

Dificultades de estudiantes universitarios chilenos relacionadas con representaciones semióticas algebraicas en cinemática con aceleración no constante

Difficulties of Chilean university students related to graphical and algebraic representations in kinematics with non-constant acceleration

Any Urrutia^{*1,2}, Cristian Merino², Kristina Zuza³, Jenaro Guisasola⁴

¹Universidad Andres Bello, Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Ciencias Físicas, Viña del Mar, Chile.

²Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Química CIDSTEM, Valparaíso, Chile.

³Universidad del País Vasco (UPV/EHU), Donostia Physics Education Research Group, Escuela de Ingeniería de Gipuzkoa, San Sebastian, España.

⁴Escuela de Ingeniería Dual, Instituto de Máquina Herramienta, Elgoibar, España.

Recibida en 31 de Julio, 2024. Revisado en 13 de Septiembre, 2024. Aceptado en 18 de Octubre, 2024.

En este estudio combinamos la representación semiótica como marco teórico y el enfoque fenomenográfico del análisis de datos para vincular las dificultades de reconocimiento de la representación algebraica con la comprensión conceptual de los estudiantes en los conceptos de posición, velocidad y aceleración para cinemática de movimiento con aceleración no constante. Se diseñaron tres cuestiones abiertas centradas en el tratamiento entre reconocimiento y tratamiento de representaciones algebraicas. El análisis de los resultados mostró que un porcentaje significativo de estudiantes, al interpretar la representación algebraica, priorizan la expresión matemática sin relacionarla con el significado físico en un contexto de movimiento con aceleración no constante. Los principales hallazgos de este estudio sobre las dificultades de los estudiantes en la interpretación de la notación algebraica incluyen la disociación del significado físico y la representación algebraica, así como el uso de estrategias de resolución aplicadas de forma memorística. El conocimiento de estas dificultades puede aportar al profesorado y diseñadores del curriculum pistas para un mejor diseño e implementación que mejore la comprensión de los estudiantes.

Palabras clave: Representaciones semióticas, aceleración no constante, fenomenografía, educación universitaria, investigación en enseñanza de la física.

In this study, we combined semiotic representation theory and the phenomenographic approach to data analysis to link recognition difficulties of algebraic representation with students' conceptual understanding of the concepts of position, velocity, and acceleration for kinematics of motion with non-constant acceleration. Three open-ended questions focused on the treatment between recognition and treatment of algebraic representations. The analysis of the results showed that a significant percentage of students, when interpreting the algebraic representation, prioritize the mathematical expression without relating it to the physical meaning in a context of motion with non-constant acceleration. The main findings of this study on students' difficulties in interpreting algebraic notation include the dissociation of the physical meaning and the algebraic representation, as well as the use of solving strategies applied in a rote manner. Knowledge of these difficulties may provide teachers and curriculum designers with clues for better design and implementation to improve student understanding.

Keywords: Semiotic representations, non-constant acceleration, phenomenography, university education, research in physics teaching.

1. Introducción

Una importante contribución de la investigación en enseñanza de la física ha sido proporcionar a profesores e investigadores un conocimiento más profundo sobre las concepciones de los estudiantes, lo que les permite anticipar su razonamiento y planificar la instrucción en consecuencia [1]. En particular, gran parte de estas

investigaciones han abordado el proceso de enseñanza-aprendizaje de la cinemática en cursos introductorios de física. Desde la década de 1980, se han investigado las ideas y patrones de razonamiento de los estudiantes en relación con la comprensión de conceptos fundamentales de cinemática [2, 3]. Diversos estudios han revelado que los estudiantes suelen tener dificultades para entender tanto las definiciones cualitativas como cuantitativas de velocidad y aceleración, así como la relación entre estas magnitudes [3, 4]. Otros estudios muestran que

*Correo electrónico: any.urrutia@unab.cl

persisten dificultades en la comprensión de conceptos clave de la cinemática, como el hecho de no reconocer que la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria, asumir incorrectamente que la aceleración es nula cuando la velocidad es constante, ignorando que en dos dimensiones un cambio en la dirección de la velocidad implica un cambio en el vector de velocidad y, por ende, una aceleración distinta de cero, o asumir erróneamente que la aceleración es nula en un punto de retorno [1, 5–8]. Estudios recientes han revelado que la capacidad de los estudiantes para resolver problemas puede verse afectada por las diferentes formas de representación, y que estas pueden influir en las respuestas de los estudiantes. Diferentes estudios indican que los estudiantes a menudo se enfrentan a mayores desafíos a la hora de interpretar representaciones que incorporan relaciones algebraicas y que, aunque los estudiantes utilizan un enfoque algorítmico en la creación de gráficos, muestran serias dificultades para transferir el conocimiento matemático a contextos físicos [9]. Además, estos estudios muestran que las dificultades son de tipo conceptual y representacional [10].

A pesar de los avances en la investigación, son escasos los estudios que examinan de manera exhaustiva las dificultades que enfrentan los estudiantes universitarios al abordar la cinemática con aceleración no constante. Los profesores suelen recurrir a representaciones algebraicas y gráficas para facilitar la comprensión de estos conceptos; sin embargo, los estudiantes encuentran complicado conceptualizar este cambio no uniforme, dado que las ecuaciones que describen el movimiento con aceleración variable suelen ser no lineales. Esto requiere, en muchas ocasiones, un dominio avanzado de las herramientas de cálculo diferencial e integral para su comprensión y resolución [11], lo que además complica la interpretación física de las soluciones matemáticas [12].

Por ejemplo, el estudio de Pospiech et al. [11] revela que los estudiantes tienden a emplear un enfoque algorítmico al trabajar con gráficos, aplicando correctamente procedimientos en situaciones estándar, como en el caso de cuadrante positivo, gradientes positivos o funciones lineales. Sin embargo, presentan dificultades al transferir estos procedimientos matemáticos al contexto de la física, lo que lleva a una falta de coherencia en su trabajo. Esto se manifiesta tanto en el uso de construcciones matemáticas simples, como las relacionadas con funciones lineales en problemas cinemáticos básicos, como en el manejo de funciones más complejas, por ejemplo, en fenómenos de aceleración no constante o en contextos térmicos.

No obstante, los movimientos con aceleración no constante son fundamentales en la física, con aplicaciones que abarcan áreas tan diversas como la ingeniería, la astronomía y la biomecánica. La relación funcional entre posición, velocidad y aceleración, que implica conceptos de diferenciación e integración, puede presentar un desafío adicional para los estudiantes. Para identificar estas

dificultades, hemos considerado que en la enseñanza de la cinemática se emplean diferentes formatos de representación (algorítmicos, gráficos o diagramas), y que los estudiantes deben desarrollar competencias para manejar estas diversas formas de representación con el fin de comprender y resolver problemas cinemáticos. La literatura actual pone especial énfasis en las dificultades que enfrentan los estudiantes para construir e interpretar representaciones como ecuaciones algebraicas, gráficos o diagramas, así como en su capacidad para interpretar dichas representaciones semióticas aplicadas a un mismo concepto [13]. Este estudio se distingue de otras investigaciones sobre las ideas de los estudiantes en cinemática en cursos de física al enfocarse específicamente en el análisis de situaciones de movimiento con aceleración no constante y que tiene en cuenta las dificultades que los estudiantes enfrentan al interpretar las representaciones algebraicas involucradas en el análisis de estos movimientos. Además, en el campo de la investigación en Enseñanza de la Física, varios estudios han reconocido las dificultades asociadas al manejo de representaciones semióticas en este tipo de contextos [14–16].

El objetivo de este trabajo es investigar las dificultades de los estudiantes para identificar el significado físico y las características del movimiento con aceleración no constante en su representación semiótica algebraica. Pretendemos relacionar sus dificultades de reconocimiento de la representación algebraica con las de comprensión conceptual a nivel universitario. De esta forma, nuestra pregunta de investigación es:

¿Cuáles son los obstáculos y patrones de razonamiento que surgen cuando los estudiantes de segundo año de ingeniería se enfrentan a temas de cinemática con aceleración variable utilizando representaciones algebraicas como herramienta principal?

El trabajo que se presenta a continuación forma parte de una investigación más amplia que analiza el razonamiento de los estudiantes frente a diferentes tipos de representaciones algebraicas y gráficas. En este caso, nos centramos en las dificultades de aprendizaje de los estudiantes cuando se enfrentan a representaciones algebraicas del movimiento con aceleración no constante en cursos avanzados de mecánica en grados de ciencias e ingeniería.

A continuación, se presenta como marco teórico del estudio una breve descripción de la teoría de las representaciones semióticas, seguida del diseño y la metodología utilizada. Se presentan los resultados de tres cuestiones de un cuestionario abierto relacionadas con el tratamiento de representaciones algebraicas que abordan la tarea de interpretar, discriminar y extraer información de funciones algebraicas de posición, velocidad y aceleración para el movimiento de cuerpos con aceleración no constante. Finalmente, se discuten las implicaciones de este estudio para la definición de demandas de aprendizaje para futuras secuencias de enseñanza y aprendizaje en este tipo de movimiento.

2. Marco Teórico

Para abordar la pregunta de investigación, utilizamos la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas [17] para relacionar el uso de la representación algebraica con la comprensión conceptual. Esta teoría entiende los tipos de representaciones gráficas y algebraicas como símbolos de representación semiótica ya que este tipo de representaciones utilizan símbolos, reglas y asociaciones para representar algún tipo de movimiento. Este enfoque nos permite explorar cómo las representaciones pueden ser tanto creencias individuales como signos complejos, y cómo estas nociones influyen en la investigación sobre la adquisición de conocimientos de sistemas representativos [18], resaltando la importancia de analizar las concepciones de los estudiantes y las estructuras cognitivas subyacentes para comprender las dificultades en el aprendizaje matemático y por ende también el físico.

Este marco teórico, nos permite explorar las características cognitivas únicas de los diferentes sistemas de representación utilizados en la enseñanza de la Física junto con los desafíos que enfrentan los estudiantes en su comprensión. Coincidimos con Duval [18] en que los objetos matemáticos no son accesibles a través de la percepción directa o instrumentos, sino solo mediante representaciones semióticas, creando una paradoja para los estudiantes, ya que deben usar representaciones para acceder a objetos matemáticos que no pueden percibir directamente lo que dificulta la comprensión y puede obstaculizar el progreso en el aprendizaje. Esta complejidad cognitiva se ve exacerbada por la necesidad de alternar entre diferentes sistemas de representación según la tarea requerida, lo que puede resultar desafiante para los estudiantes.

Desde esta perspectiva, analizamos las interpretaciones de los estudiantes, ya que la teoría de las representaciones semióticas reconoce las actividades cognitivas no solo relacionadas con la transformación entre diferentes representaciones, sino también el entendimiento dentro de una misma representación, como es el caso de este artículo.

Esta teoría ha sido ampliamente utilizada para vincular las dificultades de reconocimiento y conversión en Matemáticas con la actividad cognitiva y la comprensión en la educación matemática [19], y recientemente ha cobrado relevancia en el ámbito de la Física [9, 11, 20]. Estos estudios muestran el peligro de que los estudiantes confundan la representación con el fenómeno físico en sí y su significado físico. Por ejemplo, los estudiantes podrían interpretar la función matemática del movimiento con el movimiento en sí, o la gráfica espacio-tiempo con la trayectoria del objeto.

Este estudio se enmarca en este contexto teórico para explorar la relación entre el uso representacional algebraico de las funciones de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo y la comprensión de

la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo en movimiento rectilíneo con aceleración no constante.

3. Metodología

Para lograr el objetivo de este estudio, diseñamos un cuestionario de tres cuestiones abiertas. El análisis de los datos obtenidos se realizó siguiendo un enfoque fenomenográfico [9, 21]. Esta perspectiva contempla las diversas formas en que las personas interpretan y comprenden la realidad. Según este enfoque, cada estructura, concepto y forma de razonamiento constituye una categoría de descripción de la realidad que puede ser apreciada colectivamente [21]. Así, estas representaciones reflejan un tipo de intelecto colectivo, de modo que una categoría particular de descripción se manifiesta en diversos razonamientos. En este marco, la recolección y el análisis de datos se centraron en las explicaciones de los estudiantes.

El método da como resultado la creación de categorías descriptivas y de un espacio de resultados que ilustre las relaciones entre estas categorías. Cada categoría se enfocará en aspectos críticos de la comprensión de un fenómeno específico [9], relacionándose entre sí de manera jerárquica e inclusiva. Esto permitirá alcanzar categorías más avanzadas y complejas, garantizando la consistencia interna de las mismas. En este estudio encontramos categorías descriptivas para explicar las habilidades de los estudiantes para reconocer representaciones algebraicas del movimiento de aceleración no constante.

De esta manera y conociendo las categorías de las dificultades que tienen los estudiantes universitarios para explicar los fenómenos físicos a los que se enfrentan, es posible proponer materiales didácticos basados en la investigación que enriquecen la práctica educativa y mejoran la comprensión de los conceptos físicos por parte de los estudiantes universitarios [8, 14, 20, 22].

3.1. Contexto de la investigación

El presente estudio involucró a 119 estudiantes de un curso de física mecánica basado en cálculo de una universidad privada chilena con tres campus en diferentes regiones del país. Este curso de mecánica corresponde al tercer semestre de la carrera de ingeniería. Los estudiantes han aprobado previamente un curso introductorio de física y otro curso de física experimental. Los estudiantes participantes en este estudio pertenecían a tres clases diferentes de entre 35 y 45 estudiantes, en el curso de física mecánica que se impartía en tres sedes de la Universidad Andrés Bello. Todas las clases, aunque tenían diferentes profesores, seguían el mismo horario y tipo de enseñanza.

El primer capítulo del curso incluyó el movimiento en una, dos y tres dimensiones con conceptos como vector desplazamiento, velocidad y aceleración constante y no constante. El capítulo tiene una duración de 4 semanas

con tres clases magistrales por semana y una hora y media de taller de problemas. La enseñanza se desarrolló en un contexto de enseñanza transmisiva tradicional con algunas estrategias de aprendizaje activo en el Taller de Problemas. Cada semana se llevaron a cabo evaluaciones formativas en proceso (en línea) con retroalimentación. Al final del capítulo, los estudiantes tomaron un examen final basado en la resolución de problemas del tipo de final de capítulo en los libros de texto. La recolección de datos se llevó a cabo durante una clase presencial después de las cuatro semanas de instrucción y después de haber realizado el examen final.

3.2. Instrumentos

Para abordar la pregunta de investigación, se diseñó un cuestionario con tres cuestiones abiertas con énfasis en las explicaciones de los estudiantes. Estas están relacionadas con el objetivo de aprendizaje del currículo vinculado a saber interpretar, discriminar y extraer información de las representaciones algebraicas de posición, velocidad y aceleración no constante frente al tiempo. En las cuestiones, los estudiantes deben saber interpretar y comprender dentro de una misma representación (algebraica) las características de un movimiento de aceleración no constante.

El cuestionario fue validado por dos expertos en Física y dos expertos en Investigación en Enseñanza de la Física. Estos evaluadores completaron una tabla de especificaciones que detallaba la concordancia entre el objetivo de aprendizaje y el tipo de representaciones.

Tras este proceso de revisión, se procedió a la mejora del cuestionario manuscrito, abordando aspectos de robustez, utilidad, facilidad de lectura y concordancia entre el objetivo y los tipos de representación semiótica. Antes de aplicar el cuestionario a los estudiantes firmaron un consentimiento informado de acuerdo en participación de esta investigación, certificado por el comité de Bioética y Bioseguridad de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, código BIOEPUCV-H 647-2023.

Además de la implementación del cuestionario abierto, se realizaron entrevistas a cuatro estudiantes en cada campus. Estas entrevistas se centraron en las tres cuestiones del cuestionario que habían respondido de forma escrita con el objetivo de conocer con mayor profundidad las formas de razonamiento que se detectaron en el cuestionario. Fueron llevadas a cabo por los investigadores utilizando la técnica Thinking Aloud [23]. Esta técnica, llamada también “pensar en voz alta” permite establecer un diálogo continuo con el estudiante. Es un método cualitativo utilizado en entrevistas para investigar los procesos de pensamiento de los estudiantes mientras resuelven un problema. Después de aplicar el cuestionario, se solicitó a algunos estudiantes, que revisaran nuevamente sus respuestas, esta vez verbalizando sus pensamientos, estrategias y razonamientos mientras se grababan en audio sus respuestas. Esto permitió obtener una visión directa del proceso cognitivo

involucrado en cada una de las cuestiones. Esta técnica es especialmente útil en la enseñanza de la física, ya que facilita la identificación de dificultades conceptuales, malentendidos o patrones de razonamiento empleados al responder el cuestionario. A través de esta metodología, pudimos analizar cómo los estudiantes interpretaban las funciones algebraicas de movimiento con aceleración no constante y profundizar en las categorías explicativas.

A continuación, se presentan en la Figura 1 tres cuestiones (Q1, Q2 y Q3) que abordan el objetivo de aprendizaje del cuestionario abierto: interpretar, discriminar y extraer información de funciones de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo para movimientos rectilíneos con aceleración variable. Cada cuestión se enfoca en un aspecto particular de este objetivo, y se muestran tanto las representaciones iniciales como las finales utilizadas al responder el cuestionario de cinemática con aceleración variable. En este caso el formato de representación es el mismo (algebraico) para responder a la pregunta de investigación que trata sobre la comprensión de la representación algebraica. Es decir, el objetivo de las cuestiones es identificar la comprensión de los estudiantes y sus formas de razonamiento cuando analizan problemas dentro de una misma representación.

3.3. Recolección y análisis de datos

Las respuestas de los estudiantes fueron sometidas a un análisis exhaustivo utilizando un enfoque fenomenográfico basado en “categorías explicativas” propuesta por Marton [21]. El análisis de las respuestas se realizó en varias etapas [9]. En primer lugar, un investigador transcribió y revisó todas las respuestas escritas para identificar las principales dificultades subyacentes, lo que permitió la creación de proto categorías. Posteriormente, dos investigadores analizaron 50 cuestionarios para definir las categorías explicativas, primero de manera individual y luego en reuniones conjuntas para intercambiar opiniones y alcanzar consensos.

A continuación, cada investigador analizó de forma independiente las respuestas restantes y finalmente compararon los resultados. Para evaluar la fiabilidad del análisis, se utilizó el coeficiente kappa de Cohen, que cuantifica el grado de concordancia entre los evaluadores, considerando la posibilidad de coincidencias aleatorias. Se obtuvo un valor medio de 0,95, lo cual es indicativo de una concordancia significativa, ya que un valor de kappa superior a 0,80 se considera altamente fiable [24].

4. Resultados y Discusión

A continuación, se comparten los hallazgos específicos derivados del análisis de las respuestas de los estudiantes a las cuestiones abiertas ya presentadas anteriormente en este trabajo (Figura 1) centradas en los sistemas de representación semiótica algebraica. Para la posterior discusión de los resultados, se abordarán, inicialmente,

Cuestiones		Representación Inicial: Enunciado de la Cuestión	Representación Final: Respuesta del Estudiante
Q1	<p>Una estudiante de Física se mueve sobre un monopatín en línea recta, definido por la siguiente relación $X(t)$, donde x se expresa en metros y t en segundos.</p>  $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$ <p>a) Indica el valor de la posición inicial b) Indica el valor de la velocidad inicial c) Indica el valor de la aceleración inicial</p>	<p>Algebraica: Posición en función del tiempo para un movimiento con aceleración no constante</p>	<p>Algebraica: Identifica posición inicial, velocidad y aceleración iniciales</p>
Q2	<p>Para un ciclista que se mueve en línea recta, se determina que su posición en función del tiempo está definida por la ecuación:</p>  $x(t) = 6t^2 - t^3$ <p>donde t se expresa en segundos y x en metros. a) Determinar el instante en que el ciclista vuelve al origen de coordenadas (punto de retorno) b) ¿Qué afirmación podría ayudar a justificar tu respuesta?</p>	<p>Algebraica: Posición en función del tiempo para un movimiento con aceleración no constante</p>	<p>Algebraica: Determina el instante en el punto de retorno</p>
Q3	<p>Para una patinadora que se mueve en línea recta, se determina que su velocidad en función del tiempo está definida por la ecuación:</p>  $v(t) = 36t^2 - 36t + 2$ <p>donde t se expresa en segundos y v en metros/segundo. a) Determinar el instante en que el valor de la aceleración de la patinadora es mínimo b) ¿Qué afirmación podría ayudar a justificar tu respuesta?</p>	<p>Algebraica: Velocidad en función del tiempo para un movimiento con aceleración no constante</p>	<p>Algebraica: Determina el instante cuando el módulo de la aceleración es mínimo</p>

Figura 1: Cuestiones para el movimiento con aceleración no constante junto a representaciones iniciales (enunciado de la cuestión) y finales (respuesta de los estudiantes).

aquellos derivados de cada una de las cuestiones, para luego discutirlos en conjunto.

La primera cuestión (Q1) del cuestionario abierto sobre cinemática con aceleración variable (Figura 1, Q1) presenta el caso de una estudiante de Física que se desplaza en línea recta sobre un monopatín, cuya posición respecto al tiempo está dada por la función $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4 \text{ m}$. El objetivo es que el estudiante identifique la posición inicial, la velocidad y la aceleración iniciales de la patinadora.

Para el apartado a), se pide determinar la posición inicial. El estudiante debe reconocer que $t = 0 \text{ s}$ representa el tiempo inicial.

Al sustituir $t = 0 \text{ s}$ en la función $x(t)$, se obtiene la posición inicial de la patinadora:

$$x(t = 0) = 2(0)^3 - 15(0)^2 + 24(0) + 4 = 4 \text{ m}.$$

En el apartado b), se solicita encontrar la velocidad inicial. El estudiante debe derivar la función $x(t)$ para obtener la función de la velocidad:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 30t + 24 \text{ m/s}.$$

Al sustituir $t = 0 \text{ s}$ en esta función, se obtiene la velocidad inicial de la patinadora:

$$v(t = 0s) = 6(0)^2 - 30(0) + 24 = 24 \text{ m/s}.$$

Finalmente, en el apartado c), se requiere determinar la aceleración inicial. El estudiante debe derivar nuevamente la función de la velocidad para obtener la función de la aceleración:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 30 \text{ m/s}^2.$$

Al sustituir $t = 0 \text{ s}$ en esta función, se obtiene la aceleración inicial de la patinadora:

$$a(t = 0s) = 12(0) - 30 = -30 \text{ m/s}^2.$$

Esta cuestión evalúa la capacidad del estudiante para utilizar correctamente las técnicas de derivación y para interpretar los resultados en el contexto físico del movimiento con aceleración variable, en un contexto de representación algebraica tanto en el enunciado del problema como en su resolución.

Tabla 1: Categorías descriptivas Cuestión 1 con porcentaje de respuestas.

Categoría	Descripción de la categoría Q1	Porcentaje de respuestas n (%)
A	Interpretar y extraer información sobre la posición, la velocidad y la aceleración inicial de la función	62 (52%)
B	No logra identificar ni extraer información de la función. Sin embargo, determina el momento en el que la partícula regresa al origen "punto de retorno"	19 (16%)
C	No logra identificar ni extraer información de la función. Sin embargo, deriva para obtener funciones de velocidad y aceleración	27 (23%)
E	No se entiende, o la información proporcionada no se relaciona con la cuestión.	4 (3%)
F	Sin respuesta	7 (6%)

Así, al analizar los razonamientos escritos por los estudiantes, se clasificaron en cinco categorías explicativas (A, B, C, E, F) indicadas en la Tabla 1, junto al número de respuestas y el porcentaje de razonamientos de los estudiantes que contestaron el cuestionario abierto.

La Tabla anterior indica que solo el 52% de los estudiantes que participaron en el cuestionario lograron cumplir con el objetivo de aprendizaje establecido en el currículo. Es decir, saben interpretar y extraer información de posición, velocidad y aceleración inicial de la

función cuando el formato de enunciado del problema y su resolución exige una representación algebraica. Es relevante destacar que el 16% de los estudiantes no pudo identificar la posición, velocidad y aceleración inicial a partir de la relación funcional en el cuestionario, aunque sí pudo determinar el momento en el que la partícula regresa al punto de origen (categoría B). El razonamiento en esta categoría podría interpretarse como una automatización de la identificación del punto de retorno basado en la función $x(t)$ sin comprender necesariamente su significado físico del formato de representación algebraica en que se presenta. Además, un grupo significativo de estudiantes (23%, categoría C), aunque no lograron el objetivo propuesto, realizaron derivaciones para obtener las funciones de velocidad y aceleración del objeto, sin identificar la posición, velocidad y/o aceleración inicial (ver Figura 2).

Además, al analizar las transcripciones de las entrevistas de los estudiantes que respondieron la primera cuestión Q1 podemos corroborar que, a pesar de que no logran identificar el significado físico de la representación algebraica y extraer la información de la función, son capaces de determinar el momento en el que la partícula regresa al origen (conocido como el punto de retorno) cuando indican:

"me parece que para calcular la velocidad hay que derivar eso [indicando la función de posición versus tiempo]... y lo igualo a cero".

En otros casos, los estudiantes automatizan la identificación del punto de retorno basado en operaciones matemáticas de derivación para obtener el resultado, pero no parece que comprendan el significado de la representación algebraica de la función. Un ejemplo, de este tipo de razonamiento es:

CUESTIÓN 1

Ejemplo categoría B	Ejemplo categoría C
<p>a) Indica el valor de la posición inicial</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $x(t) = 2(t)^3 - 15(t)^2 + 24(t) + 4$ $x(0) = 4 \text{ m}$ </div> <p>b) Indica el valor de la velocidad inicial</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $x' = 6t^2 - 30t + 24$ $x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 24}}{2 \cdot 6}$ $x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 576}}{12} = \frac{30 \pm \sqrt{324}}{12}$ $x = \frac{30 \pm 18}{12}$ $x = \frac{30 + 18}{12} = \frac{48}{12} = 4$ </div> <p>c) Indica el valor de la aceleración inicial</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $x'' = 12t - 30$ </div> <p>No logra identificar ni extraer información de la función. Sin embargo, determina el momento en el que la partícula regresa al origen: punto de retorno. (16%)</p>	<p>a) Indica el valor de la posición inicial</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $x(0) = 2(0)^3 - 15(0)^2 + 24(0) + 4$ $x(0) = 4$ <p>R: posición inicial es igual a 4 metros</p> </div> <p>b) Indica el valor de la velocidad inicial</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $x'(t) = 6t^2 - 30t + 24$ $R: v(t) = 6t^2 - 30t + 24$ </div> <p>c) Indica el valor de la aceleración inicial</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $v(t)' = 12t - 30$ $R: a(t) = 12t - 30$ </div> <p>No logra identificar ni extraer información de la función. Sin embargo, deriva para obtener funciones de velocidad y aceleración. (23%)</p>

Figura 2: Ejemplos de dificultad recurrente (categorías B y C) para la Cuestión 1 que aborda el objetivo de identificar información desde representaciones semióticas algebraicas.

“son dos veces la derivada y después igualo a cero...”

Estos hallazgos sugieren que los estudiantes enfrentan dificultades para distinguir conceptos relacionados con la posición instantánea y la función de posición de un cuerpo en movimiento con aceleración no constante. Además, tienden a realizar operatoria de derivación sin comprender el significado físico subyacente de función de la velocidad y la velocidad instantánea en un punto, como lo es el punto cuando retorna una partícula. Lo anterior puede ser un indicador de una falta de comprensión del significado físico representado en la función algebraica que lleva a confusiones entre conceptos físicos asociados al movimiento de los cuerpos con aceleración variable y la aplicación de estrategias de aprendizaje memorístico sin significado físico.

En la segunda cuestión Q2, se propuso un escenario en el que un ciclista viaja en línea recta con una aceleración no constante (Figura 1 Q2). En este contexto, se proporcionó una relación funcional (formato algebraico) que describe la posición en función del tiempo; $x(t) = 6t^2 - t^3$ m. Se pidió a los estudiantes que determinaran el instante en que el ciclista iniciaba el retorno al origen de las coordenadas y que justificaran la respuesta, utilizando un formato algebraico.

La tarea en esta cuestión consistía en que los estudiantes registraran en el mismo cuestionario el valor del tiempo en el que el ciclista regresaba al punto de origen, conocido físicamente como el “punto de retorno”. Además, se les dio espacio adicional para respaldar su respuesta con una declaración. Para completar la tarea propuesta, los estudiantes debían seguir un proceso que implicaba derivar la función de posición con respecto al tiempo para obtener la función de velocidad

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2 \text{ m/s.}$$

Posteriormente, debían establecer la velocidad igual a cero ($v = 0$ m/s) en esa ecuación y, utilizando métodos como la resolución de ecuaciones cuadráticas, determinar dos valores de tiempo en los que el corredor iniciaba el regreso al punto de origen $12t - 3t^2 = 0$.

Una vez obtenidos estos valores de tiempo ($t = 0$ s y $t = 4$ s), los estudiantes tuvieron que discriminar que solo el valor de tiempo no nulo correspondía al punto de retorno. En el proceso de resolución los estudiantes deben comprender el significado del formato algebraico del enunciado (la función posición/tiempo) para resolver el problema con comprensión, utilizando el formato algebraico.

Los resultados del análisis de la cuestión Q2 se muestran en la Tabla 2 que muestra la clasificación de otras cinco categorías explicativas (A, B, C, E, F), junto al número de respuestas y el porcentaje de razonamiento de los estudiantes que contestaron el cuestionario abierto.

Solo el 54% de los estudiantes (categoría A) lograron alcanzar el objetivo de interpretar la representación

Tabla 2: Categorías descriptivas Cuestión 2 con número y porcentajes de respuestas.

Categoría	Descripción de la categoría Q2	Porcentaje de respuestas n(%)
A	Interpretar y extraer información de una función	64 (54%)
B	Punto de retorno: Deriva automáticamente y es igual a cero, sin comprender lo que está buscando físicamente	12 (10%)
C	Derivada sin solución: Confunde posición/velocidad en un punto con función posición/velocidad	13 (11%)
E	Dificultades en las habilidades matemáticas de derivación, sustitución, compensación	20 (17%)
F	Sin respuesta	10 (8%)

algebraica del enunciado y extraer información de la función que representa el movimiento. Se observa que el 10% (categoría B) automatizó el proceso de derivación e igualación a cero sin comprender el significado físico de la representación algebraica, lo que dificulta la determinación del momento de retorno de las salidas del ciclista. Un porcentaje significativo de respuestas (11%, Categoría C) hizo derivadas para las funciones de velocidad y aceleración, pero no identificó el punto de retorno o el instante.

Esto podría indicar dificultades para distinguir los conceptos de posición en un instante y las funciones de posición en movimiento en el formato de representación algebraica del enunciado (ver Figura 3), un resultado que confirma los encontrados en Q1. Además, el 17% (Categoría E) de los estudiantes enfrentan dificultades en las habilidades matemáticas fundamentales relacionadas con el cálculo (ver ejemplos de estas dificultades en Figura 3).

Adicionalmente, al analizar las transcripciones de las entrevistas de los estudiantes que respondieron la cuestión Q2, se corroboró que, aunque un número significativo de estudiantes logró el objetivo de aprendizaje de identificar y extraer información de la función, determinando el momento en que la partícula regresa al origen (punto de retorno), muchos estudiantes presentaron dificultades en habilidades matemáticas como derivación, sustitución e incluso compensación del enunciado en el formato algebraico.

Por ejemplo, un estudiante comentó:

“Según yo faltan datos para poder contestarlo, porque podrían haber dado la velocidad, porque ahí se podría despejar t ”

evidenciando dificultades para reconocer en el formato algebraico la función $x(t)$ y su derivada para encontrar la función de la velocidad, y así, al igualar a cero,

CUESTIÓN 2

Ejemplo categoría C

- a) Determinar el instante en que el ciclista cambia su sentido de movimiento (punto de retorno)

$$\begin{aligned} V &= 12t - t^2 \\ V &= t(12 - t) \\ &= t = 0 \quad t = 12 \end{aligned}$$

- b) ¿Qué afirmación podría ayudar a justificar tu respuesta?

Reemplazando los tiempos en la ecuación de velocidad, resulta en velocidad = 0

Confunde posición/ velocidad en un punto con función de Posición/velocidad (11%)

Ejemplo categoría E

- a) Determinar el instante en que el ciclista cambia su sentido de movimiento (punto de retorno)

$$\begin{aligned} x(t) &= 6t^2 - t^3 \quad \frac{dx}{dt} \quad V = 12t - 2t^2 \quad 0 = 12t - 2t^2 \\ T &= 6 \text{ seg} \end{aligned}$$

- b) ¿Qué afirmación podría ayudar a justificar tu respuesta?

La PRIMERA DERIVADA DE la FUNCIÓN POSICIÓN SOBRE TIEMPO ES IGUAL A la VELOCIDAD.
AL REEMPLAZAR $T = 6$ la $x = 0$ //

Dificultades en las habilidades matemáticas de derivación, sustitución, compensación. (17%)

Figura 3: Ejemplos de dificultad recurrente (categoría C y E) para Cuestión 2 que aborda el objetivo de relacionar representaciones semióticas algebraicas para determinar magnitudes físicas.

obtener el instante en el cual el cuerpo cambia de sentido en el movimiento, confundiendo la función con una ecuación matemática. Esto implica, no sólo una falta de habilidades matemáticas, sino una falta de comprensión del significado físico de la representación algebraica.

Otro ejemplo, desde las transcripciones, muestra que, a pesar de conocer el procedimiento para encontrar el punto de retorno a través de la derivada de la función $x(t)$, el estudiante carece de habilidades matemáticas necesarias, como lo demuestra la afirmación:

“viendo que esta es como una función podríamos aplicar lo que se vio en un ramo anterior, en pocas palabras factorizar esto [indica el t de la función $x(t)$]”

Este comportamiento sugiere que los estudiantes enfrentan dificultades en las habilidades matemáticas al trabajar con representaciones semióticas de tipo algebraico, propias del nivel universitario requerido en este curso de Mecánica, a pesar de haber superado cursos físicos y matemáticos básicos como prerrequisitos.

Adicionalmente, afirmaciones como

“porque su posición inicial la pondríamos en cero, se podría despejar t si nos dieran la velocidad”

indican confusiones entre conceptos físicos asociados al movimiento de los cuerpos con aceleración variable y la aplicación de estrategias de aprendizaje memorístico sin significado físico. Estos hallazgos podrían subrayar la necesidad de reforzar las habilidades matemáticas

y la comprensión conceptual en los estudiantes para que puedan manejar adecuadamente las representaciones algebraicas y su aplicación en la física universitaria para movimientos con aceleración variable.

La última cuestión Q3 (Figura 1 Q3) propone el escenario de un patinador en movimiento rectilíneo, proporcionando una función de velocidad en función del tiempo; $v(t) = 36t^2 - 36t + 2$. Los estudiantes debían determinar el tiempo en el que la patinadora alcanzó su aceleración mínima y justificar la respuesta.

Para hacerlo, necesitan derivar la función $v(t)$ para obtener $a(t) = \frac{dv}{dt} = 72t - 36$ luego igualarla a cero: $a(t) = 72t - 36 = 0$ y obtener el valor del tiempo $t = 0,5$ s.

La Tabla 3 muestran las categorías, levantadas mediante fenomenografía, asociadas a la capacidad de los estudiantes para interpretar y discriminar información sobre funciones en movimientos con aceleración variable. A través de los análisis de los razonamientos que los estudiantes justificaron en la cuestión Q3, permite clasificar otras cinco categorías explicativas (A, B, C, E, F) junto al número de respuestas y el porcentaje de razonamiento de los estudiantes que contestaron el cuestionario abierto.

Estos resultados, desprendidos del análisis de la cuestión 3, arrojan que el 55% de los estudiantes lograron el objetivo de interpretar adecuadamente el significado físico de la representación algebraica del enunciado y de su resolución (categoría A), un porcentaje similar al de la cuestión Q2. Sin embargo, un 27% de estudiantes en la categoría B, mecanizaron el proceso de derivar,

Tabla 3: Categorías descriptivas Cuestión 3 con número y porcentajes de respuestas.

Categoría	Descripción de la categoría Q3	Porcentaje de respuestas n(%)
A	Interpreta, discrimina y extrae información de las funciones	65 (55%)
B	Punto de retorno: Deriva automáticamente y es igual a cero, sin comprender lo que está buscando físicamente	32 (27%)
C	Errores de cálculo (derivados o de sustitución con dificultad)	13 (11%)
E	No se entiende, o la información proporcionada no se relaciona con la cuestión	2 (2%)
F	No hubo respuesta	6 (5%)

sin comprender el significado físico, lo que sugiere dificultades para distinguir entre los conceptos físicos de velocidad, aceleración y sus funciones asociadas en formato algebraico.

Además, el 11% (Categoría C) evidenció dificultades en las habilidades matemáticas básicas, dando respuestas no relacionadas con la cuestión, lo que indica desafíos en el cálculo y la comprensión conceptual de la física para el movimiento con aceleración no constante (ver Figura 4).

El análisis de las transcripciones de las entrevistas realizadas a los estudiantes que respondieron la cuestión Q3 del cuestionario abierto revela que, un porcentaje

significativo de estudiantes universitarios, al enfrentarse a una función de posición o velocidad en función del tiempo, tienden a derivar e igualar a cero de manera automática (categoría B, 27%), sin entender el significado físico del formato algebraico representado por la función o en lo que esta representa. Algunos comentarios destacados de las entrevistas incluyen:

“Creo que aquí tengo que... derivar esa fórmula...”. Otro estudiante expresó: “Según yo, tendría que reemplazar... eh... o no sé si ¿tengo que derivar esa parte?... no recuerdo, pero me acuerdo de esa fórmula, pero no sé...”

Estas afirmaciones sugieren que un número significativo de estudiantes presenta dificultades para distinguir entre los conceptos físicos de velocidad, aceleración y sus funciones asociadas en la representación algebraica, y asumen que deben derivar para obtener la aceleración mínima sin comprender el contexto.

Además, las transcripciones evidencian que algunos estudiantes todavía encuentran desafiante la operatoria matemática básica necesaria para este curso, como derivar o despejar una incógnita (categoría C, 11%). Por ejemplo, un estudiante comentó:

“Esto... esto tendría que pasar la velocidad hacia el otro lado, con el tiempo... yyyy... ese tiempo también traspasarlo al otro lado, y así me quedaría despejada la aceleración”

Estos resultados apuntan a la necesidad de fortalecer no solo las habilidades matemáticas, sino la comprensión

CUESTIÓN 3

Ejemplo categoría B

a) Determinar el instante en que el valor de la aceleración de la patinadora es mínimo

$v(t) = 36t^2 - 36t + 2$
 $v(t)' = 72t - 36$
 $v(t)'' = 72$
 En el instante en que la aceleración es la mínima a los 72 m/s²

b) ¿Qué afirmación podría ayudar a justificar tu respuesta?

-derivada>

Punto de retorno: Deriva automáticamente y es igual a cero, sin comprender lo que está buscando físicamente. (27%)

Ejemplo categoría C

a) Determinar el instante en que el valor de la aceleración de la patinadora es mínimo

$a(t) = 72t - 36$
 $0 = 72t - 36$
 $72t = 36$
 $t = 2$
 $a = 0 \rightarrow 2s$
 a los 2 segundos la aceleración es 0.

b) ¿Qué afirmación podría ayudar a justificar tu respuesta?

La aceleración es la segunda derivada de la velocidad, igualando la aceleración a 0 se obtiene que a los 2s la aceleración es 0.

Errores de cálculo (derivados o de sustitución con dificultad). (11%)

Figura 4: Ejemplos de dificultad recurrente (categoría B y C) para la Cuestión 3 que aborda el objetivo de relacionar representaciones semióticas algebraicas para determinar magnitudes físicas.

conceptual en los estudiantes para que puedan abordar adecuadamente las representaciones algebraicas y su aplicación en la física universitaria para el movimiento con aceleración no constante.

5. Conclusión

En este estudio combinamos la representación semiótica como marco teórico y el enfoque fenomenográfico del análisis de datos para vincular las dificultades de reconocimiento de la representación algebraica con la comprensión conceptual de los estudiantes en los conceptos de posición, velocidad y aceleración para cinemática de movimiento con aceleración no constante.

La metodología fenomenográfica del estudio [9, 21] permite identificar las dificultades que tienen los estudiantes en el reconocimiento del formato algebraico y vincularlas con la comprensión conceptual mediante la teoría de registros de representaciones semióticas [8, 14, 17]. Las dificultades de los estudiantes en la comprensión del significado de los conceptos de velocidad y aceleración coinciden con las dificultades encontradas en trabajos previos en movimiento con aceleración constante [5].

La aportación original de nuestro estudio es que un porcentaje significativo de estudiantes, al interpretar la representación algebraica, priorizan la expresión matemática sin relacionarla con el significado físico en un contexto de movimiento con aceleración no constante. Los principales hallazgos sobre las dificultades de los estudiantes al interpretar la notación algebraica revelan una desconexión entre el significado físico y su representación algebraica, así como el uso de estrategias de resolución aplicadas de forma memorística.

El estudio muestra que un poco más de la mitad de los estudiantes de grado (categoría A) presentan un reconocimiento correcto de los conceptos básicos del movimiento con aceleración no constante en la representación algebraica. Sin embargo, las evidencias recopiladas en este estudio implican que casi la mitad de los estudiantes no reconocen las características de posición, velocidad y aceleración en notación algebraica. Las principales dificultades que tienen los estudiantes para interpretar la representación algebraica están relacionadas con errores de interpretación de la notación algebraica (categoría B y C en Q1), errores de tratamiento basado en el uso de ecuaciones sin sentido (categoría B y C en Q2 y categoría B en Q3). En particular se han detectado las siguientes dificultades:

- Dificultades para distinguir conceptos relacionados con la posición instantánea y la función de posición de un cuerpo en movimiento con aceleración no constante (cuestión Q1).
- Dificultades para distinguir entre los conceptos de posición instantánea y funciones de posición en movimiento (cuestión Q2).
- Dificultades para distinguir entre los conceptos físicos de velocidad, aceleración y sus funciones asociadas (cuestión Q3).

Además, nuestro estudio ha encontrado que un número significativo de estudiantes presentan dificultades en las habilidades matemáticas de derivación, sustitución, compensación (cuestiones Q1, Q2, Q3).

Reconocemos algunas limitaciones de este estudio relacionadas con el número de estudiantes implicados, el país donde se realizó el estudio y los instrumentos utilizados (cuestionarios abiertos y entrevistas). No pretendemos generalizar estos resultados a estudiantes de todos los contextos del mundo. Sin embargo, las características de los estudiantes implicados en este estudio son similares a las de otros estudiantes de grados de ciencias e ingeniería de otros países, que han participado en investigaciones similares.

Los resultados de este estudio podrían estar en resonancia con profesores e investigadores de otros contextos. En cualquier caso, sería interesante ampliar el contexto de esta investigación a estudiantes de otros países, empleando métodos cuantitativos y manteniendo la perspectiva del marco teórico de las representaciones semióticas.

En la enseñanza de la física es crucial conocer las dificultades de los estudiantes en el tema concreto del currículum para planificar posibles enfoques y actividades que les ayuden a superarlas. Las dificultades encontradas en este estudio sobre la interpretación de los estudiantes en la notación algebraica nos llevan a considerar que los profesores no deben suponer que los estudiantes comprenden las funciones matemáticas de la representación algebraica de un movimiento con aceleración no constante, ni que pueden interpretarlas y resolverlas de manera efectiva sin una instrucción explícita e interactiva al respecto.

Es fundamental una enseñanza activa que permita a los estudiantes discutir y explicar el significado físico de la notación algebraica. Por ejemplo, el profesorado puede planificar actividades que ofrezcan oportunidades a los estudiantes de interpretar explícitamente la función matemática y discutir su significado con otros estudiantes y el profesor.

Esta investigación sugiere que es necesaria una buena sinergia entre la representación algebraica y su significado para la comprensión de los conceptos implicados.

En futuros trabajos tenemos intención de realizar un enfoque de enseñanza con diseño de actividades que den oportunidades a los estudiantes para superar la comprensión de los conceptos del movimiento con aceleración no constante a través de las representaciones algebraicas.

Agradecimientos

Parte de esta investigación ha sido subvencionada por el Gobierno Vasco (IT1637-22) y por el Gobierno Español (MINECO\FEDER PID2019-105172RB-100).

Proyecto Fondecyt Regular 1211092 (ANID). Gobierno de Chile.

Fondo Asignable. Dirección de Investigación Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Cod: 125.736/2021.

Referencias

- [1] L. Viennot, *Reasoning in physics?: the part of common sense* (Kluwe Academic Publishers, Dordrecht, 2001), disponible en: https://books.google.com/books/about/Reasoning_in_Physics.html?hl=es&id=h0X0T3sYxEOC, accedido en: 11/09/2024.
- [2] R.J. Beichner, *J. Res. Sci. Teach.* **27**, 803 (1990).
- [3] R.J. Beichner, *Am. J. Phys.* **64**, 1272 (1996).
- [4] F. Reif y S. Allen, *Cogn. Instr.* **9**, 1 (1992).
- [5] P.S. Shaffer y L.C. McDermott, *Am. J. Phys.* **73**, 921 (2005).
- [6] L.C. McDermott y E.F. Redish, *Am. J. Phys.* **67**, 755 (1999).
- [7] L. Viennot, *Thinking in physics: The pleasure of reasoning and understanding* (Springer, New York, 2014).
- [8] K. Zuza, M.D. Cock, P.V. Kampen, L. Bollen y J. Guisasola, *Eur. J. Phys.* **37**, 065709 (2016).
- [9] J. Guisasola, E. Campos, K. Zuza y G. Zavala, *Physical Review Physics Education Research*, **19**, 020602 (2023).
- [10] M.D. Cock, *Phys. Rev. Spec. Top. Phys. Educ. Res.* **8**, 020117 (2012).
- [11] G. Pospiech, M.A. Geyer, S. Ceuppens, M.D. Cock, J. Deprez, W. Dehaene, M. Michelini y A. Stefanel, *J. Phys. Conf. Ser.* **1287**, 012014 (2019).
- [12] R.J. Dufresne, W.J. Gerace y W.J. Leonard, *Phys. Teach.* **35**, 270 (1997).
- [13] B. Ibrahim y N.S. Rebello, *Phys. Rev. Spec. Top. Phys. Educ. Res.* **8**, 010126 (2012).
- [14] E. Campos, G. Zavala, K. Zuza y J. Guisasola, *Rev. Bras. Ensino Física* **44**, e20220146 (2022).
- [15] T. Fredlund, C. Linder, J. Airey y A. Linder, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **15**, 019901 (2019).
- [16] S. Ceuppens, J. Deprez, W. Dehaene y M.D. Cock, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **14**, 020105 (2018).
- [17] K. Svensson y E. Campos, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **18**, 020120 (2022).
- [18] R. Duval, *Educ. Stud. Math.* **61**, 103 (2006).
- [19] D.L. McGee y R. Martinez-Planell, *Int. J. Sci. Math. Educ.* **12**, 883 (2014).
- [20] E. Campos, G. Zavala, K. Zuza y J. Guisasola, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **16**, 010135 (2020).
- [21] F. Marton, *Instr. Sci.* **10**, 177 (1981).
- [22] E. Campos, K. Zuza, J. Guisasola y G. Zavala, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **19**, 020117 (2023).
- [23] M.W.V. Someren, Y.F. Barnard y J.A.C. Sandberg, *The Think Aloud Method: A practical guide to modelling cognitive processes* (Academic Press, London, 1994), v. 11.
- [24] M. Banerjee, M. Capozzoli, L. McSweeney y D. Sinha, *Can. J. Stat.* **27**, 3 (1999).