Utilizamos o argumento de latitude (u), que mede o ângulo percorrido pelo corpo a partir do nodo ascendente e é dado por $u = \theta + \omega$. Difere-se da anomalia excêntrica E por ser medida a partir de um dos focos e

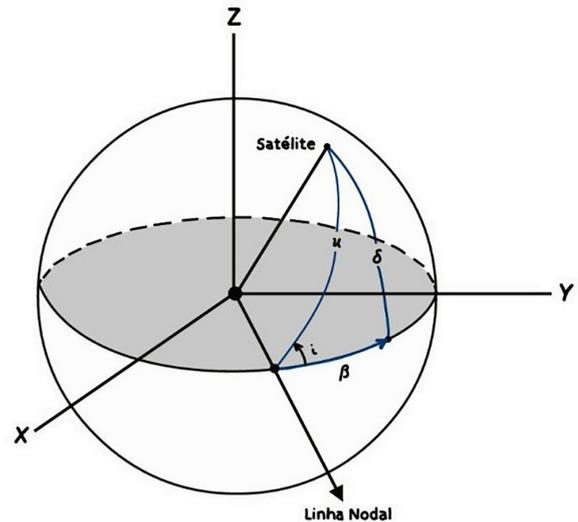


Figura 2: Relação de ângulos na esfera terrestre.

não do centro da órbita. Adotamos também o ângulo $\delta = \pi/2 - \phi$ que também representa a latitude, mas medida a partir do equador. Ela se relacionará com a inclinação i e com o argumento de latitude conforme a Figura 2.

Podemos ver que u e δ formam os lados de um triângulo esférico. Vale a identidade trigonométrica esférica $\text{sen}(\delta) = \text{sen}(i)\text{sen}(u)$ [29]. A partir disso

$$\begin{aligned} \text{sen}(\delta) &= \text{sen}(i)\text{sen}(u), \\ \text{sen}^2(\pi/2 - \phi) &= \text{sen}^2(i)\text{sen}^2(u), \\ \cos^2(\phi) &= \text{sen}^2(i)(1 - \cos(2u)), \\ \cos^2(\phi) &= \frac{1}{2}\text{sen}^2(i)(1 - \cos(2u)), \\ \cos^2(\phi) &= \frac{1}{2}\text{sen}^2(i) - \frac{1}{2}\text{sen}^2(i)\cos(2u). \end{aligned}$$

A equação para Φ' fica da forma

$$\Phi' = \frac{GM R_{\oplus} J_2}{r^3} \left(\frac{3}{4}\text{sen}^2(i) - \frac{3}{4}\text{sen}^2(i)\cos(2u) - \frac{1}{2} \right). \quad (47)$$

Se incluirmos o termo perturbativo (Φ') ao geopotencial (GM/r) na Equação (27) procedermos de maneira similar ao que fizemos para a Equação (35) [30], obtemos

$$d\tau = - \left(1 + \frac{GM}{2ac^2} + \frac{W_0}{c^2} - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\Phi'}{c^2} - \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right) dt, \quad (48)$$

onde $\Delta\Phi$ é a diferença causada no efeito excêntrico se levarmos em conta a nova equação para o potencial gravitacional [31]. Ele aplica a variação do raio e do semi eixo maior na Equação (35) e é dado por

$$\Delta\Phi = \frac{GM}{2a^2} \Delta a - \frac{2GM}{r^2} \Delta r. \quad (49)$$

Podemos separar apenas os últimos dois termos de (48), uma vez que a integração dos outros termos nos dará (41). Teremos

$$\tau_{J_2} = \int \frac{-\Phi'}{c^2} + \frac{GM}{2a^2c^2}\Delta a - \frac{2GM}{r^2c^2}\Delta r dt. \tag{50}$$

O termo Δr pode ser obtido aplicando a teoria de propagação de erro, a partir da Equação (38)

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial r}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial r}{\partial E}\Delta E, \tag{51}$$

substituindo as derivadas parciais

$$\Delta r = \Delta a - e \cos E \Delta a - a \cos E \Delta e + a e \operatorname{sen} E \Delta E. \tag{52}$$

O segundo termo é, para as órbitas GNSS, ao menos três ordens de grandeza menor que os demais e será suprimido daqui em diante. O cálculo para as variações é demasiado complexo, mesmo para o escopo deste trabalho. Precisaremos, então, aproveitar a formulação desenvolvida por [28]:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{GM R_{\oplus}^2}{na^{l+2}} \cdot 2 \\ &\times \frac{(l-2p+q)F_{lmp}G_{lpq}S_{lmpq}}{(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_0)}, \\ \Delta e &= \frac{GM R_{\oplus}^2}{na^{l+3}e} (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \frac{[(1-e^2)^{\frac{1}{2}}(l-2p+q) - (l-2p)]F_{lmp}G_{lpq}S_{lmpq}}{(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_0)}, \\ \Delta M &= \frac{GM R_{\oplus}^2}{na^{l+3}} (-e^{-1} + e) \\ &\times \frac{[(\partial G_{lpq}/\partial e) + 2(l+1)G_{lpq}]F_{lmp}S_{lmpq}}{(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_0)}, \end{aligned} \tag{53}$$

onde l, m, p, q são índices que variam para o tipo de evento a ser estudado. ω é o argumento de perigeu, M a anomalia média, Ω a ascensão reta do nodo ascendente e Ω_0 é o tempo sideral de Greenwich. As funções F, G, S são da forma [32, 33]

$$\begin{aligned} F_{lmp} &= \sum_t \frac{(2l-2t)!}{i!(l-t)!(l-m-2t)!2^{2l-2t}} (\operatorname{sen} i)^{l-m-2t} \\ &\times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}; \\ G_{lpq} &= (-1)^{|q|} \left(1 + \left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^2\right)^l \left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^{|q|} \\ &\times \sum_k^\infty \sum_{s=0}^h \binom{2p'-2l}{h-s} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{l-2p'+q'}{2\beta}e\right)^s \\ &\times \sum_{s=0}^{h'} \binom{-2p'}{h'-s} \frac{1}{s!} \left(\frac{l-2p'+q'}{2\beta}e\right)^s \left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^{2k}; \\ S_{lmpq} &= C_{lm} \cos[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)] \\ &+ S_{lm} \operatorname{sen}[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)], \end{aligned} \tag{54}$$

aqui k é a parte inteira de $(l-m)/2$; t assume maior valor entre p e k ; c é somado até assumir o valor de $(p-t)$; Se p for menor do que $l/2$, p' é igual a p e q' é igual a q . Caso p seja maior que $l/2$, $p' = l-p$ e $q' = -q$; para $q' > 0$, $h = k+q'$ e $h' = k$. Já para $q' < 0$, $h = k$ e $h' = k-q'$; para valores ímpares de $l-m$ na última equação invertem-se as posições de C_{lm} e S_{lm} . Vale observar que F_{lmp} é dependente apenas da inclinação i e que G_{lpq} depende apenas da excentricidade (e).

A solução está longe de trivial [34]. Os valores de F, G, S foram tabelados por [28] para diferentes valores de l, m, p, q . Como estamos investigando um efeito ligado ao harmônico zonal J_2 temos $l = 2$ e $m = 0$ de maneira que $C_{20} \equiv J_2$. [27] aponta que para estudos de curto período de perturbações ligados a zonais terrestres pares usa-se $p = l/2$ e que q pode ser definido sabendo que o período da perturbação deve ser de T/q , com T sendo o período da órbita dado pela terceira lei de Kepler. Usaremos, portanto $p = 1$ e $q = 2$ por conta da Equação (47) que tem uma frequência de $2u$. Finalmente, usamos a aproximação $E \approx M \approx \theta$ e ignorarmos termos da ordem $O(e^2)$ [35], uma vez que a excentricidade é pequena nos sistemas estudados. Obteremos os resultados apresentados em [23]

$$\Delta a = \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \operatorname{sen}^2 i \cos 2u, \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i\right) \cos \theta \right. \\ &\left. + \operatorname{sen}^2 i \left(\frac{5}{6} \cos(2u + \theta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2u \operatorname{sen} f \right) \right], \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{R_{\oplus}^2 J_2}{2a^2 e} \left[3 \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i\right) \operatorname{sen} \theta + \right. \\ &\left. + \operatorname{sen}^2 i \left(\frac{3}{2} \cos 2u \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(2u + \theta) \right) \right]. \end{aligned} \tag{57}$$

Substituindo (55),(56) e (57) em (52) podemos encontrar o Δr

$$\begin{aligned} &\frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \operatorname{sen}^2 i \cos 2u - \frac{3R_{\oplus}^2 J_2 a \cos \theta}{2a^2} \\ &\times \left[\left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i\right) \cos \theta + \operatorname{sen}^2 i \left(\frac{5}{6} \cos(2u + \theta) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2u \operatorname{sen} \theta \right) \right] - \frac{R_{\oplus}^2 J_2 a e \operatorname{sen} \theta}{2a^2 e} \left[3 \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i\right) \operatorname{sen} \theta \right. \\ &\left. + \operatorname{sen}^2 i \left(\frac{3}{2} \cos 2u \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(2u + \theta) \right) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando as identidades trigonométricas do seno da soma $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$ e do cosseno da

soma $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$,

$$\begin{aligned} & \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \cos 2u - \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) \cos^2 \theta \\ & + \frac{5}{6} \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \cos \theta \text{sen} \theta \text{sen} 2u \\ & - \frac{5}{6} \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \cos^2 \theta \cos 2u \\ & + \frac{1}{2} \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \cos \theta \text{sen} \theta \text{sen} 2u \\ & - \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) \text{sen}^2 \theta \\ & - \frac{1}{2} \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \text{sen}^2 \theta \cos 2u \\ & - \frac{1}{3} \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \text{sen}^2 \theta \cos 2u \\ & - \frac{1}{3} \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \text{sen} \theta \cos \theta \text{sen} 2u, \end{aligned}$$

colocando $\cos(2u)$ e as constantes, que são de nosso interesse, em evidência, temos

$$\begin{aligned} & \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) [-\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta] \\ & + \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \cos 2u \times \left[1 + \frac{5}{6} \cos \theta \text{sen} \theta \tan 2u \right. \\ & - \frac{5}{6} \cos^2 \theta - \frac{3}{6} \cos \theta \text{sen} \theta \tan 2u \\ & \left. - \frac{3}{6} \text{sen}^2 \theta - \frac{2}{6} \text{sen}^2 \theta - \frac{2}{6} \text{sen} \theta \cos \theta \tan 2u \right], \end{aligned}$$

reorganizando com o uso da propriedade trigonométrica de $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ temos enfim

$$\Delta r = \frac{R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \left[-3 \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) + \frac{1}{2} \text{sen}^2 i \cos 2u \right]. \tag{58}$$

Obtemos ambos os fatores que precisávamos para definir $\Delta\Phi$ pela Equação (49). Para integrarmos a Equação (50) substituiremos nesta, as equações (58), (55) e a Equação (47). Aproximaremos r^2 como a^2 para permanecer com o mesmo nível de aproximação ($e^2 \approx 0$).

$$\begin{aligned} \tau_{J_2} = & \int \frac{-1}{c^2} \frac{GM R_{\oplus} J_2}{a^3} \\ & \times \left(\frac{3}{4} \text{sen}^2(i) - \frac{3}{4} \text{sen}^2 i \cos(2u) - \frac{1}{2} \right) \\ & + \frac{GM}{2a^2 c^2} \frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \text{sen}^2 i \cos 2u - \frac{2GM}{a^2 c^2} \frac{R_{\oplus}^2 J_2}{2a} \\ & \times \left[-3 \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) + \frac{1}{2} \text{sen}^2 i \cos 2u \right] dt. \end{aligned}$$

Tirando as constantes da integral e reorganizando o primeiro termo

$$\begin{aligned} \tau_{J_2} = & \frac{GM R_{\oplus} J_2}{2a^3 c^2} \int \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2(i)\right) + \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \cos(2u) \\ & + \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \cos 2u + 6 \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) - \text{sen}^2 i \cos 2u. \end{aligned}$$

Separamos em duas integrais uma constante e outra em função do $\cos(2u)$

$$\begin{aligned} \tau_{J_2} = & \frac{GM R_{\oplus} J_2}{a^3 c^2} \left[\int \frac{7}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2(i)\right) dt \right. \\ & \left. + \int \text{sen}^2 i \cos(2u) dt \right]. \end{aligned} \tag{59}$$

A primeira integral é trivial e nos dá o termo fixo de deriva dos relógios devido ao achatamento da Terra

$$\Delta t_{fix}^{J_2} = \frac{7GM R_{\oplus}^2}{2a^3 c^2} J_2 \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) t = \delta t_{fix}^{J_2} t. \tag{60}$$

A segunda integral pode ser resolvida fazendo a substituição $dt = du \sqrt{a^3 / \sqrt{GM}}$, similar a Equação (39)

$$\begin{aligned} \tau_{per}^{J_2} = & \frac{GM R_{\oplus} J_2}{a^3 c^2} \int \text{sen}^2 i \cos(2u) dt \\ \tau_{per}^{J_2} = & \frac{GM R_{\oplus} J_2}{a^3 c^2} \text{sen}^2 i \int \cos(2u) du \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{GM}}, \\ \tau_{per}^{J_2} = & \frac{\sqrt{GM} a R_{\oplus} J_2}{2a^2 c^2} \text{sen}^2 i \text{sen}(2u). \end{aligned} \tag{61}$$

É interessante que a correção para o achatamento possa ser aplicada em adição àquela já definida pela equação 43. Para isso, precisamos considerar a propagação do erro no termo periódico da Equação (41) [23]. Faremos isso de maneira semelhante ao que fizemos na Equação (49). Calculamos o último termo $\Delta\delta_{per}$

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{per} = & - \frac{2\sqrt{aGM}}{c^2} (\Delta e \text{sen} E + e \Delta E \cos E) \\ = & - \frac{2\sqrt{aGM}}{c^2} \left(\frac{3R_{\oplus}^2 J_2}{2a^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) \cos \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{sen}^2 i \left(\frac{5}{6} \cos(2u + \theta) + \frac{1}{2} \text{sen} 2u \text{sen} \theta \right) \right] \text{sen} \theta \right. \\ & \left. - e \frac{R_{\oplus}^2 J_2}{2a^2 e} \left[3 \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i\right) \text{sen} \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{sen}^2 i \left(\frac{3}{2} \cos 2u \text{sen} \theta + \text{sen}(2u + \theta) \right) \right] \cos \theta, \end{aligned}$$

utilizando novamente as identidades trigonométricas do seno da soma e do cosseno da soma,

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{per} = & -\frac{\sqrt{aGM}R_{\oplus}J_2}{a^2c^2} \left[3 \left(1 - \frac{3}{2}sen^2i \right) \cos\theta sen\theta \right. \\ & + \frac{5}{2}sen^2i \cos 2u \cos\theta sen\theta - \frac{5}{2}sen^2isen2usen^2\theta \\ & + \frac{3}{2}sen^2isen2usen^2\theta - 3 \left(1 - \frac{3}{2}sen^2i \right) sen\theta \cos\theta \\ & - \frac{3}{2}sen^2i \cos 2usen\theta \cos\theta - sen^2isen2u \cos^2\theta \\ & \left. - .sen^2i \cos 2usen\theta \cos\theta \right], \end{aligned}$$

reorganizando obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{per} = & -\frac{\sqrt{aGM}R_{\oplus}J_2}{a^2c^2} \\ & \times \left[\left(1 - \frac{3}{2}sen^2i \right) (3 \cos\theta sen\theta - 3sen\theta \cos\theta) \right. \\ & + sen^2i \cos 2u \left(\frac{5}{2} \cos\theta sen\theta - \frac{3}{2}sen\theta \cos\theta \right. \\ & \left. - sen\theta \cos\theta \right) + sen^2isen2u \\ & \left. \times \left(-\frac{5}{2}sen^2\theta + \frac{3}{2}sen\theta^2 - \cos^2\theta \right) \right], \end{aligned}$$

é fácil ver que

$$\Delta\delta_{per} = \frac{\sqrt{GM}aR_{\oplus}J_2}{c^2a^2} sen^2isen2u. \tag{62}$$

Finalmente somando a Equação (62) à Equação (61) temos Δt_{per}^{J2}

$$\Delta t_{per}^{J2} = \frac{3\sqrt{GM}R_{\oplus}^2J_2}{2a^{3/2}c^2} sen^2(i)sen(2u) = \delta t_{per}^{J2} sen(2u). \tag{63}$$

Somando a parcela fixa e a periódica temos uma equação analítica para o efeito do achatamento sobre o tempo próprio dos satélites GNSS

$$\begin{aligned} \Delta t^{J2} = & \frac{R_{\oplus}^2J_2}{2a^2c^2} \left[\frac{7GM}{a} \left(1 - \frac{3}{2}sen^2i \right) t \right. \\ & \left. - 3\sqrt{GMa} sen^2(i)sen(2u) \right]. \end{aligned} \tag{64}$$

Obtivemos então a Equação (64) que descreve a variação periódica dos relógios em órbita em decorrência do achatamento do corpo que este orbita. O termo constante do atraso dado pela Equação (60) é uma deriva constante semelhante a Equação (42) que, para os satélites GNSS, chega à ordem de $9 \cdot 10^{-15}$ s/s ou 816,18 ps/dia. Olhando para a Equação (63) vemos primeiramente que o período da variação é metade do período orbital, fazendo com que a frequência da variação seja o dobro da obtida para excentricidade. Nota-se

que o efeito é inversamente proporcional a raiz quadrada do cubo do semi-eixo maior, por isso é irrelevante em satélite em órbitas geoestacionárias, geossíncronas e para o QZSS. Afora as constantes do planeta sua dependência principal é na inclinação da órbita. Isso faz com que os satélites da constelação GLONASS tenham as maiores amplitudes dentre os veículos GNSS. Todos os satélites em órbitas MEO tem amplitudes δt_{per}^{J2} na ordem das dezenas de picossegundos. Sendo o maior caso estudado um dos veículos GLONASS com 95 ps. Esses atrasos geram um incerteza que para a maioria dos relógios é de cerca de 2 cm.

5. Conclusão

Obtivemos, por fim, um atraso constante, resultado tanto do efeito da relatividade restrita quanto da relatividade geral, que soma cerca de 40 $\mu s/dia$. Uma variação periódica por conta da excentricidade das órbitas, que chegam a mais de 200 ns. E ainda investigamos o efeito relativístico causado pelo achatamento da Terra, que gera um termo de atraso constante de até 900 ps/dia e um termo de variação periódica que pode atingir 90 ps

Ao longo deste artigo abordamos de maneira didática os efeitos relativísticos sobre os relógios dos satélites em órbitas terrestres. Apesar de ser uma solução já aplicada nos mais recentes satélites de navegação e um exemplo recorrente das aplicações da relatividade, não existia na literatura trabalho que investigasse a questão de maneira explícita. Um dos objetivos do presente trabalho é elucidar para profissionais tanto da física quanto da engenharia este procedimento interdisciplinar de relevância para ambas as áreas. Observamos ainda que fizemos poucas aproximações para o caso dos satélites GNSS e ainda poucas que envolvessem a Terra, sendo assim os cálculos são, em certa medida, boas previsões para qualquer objeto em órbita de um corpo celeste. Deixamos como sugestão para trabalhos futuros o cálculo do caso mais geral, e a análise de como ele se relaciona com os resultados aqui obtidos.

Referências

- [1] W. Xie, G. Huang, B. Cui, P. Li, Y. Cao, H. Wang, Z. Chen e B. Shao, *Sensors* **19**, 5147 (2019).
- [2] G. Huang, B. Cui, Y. Xu e Q. Zhang, *Advances in Space Research* **63**, 2899 (2019).
- [3] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Clarendon Press, New York, 1992).
- [4] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics* (Springer, New York, 2007).
- [5] K.S. Thorne, J.A. Wheeler e C.W. Misner, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 2000).
- [6] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* (Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Berlin, 1916).

- [7] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Benjamin Cummings, San Francisco, 2003).
- [8] J.F. Pascual-Sanchez, *Annalen der Physik* **519**, 258 (2007).
- [9] E. Kulbiej, *Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie* **47**, 85 (2016).
- [10] J. Kouba, *GPS solutions* **5**, 1 (2002).
- [11] N. Ashby e R.A. Nelson, *Proceedings of the International Astronomical Union* **5**, 22 (2009).
- [12] G. Petit e B. Luzum (ed.), *IERS Technical Note No. 36 - IERS conventions (2010)* (Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2010).
- [13] N. Ashby, *Living Reviews in Relativity* **6**, 1 (2003).
- [14] J. Kouba, *GPS Solutions* **23**, 1 (2019).
- [15] V. Formichella, L. Galleani, G. Signorile e I. Sesia, em: *IEEE 5th International Workshop on Metrology for AeroSpace* (Torino, 2019).
- [16] C.M. Will, J.N. Kenneth, C.M. Will e J.N. Kenneth, *Astrophysical Journal* **177**, 757 (1972).
- [17] T.D. Moyer, *Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation* (JPL Publication, Pasadena, 2000).
- [18] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, New York, 1972).
- [19] M. Maggiore, *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments* (Oxford University Press, Oxford, 2007).
- [20] M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (John Wiley & Sons, Hoboken, 2006).
- [21] J. Kouba, *GPS Solutions* **25**, 139 (2021).
- [22] C. Han e Z. Cai, *Navigation* **66**, 49 (2019).
- [23] J. Kouba, *GPS Solutions* **8**, 170 (2004).
- [24] E.J. POST, *Reviews of Modern Physics* **39**, 475 (1967).
- [25] G. Janin e V.R. Bond, *The Elliptic Anomaly* (NASA Technical Memorandum, Greenbelt, 1980).
- [26] R.H. McQuain, *Significant Achievements in Space Applications* (National Aeronautics e Space Administration, Washington, 1967).
- [27] D.A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications* (Microcosm Press/Kluwer Academic Publishers, El Segundo/Dordrecht, 2001).
- [28] W.M. Kaula, *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy* (Courier Corporation, North Chelmsford, 2013).
- [29] W.H. Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables and Formulas* (CRC Press, Boca Raton, 1991).
- [30] T.D. Moyer, em: *Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation* (Wiley Online Books, 2003).
- [31] D.G. King-Hele, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **247**, 49 (1958).
- [32] C.D. Murray e S.F. Dermott, *Solar System Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [33] G.W. Rosborough, *Satellite Laser Ranging and Gravity Field Modeling Accuracy* (National Aeronautics e Space Administration/Colorado University, Washington/Boulder, 1990).
- [34] S.H. Na, T.S. Bae, J.H. Jo e J.U. Park, *Journal of the Korean Earth Science Society* **33**, 11 (2012).
- [35] S. Casotto, *Celestial Mechanics Dynamical Astronomy* **55**, 223 (1993).