BRAGANTIA

Revista Científica do Instituto Agronômico, Campinas

Vol. 38 | Campinas, dezembro de 1979 | N.º 23

"DELINEAMENTO DUPLO CENTRAL COMPOSTO COM 29 PONTOS" (1)

ARMANDO CONAGIN e JOASSY DE PAULA NEVES JORGE (2), *Divisão de Plantas Alimentícias Básicas, Instituto Agronômico*

SINOPSE

O delineamento duplo central composto com 29 pontos representa uma extensão do delineamento central composto e foi desenvolvido para o estudo de três fatores em mais de três níveis.

Essencialmente, consta de dois fatoriais 2^3 (níveis 1 e B), de duas estrelas (níveis α e 2α) e de um ponto no centro do delineamento.

É mostrada a origem do delineamento, o tipo não ortogonal, completamente casualizado, o tipo ortogonal completamente casualizado e o ortogonal divisível em dois blocos.

No primeiro deles, seriam estudados três fatores em cinco níveis (—2, —1, 0, +1 e +2); no segundo, três fatores em nove níveis (—3,02; —2,00; —1,51; —1,00; 0,00; +1,00; +1,51; +2,00 e +3.02) e, no terceiro, três fatores nos nove níveis seguintes (—7,262; —4,391; —3,631; —1,000; 0,000; +1,000; +3,631; +4,391 e +7,262).

É apresentado também um exemplo do último delineamento, com sua análise respectiva.

De acordo com o critério de Box & Wilson (2), esse último delineamento é mais eficiente que o fatorial 3 x 3 x 3 divisível em blocos de nove.

Os três delineamentos podem ser empregados em programas de adubação visando ao estudo de macronutrientes com vistas à recomendação das doses ótimas de fertilizantes que possibilitem a maximização do lucro obtido e, ainda, em outras áreas da pesquisa científica em que se deseja a avaliação da superfície de resposta, o estudo dos seus pontos extremos, etc.

1. INTRODUÇÃO

Em programas de pesquisa com fertilizantes, utilizaram-se no passado experimentos simples, variando algumas fórmulas; mais tarde, usaram-se os ensaios fatoriais 2 x 2 x 2; para o estudo de três fatores, em mais de

---

(1) Trabalho apresentado na Reunião da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria, realizada em 30 de março de 1978, em comemoração ao 90.º aniversário do I.A. Recebido para publicação em 10 de setembro de 1979.

(2) Com bolsa de suplementação do CNPq.

dois níveis, o delineamento mais empregado foi, seguramente, o 3 x 3 x 3, em blocos de nove. Programas experimentais de adubação com esse delineamento foram feitos na Inglaterra com bons resultados, principalmente com a beterraba açucareira; os 3 x 3 x 3 foram intensivamente utilizados na Índia, além de experimentos simples, em arroz, trigo e milho etc.; na China (**12**), para programas com algodão, milho, trigo, arroz e colza; em Quênia, para pesquisa de cereais; no Brasil, nas pesquisas de adubação de cana-de-açúcar (**1, 7, 13**), algodão (**5**), milho (**9, 11, 15**), feijão (**6**) e amendoim (**14**).

O aparecimento de "pontos de sela", quando da análise dos experimentos individuais e mesmo de grupos de experimentos, levou pesquisadores em busca de outros delineamentos, principalmente os do tipo Box (**4, 16**) e, em alguns casos, os fatoriais fracionados (**3**).

Um delineamento do tipo central composto, muito utilizado na experimentação industrial, é o $2^3 + 2(3) + n_1$. Além do cubo central nos níveis -1 e $+1$ para três fatores, dispõe de dois pontos axiais nas distâncias $-\alpha$ e $+\alpha$ para cada fator (na dose média dos outros dois fatores) e, ainda, de um ponto central 000 a ser repetido n_1 vezes para possibilitar a avaliação do erro experimental e a adequação do modelo (**2**).

Na experimentação agronômica foi utilizado, entre nós, esse delineamento com o valor $\alpha = -2$ e $\alpha = +2$, tendo-se usado duas repetições do mesmo (**8**). Com α convenientemente escolhido, pode-se obter o delineamento central composto ortogonal, que facilita a obtenção das estimativas dos coeficientes lineares, quadráticos e interações (**10**).

Os autores, visando obter melhor estimativa da curvatura da função de resposta, propuseram, em 1968, o uso do delineamento duplo central composto com 29 pontos (**4**).

2. MATERIAL E MÉTODO

Esse delineamento em sua forma original era composto de dois cubos situados nas distâncias ± 1 e ± 2, duas estrelas nas distâncias $\alpha = \pm 1$ e $2\alpha = 2$ e um ponto central.

O delineamento pode ser representado por $2^3 + 2^3 + 2\ (3) + 2\ (3) + 1$ e, geometricamente, tem a forma ilustrada na figura 1.

Mais ou menos na mesma época, e, independentemente, havia sido proposto por Voss & Pesek (**16**) um delineamento da mesma natureza, só diferindo por apresentar seis pontos em vez de doze, na estrela, num total de 23 pontos.

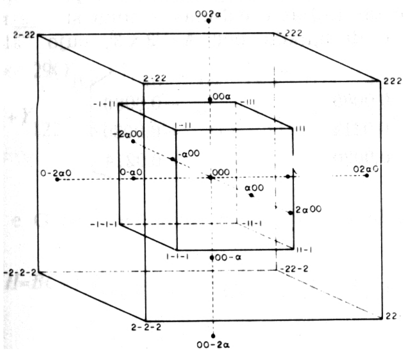

Figura 1 - Delineamento duplo central composto em sua forma original, nos níveis α e 2α

O polinômio a ser utilizado para caracterizar a superfície de resposta é de natureza quadrática:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 X_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3 + \hat{\beta}_{11} X_1^2 + \hat{\beta}_{22} X_2^2 + \hat{\beta}_{33} X_3^2 + \hat{\beta}_{12} X_1 X_2 + \hat{\beta}_{13} X_1 X_3 + \hat{\beta}_{23} X_2 X_3$$

Utilizando variáveis reduzidas e a correção para a média, introduzida nos termos quadráticos, chega-se ao polinômio:

$$Y = \hat{\eta}_0 X_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \hat{\beta}_{11}\left(x_1^2 - \frac{50}{29}\right) + \hat{\beta}_{22}\left(x_2^2 - \frac{50}{29}\right) + \hat{\beta}_{33}\left(x_3^2 - \frac{50}{29}\right) + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 + \hat{\beta}_{13} x_1 x_3 + \hat{\beta}_{23} x_2 x_3$$

O vetor **Y** das produções$_{ijk}$, correspondentes aos tratamentos numerados de 1 a 29, e a matriz X das variáveis independentes, dadas em unidades reduzidas, são mostrados na página 220.

A matriz A = X'X, apresentada abaixo, é idêntica à do referido trabalho, tendo, porém, sido reordenada no sentido de colocar os termos correspondentes aos coeficientes lineares em primeiro lugar, seguidos dos coeficientes quadráticos e dos correspondentes às interações.

$$A = X'X = \begin{bmatrix} 29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2430/29 & 1444/29 & 1444/29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1444/29 & 2430/29 & 1444/29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1444/29 & 1444/29 & 2430/29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 136 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 136 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 136 \end{bmatrix}$$

A matriz $\overset{-1}{A}(10 \times 10)$ contém os recíprocos dos valores correspondentes à parte que é diagonal, com zeros para os demais elementos dessas linhas e colunas, e uma submatriz 3×3, que corresponde aos termos quadráticos e é designada por $A^{-1}(3 \times 3)$, cujo valor numérico é transcrito a seguir:

$$A^{-1}(3 \times 3) = \begin{bmatrix} 0{,}0214 & -0{,}0080 & -0{,}0080 \\ -0{,}0080 & 0{,}0214 & -0{,}0080 \\ -0{,}0080 & -0{,}0080 & 0{,}0214 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$\hat{\beta} = A^{-1}X'\underline{Y}$, onde:

$X'\underline{Y} = [A, B, C, \ldots, I, J]'$, com:

$$A = \sum_{1}^{29} Y_{ijk}$$

$$B = -2(Y_{000} + Y_{040} + Y_{004} + Y_{044} + Y_{022}) - 1(Y_{111} + Y_{131} + Y_{113} + Y_{133} + Y_{122}) + 1(Y_{311} + Y_{331} + Y_{313} + Y_{333} + Y_{322}) + 2(Y_{400} + Y_{440} + Y_{404} + Y_{444} + Y_{422})$$

$$Y = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{18} \\ T_{19} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{24} \\ T_{25} \\ T_{26} \\ T_{27} \\ T_{28} \\ T_{29} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{000} \\ Y_{400} \\ Y_{040} \\ Y_{440} \\ Y_{004} \\ Y_{404} \\ Y_{044} \\ Y_{444} \\ Y_{111} \\ Y_{311} \\ Y_{131} \\ Y_{331} \\ Y_{113} \\ Y_{313} \\ Y_{133} \\ Y_{333} \\ Y_{222} \\ Y_{022} \\ Y_{122} \\ Y_{322} \\ Y_{422} \\ Y_{202} \\ Y_{212} \\ Y_{232} \\ Y_{242} \\ Y_{220} \\ Y_{221} \\ Y_{223} \\ Y_{224} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & (x_1^2-50/29) & (x_2^2-50/29) & (x_3^2-50/29) & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & -4 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & 4 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & 4 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & -4 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 66/29 & 66/29 & 66/29 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -21/29 & -21/29 & -21/29 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -50/29 & -50/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 66/29 & -50/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -21/29 & -50/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -21/29 & -50/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 66/29 & -50/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -50/29 & 66/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -50/29 & -21/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -50/29 & -21/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -50/29 & 66/29 & -50/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -50/29 & -50/29 & 66/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -50/29 & -50/29 & -21/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -50/29 & -50/29 & -21/29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -50/29 & -50/29 & 66/29 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

C e D são definidos de forma análoga, conforme explícito na matriz X.

$$E=(66/29)(Y_{000}+Y_{040}+Y_{004}+Y_{044}+Y_{022}+Y_{400}+Y_{422}+Y_{440}+Y_{404}+Y_{444})-(21/29)(Y_{111}+Y_{131}+Y_{113}+Y_{133}+ +Y_{122}+Y_{311}+Y_{331}+Y_{313}+Y_{333}+Y_{322})-(50/29)(Y_{222}+Y_{202}+Y_{212}+Y_{232}+Y_{242}+Y_{220}+Y_{221}+Y_{223}+Y_{224})$$

F e G são definidos de forma semelhante

$$H=BC=4(Y_{000}+Y_{004}+Y_{440}+Y_{444})+1(Y_{111}+Y_{113}+Y_{331}+Y_{333})-4(Y_{400}+Y_{404}+Y_{040}+Y_{044})-1(Y_{311}+ +Y_{313}+Y_{131}+Y_{133})$$

$$I=BD=4(Y_{000}+Y_{040}+Y_{404}+Y_{444})+1(Y_{111}+Y_{131}+Y_{313}+Y_{333})-4(Y_{440}+Y_{400}+Y_{004}+Y_{044})-1(Y_{311}+ +Y_{331}+Y_{113}+Y_{133})$$

$$J=CD=4(Y_{000}+Y_{400}+Y_{044}+Y_{444})+1(Y_{111}+Y_{311}+Y_{133}+Y_{333})-4(Y_{040}+Y_{440}+Y_{004}+Y_{404})-1(Y_{131}+ +Y_{331}+Y_{113}+Y_{313})$$

$$\underline{\hat{\beta}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X'}\underline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{22} \\ \hat{\beta}_{33} \\ \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \div 29 \\ B \div 50 \\ C \div 50 \\ D \div 50 \\ (+0{,}0214\ E - 0{,}0080\ F - 0{,}0080\ G) \\ (-0{,}0080\ E + 0{,}0214\ F - 0{,}0080\ G) \\ (-0{,}0080\ E - 0{,}0080\ F + 0{,}0214\ G) \\ H \div 136 \\ I \div 136 \\ J \div 136 \end{pmatrix}$$

A soma de quadrados é dada por: $\underline{\hat{\beta}}'\mathbf{X'}\underline{\mathbf{Y}}$

$$SQ\hat{\eta}_0=\frac{1}{29}(A)^2;\quad SQ\hat{\beta}_1=\frac{1}{50}(B)^2;\quad SQ\hat{\beta}_{12}=\frac{1}{136}(H)^2\ \ etc.$$

$$SQ[\hat{\beta}_{11},\hat{\beta}_{22},\hat{\beta}_{33}]=\{[0{,}0214E-0{,}0080F-0{,}0080G]E+[-0{,}0080E+0{,}0214F-0{,}0080G]F+[-0{,}0080E- -0{,}0080F+0{,}0214G]G\}$$

Os componentes lineares e as interações são postos em prova independentemente. A soma de quadrados correspondente aos coeficientes quadráticos é avaliada englobadamente, e esses coeficientes são testados em conjunto:

$$SQ[\hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{22}, \hat{\beta}_{33}] \div 3$$

O resíduo apresenta 19 graus de liberdade.

Vimos, no trabalho inicial (4), que:

$$\hat{\eta}_0 = \hat{\beta}_0 + \frac{50}{29}(\hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22} + \hat{\beta}_{33})$$

Então:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\eta}_0 - \frac{50}{29}(\hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22} + \hat{\beta}_{33})$$

As variâncias e covariâncias dos coeficientes de regressão são as seguintes:

$$V\hat{\beta}_i = 1/50\sigma^2 \qquad \hat{V}\hat{\beta}_i = 1/50s^2 \qquad i = 1,2,3$$

$$V\hat{\beta}_{ij} = 1/136\sigma^2 \qquad \hat{V}\hat{\beta}_{ij} = 1/136s^2 \qquad i \neq j = 1,2,3$$

$$V\hat{\beta}_{ii} = 0{,}0214\sigma^2 \qquad \hat{V}\hat{\beta}_{ii} = 0{,}0214s^2 \qquad i = 1,2,3$$

$$Cov\,\hat{\beta}_{11}\hat{\beta}_{22} = -0{,}0080\ \sigma^2 \qquad \hat{Cov}\,\hat{\beta}_{11}\hat{\beta}_{22} = -0{,}0080\ s^2, \ etc.$$

Um exemplo completo com a correspondente análise da variância encontra-se no trabalho citado (4).

2.1 DUPLO CENTRAL COMPOSTO ORTOGONAL

O uso de delineamentos ortogonais leva à obtenção de uma matriz A diagonal, o que facilita a estimação dos parâmetros e a análise da variância correspondente.

O vetor $\underline{Y}$ das observações contém 29 termos; a matriz D do delineamento é semelhante à atrás considerada (constituída pela segunda, terceira e quarta colunas de X), com a diferença de se ter um valor α genérico no lugar de $\alpha = 1$ usado no delineamento anterior (tratamentos $Y_{18}, Y_{19}, \ldots, Y_{29}$).

A matriz A = X'X para esse α genérico, com os termos quadráticos corrigidos para a média, onde a correção é

c = 10 $(4 + \alpha^2) \div 29$, é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40+10\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40+10\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40+10\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 136 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 136 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 136 \end{bmatrix}$$

onde:

$$p=F(4-c)^2+F(1-c)^2+2(\alpha^2-c)(\alpha^2-c)+2(4\alpha^2-c)(4\alpha^2-c)+(T-4)c^2$$

$$q=F(4-c)^2+F(1-c)^2-4c(4\alpha^2-c)-4c(\alpha^2-c)+(T-8)c^2$$

onde $F = 2^3 = 8$ e $T = 2(3) + 2(3) + 1 = 13$

Efetuando as operações e simplificando, chega-se a que $p = q+34\ \alpha^4$ (10).

A partir da equação em q, obtém-se:

$q = 136 + 29c^2 - 80c - 20c\ \alpha^2$

Substituindo c pelo seu valor, fazendo $\alpha^2 = Z$ e lembrando que, para a matriz ficar ortogonal, deve-se ter $q = 0$, chega-se à equação $Z^2 + 8Z - 23{,}44 = 0$, cuja raiz válida é a positiva.

$Z = \alpha^2 = 2{,}2801$, de onde $\alpha = 1{,}5100$. Portanto, usando $\alpha = 1{,}5100$ em lugar de $\alpha = 1{,}00$, obter-se-á o delineamento duplo central composto ortogonal.

O vetor $\underline{Y}$ e a matriz D desse delineamento encontram-se na página 224.

A matriz $A = X'X$ é diagonal e tem os seguintes valores:

$$a_{11}=29;\ a_{22}=a_{33}=a_{44}=62{,}8010;\ a_{55}=a_{66}=a_{77}=176{,}7623;\ a_{88}=a_{99}=a_{10,10}=136.$$

A matriz A^{-1} é composta dos inversos, isto é:

$$c_{11}=a_{11}^{-1}=1/29=0{,}034483;\ c_{22}=a_{22}^{-1}=0{,}015923;\ c_{55}=a_{55}^{-1}=0{,}005657;\ c_{88}=a_{88}^{-1}=0{,}007353$$

Com a ortogonalização obtida, a análise da variância fica grandemente facilitada, sendo os coeficientes $\hat{\eta}_0$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ii}$ e $\hat{\beta}_{ij}$ estimados diretamente, com as variâncias abaixo:

$$\begin{array}{lll lll}
V\hat{\eta}_0 & = & \sigma^2/29 & \hat{V}\hat{\eta}_0 & = & s^2/29 \\
V\hat{\beta}_i & = & \sigma^2/62{,}8010 & \hat{V}\hat{\beta}_i & = & s^2/62{,}8010 \\
V\hat{\beta}_{ii} & = & \sigma^2/176{,}7623 & \hat{V}\hat{\beta}_{ii} & = & s^2/176{,}7623 \\
V\hat{\beta}_{ij} & = & \sigma^2/136 & \hat{V}\hat{\beta}_{ij} & = & s^2/136
\end{array}$$

$$Cov\,\hat{\beta}_i\hat{\beta}_j = Cov\,\hat{\beta}_i\hat{\beta}_{ii} = Cov\,\hat{\beta}_i\hat{\beta}_{ij} = Cov\,\hat{\beta}_{ii}\hat{\beta}_{ij} = Cov\,\hat{\eta}_0\hat{\beta}_i = 0\ \ etc.$$

$$
\underline{Y} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{18} \\ T_{19} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{24} \\ T_{25} \\ T_{26} \\ T_{27} \\ T_{28} \\ T_{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1,02}Y_{1,02}Y_{1,02} \\ Y_{5,02}Y_{1,02}Y_{1,02} \\ Y_{1,02}Y_{5,02}Y_{1,02} \\ Y_{5,02}Y_{5,02}Y_{1,02} \\ Y_{1,02}Y_{1,02}Y_{5,02} \\ Y_{5,02}Y_{1,02}Y_{5,02} \\ Y_{1,02}Y_{5,02}Y_{5,02} \\ Y_{5,02}Y_{5,02}Y_{5,02} \\ Y_{2,02}Y_{2,02}Y_{2,02} \\ Y_{4,02}Y_{2,02}Y_{2,02} \\ Y_{2,02}Y_{4,02}Y_{2,02} \\ Y_{4,02}Y_{4,02}Y_{2,02} \\ Y_{2,02}Y_{2,02}Y_{4,02} \\ Y_{4,02}Y_{2,02}Y_{4,02} \\ Y_{2,02}Y_{4,02}Y_{4,02} \\ Y_{4,02}Y_{4,02}Y_{4,02} \\ Y_{3,02}Y_{3,02}Y_{3,02} \\ Y_{0,00}Y_{3,02}Y_{3,02} \\ Y_{1,51}Y_{3,02}Y_{3,02} \\ Y_{4,53}Y_{3,02}Y_{3,02} \\ Y_{6,04}Y_{3,02}Y_{3,02} \\ Y_{3,02}Y_{0,00}Y_{3,02} \\ Y_{3,02}Y_{1,51}Y_{3,02} \\ Y_{3,02}Y_{4,53}Y_{3,02} \\ Y_{3,02}Y_{6,04}Y_{3,02} \\ Y_{3,02}Y_{3,02}Y_{0,00} \\ Y_{3,02}Y_{3,02}Y_{1,51} \\ Y_{3,02}Y_{3,02}Y_{4,53} \\ Y_{3,02}Y_{3,02}Y_{6,04} \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & +2 & -2 \\ -2 & +2 & -2 \\ -2 & -2 & +2 \\ +2 & -2 & -2 \\ -2 & +2 & +2 \\ +2 & +2 & +2 \\ -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3.02 & 0 & 0 \\ -1.51 & 0 & 0 \\ 1,51 & 0 & 0 \\ 3,02 & 0 & 0 \\ 0 & -3,02 & 0 \\ 0 & -1,51 & 0 \\ 0 & 1,51 & 0 \\ 0 & 3,02 & 0 \\ 0 & 0 & -3,02 \\ 0 & 0 & -1,51 \\ 0 & 0 & 1,51 \\ 0 & 0 & 3,02 \end{pmatrix}
$$

2.2 DELINEAMENTO DUPLO CENTRAL COMPOSTO COM 29 PONTOS, EM DOIS BLOCOS

O modelo completo, incluindo a partição em blocos, é o que se segue:

$$
Y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^{3} \beta_i x_{iu} + \sum_{i=1}^{3} \beta_{ii} x'^2_{iu} + \sum_{\substack{i \\ i<j}} \sum_{j} \beta_{ij} x_{iu} x_{ju} + \sum_{m=1}^{b} \delta_m (z_{mu} - \bar{z}_m) + \varepsilon_u \quad (u = 1, 2, \ldots N)
$$

$$
onde \; x'^2_{iu} = \left(x^2_{iu} - \frac{\sum x^2_{iu}}{29} \right).
$$

No caso, z_{mu} será igual a 1 quando a observação u se encontrar no bloco considerado, e zero em caso contrário; por definição, $\bar{z}_m$ é a fração do total de observações que estão no bloco m.

Para haver ortogonalidade entre os blocos e os outros componentes do modelo, deve-se ter:

$$\sum x_{iu}(z_{mu}-\bar{z}_m)=\sum x'^2_{iu}(z_{mu}-\bar{z}_m)=\sum x^2_{iu}(z_{mu}-\bar{z}_m)=\sum x_{iu}x_{ju}(z_{mu}-\bar{z}_m)=0$$

Para o delineamento proposto, são verificadas:

$$\sum x_{iu}=\sum x_{iu}x_{ju}=0$$

Se associarmos essas relações, serão duas as condições que devem ser consideradas, dentro de cada bloco, para a formação de blocos ortogonais. A primeira delas é:

$$\sum_{bl \cdot m} x_{iu}=0, (m=1,2;\ \ i,j=1,2,3;\ \ i \neq j)$$

$$\sum_{bl \cdot m} x_{iu}x_{ju}=0, (m=1,2)$$

A segunda decorre de

$$\sum x^2_{iu}(z_{mu}-\bar{z}_m)=0,\ ou:\ \sum_{u=i}^{N} x^2_{iu}z_{mu}=\bar{z}_m\sum_{u=i}^{N} x^2_{iu}$$

o que implica em que: "a contribuição de determinado bloco para a soma total do quadrado da variável x_i (a contribuição para $\sum x^2_{iu}$) é proporcional ao número de observações existentes no bloco" (**10**).

Se se colocar a parte fatorial do delineamento em um dos blocos e a parte axial com o centro, no outro, a primeira condição de ortogonalidade é verificada, sendo independente do valor de α considerado.

Para que a segunda condição se verifique, deve-se ter:

$$\frac{\sum x^2_{iu}\ (axial\ e\ centro)}{\sum x^2_{iu}\ (fatorial)}=\frac{2k+2k+1}{2^k+2^k};\ \frac{10\alpha^2}{8(1+\beta^2)}=\frac{12+1}{16}=0{,}8125.$$

Para isso, é preciso conciliar as condições de ortogonalidade da matriz ($q = 0$) com as de ortogonalidade para blocos e passar a admitir os valores α, 2α, 1 e β respectivamente como níveis para as porções axiais e fatoriais do delineamento. Resolvendo, chega-se a $\alpha = 3{,}6308$ e $\beta = 4{,}3911$.

É fácil ver que: $\dfrac{10\alpha^2}{8(1+\beta^2)}=\dfrac{12+1}{16}=0{,}8125$

O delineamento obtido possui os nove níveis seguintes: $-7{,}261$; $-4{,}391$; $-3{,}631$; $-1{,}000$; 0; $+1{,}000$; $+3{,}631$; $+4{,}391$ e $+7{,}261$.

Esses níveis, em termos de uma escala crescente a partir do valor zero, são os seguintes: 0; 2,871; 3,631; 6,262; 7,262; 8,262; 10,893; 11,653 e 14,524.

A matriz D do delineamento é composta das colunas 2, 3 e 4 da matriz X, transcrita na página 227. Devido à restrição de que a soma dos blocos deve ser nula, deve-se fazer a reparametrização $\delta_1 = -\delta_2 = \delta$: a matriz X passará a ter onze colunas em vez de doze.

A matriz A = X'X terá os seguintes componentes:

$a_{11}=29$; $a_{22}=a_{33}=a_{44}=294{,}0886$; $a_{55}=a_{66}=a_{77}=5909{,}6165$; $a_{88}=a_{99}=a_{10,10}=2982{,}0248$;
$a_{11,11}=7{,}1724$

Os termos a_{ij}, para $i \neq j$, são iguais a zero.

A matriz inversa A^{-1} tem os seguintes valores:

$a_{11}^{-1}=c_{11}=0{,}034483$; $c_{22}=c_{33}=c_{44}=0{,}003400$; $c_{55}=c_{66}=c_{77}=0{,}000169$; $c_{88}=c_{99}=c_{10,10}=0{,}000335$;
$c_{11,11}=0{,}139423$

A partir da matriz A^{-1} e do vetor $X'\underline{Y}$, calcula-se: $\hat{\underline{\beta}} = A^{-1}X'\underline{Y}$. Tem-se:

$$X'\underline{Y} = [A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \quad G \quad H \quad I \quad J \quad K]'$$

onde $A = \Sigma\Sigma\Sigma Y_{ijk}$

Considerando a correspondência entre os termos de 1 a 29 do vetor Y das observações e os valores das colunas x_1, x_2 e x_3 da matriz X, que caracterizam os níveis dos três fatores de cada uma das variáveis Y, pode-se expressar B da forma seguinte:

$$B=-7{,}262(T_{18})-4{,}391(T_1+T_3+T_5+T_7)-3{,}631(T_{19})-1{,}000(T_9+T_{11}+T_{13}+T_{15})+0{,}000(T_{17}+T_{22}+ \\ +T_{23}+T_{24}+T_{25}+T_{26}+T_{27}+T_{28}+T_{29})+1{,}000(T_{10}+T_{12}+T_{14}+T_{16})+3{,}631(T_{20})+4{,}391(T_2+T_4+ \\ +T_6+T_8)+7{,}262(T_{21})$$

$$C=-7{,}262(T_{22})-4{,}391(T_1+T_2+T_5+T_6)-3{,}631(T_{23})-1{,}000(T_9+T_{10}+T_{13}+T_{14})+0{,}000(T_{17}+T_{18}+ \\ +T_{19}+T_{20}+T_{21}+T_{26}+T_{27}+T_{28}+T_{29})+1{,}000(T_{11}+T_{12}+T_{15}+T_{16})+3{,}631(T_{24})+4{,}391(T_3+T_4+T_7+ \\ +T_8)+7{,}262(T_{25})$$

D é definido de forma correspondente.

$X =$

Tratamento	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1^2 - c$	$x_2^2 - c$	$x_3^2 - c$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$(z-\bar{z})$
T_1	1	−4,391	−4,391	−4,391	9,1399	9,1399	9,1399	19,2809	19,2809	19,2809	13/29
T_2	1	+4,391	−4,391	−4,391	9,1399	9,1399	9,1399	−19,2809	−19,2809	19,2809	13/29
T_3	1	−4,391	+4,391	−4,391	9,1399	9,1399	9,1399	−19,2809	19,2809	−19,2809	13/29
T_4	1	+4,391	+4,391	−4,391	9,1399	9,1399	9,1399	19,2809	−19,2809	−19,2809	13/29
T_5	1	−4,391	−4,391	+4,391	9,1399	9,1399	9,1399	19,2809	−19,2309	−19,2809	13/29
T_6	1	+4,391	−4,391	+4,391	9,1399	9,1399	9,1399	−19,2809	19,2809	−19,2809	13/29
T_7	1	−4,391	+4,391	+4,391	9,1399	9,1399	9,1399	−19,2809	−19,2809	19,2809	13/29
T_8	1	+4,391	+4,391	+4,391	9,1399	9,1399	9,1399	19,2809	19,2809	19,2809	13/29
T_9	1	−1	−1	−1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	1	1	1	13/29
T_{10}	1	+1	−1	−1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	−1	−1	1	13/29
T_{11}	1	−1	+1	−1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	−1	1	−1	13/29
T_{12}	1	+1	+1	−1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	+1	−1	−1	13/29
T_{13}	1	−1	−1	+1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	+1	−1	−1	13/29
T_{14}	1	+1	−1	+1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	−1	1	−1	13/29
T_{15}	1	−1	+1	+1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	−1	−1	1	13/29
T_{16}	1	+1	+1	+1	−9,1410	−9,1410	−9,1410	1	1	1	13/29
T_{17}	1	0	0	0	−10,1410	−10,1410	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{18}	1	−7,262	0	0	42,5956	−10,1410	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{19}	1	−3,631	0	0	3,0432	−10,1410	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{20}	1	+3,631	0	0	3,0432	−10,1410	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{21}	1	+7,262	0	0	42,5956	−10,1410	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{22}	1	0	−7,262	0	−10,1410	42,5956	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{23}	1	0	−3,631	0	−10,1410	3,0432	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{24}	1	0	+3,631	0	−10,1410	3,0432	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{25}	1	0	+7,262	0	−10,1410	42,5956	−10,1410	0	0	0	−16/29
T_{26}	1	0	0	−7,262	−10,1410	−10,1410	42,5956	0	0	0	−16/29
T_{27}	1	0	0	−3,631	−10,1410	−10,1410	3,0432	0	0	0	−16/29
T_{28}	1	0	0	+3,631	−10,1410	−10,1410	3,0432	0	0	0	−16/29
T_{29}	1	0	0	+7,262	−10,1410	−10,1410	42,5956	0	0	0	−16/29

$$E=-10{,}1410(T_{17}+T_{22}+\ldots+T_{29})-9{,}1410(T_9+T_{10}+\ldots+T_{16})+3{,}0432(T_{19}+T_{20})+9{,}1399(T_1+ \\ +T_2+\cdots+T_8)+42{,}5956(T_{18}+T_{21})$$

F e G são definidos de forma correspondente.

$$H=-19{,}2809(T_2+T_3+T_6+T_7)-1{,}0000(T_{10}+T_{11}+T_{14}+T_{15})+0{,}0000(T_{17}+T_{18}+T_{19}+\ldots+T_{29})+ \\ +1{,}0000(T_9+T_{12}+T_{13}+T_{16})+19{,}2809(T_1+T_4+T_5+T_8)$$

I e J são semelhantes.

$$K=\frac{13}{29}(B_1)-\frac{16}{29}(B_2)$$

onde B_1 é a soma dos 16 primeiros termos correspondentes ao bloco B_1 e, B_2, a soma dos 13 correspondentes ao bloco B_2.

Então:

$$\underline{\hat{\beta}} = A^{-1}X'\underline{Y} = \begin{pmatrix} A & \div & 29{,}0000 \\ B & \div & 294{,}0886 \\ C & \div & 294{,}0886 \\ D & \div & 294{,}0886 \\ E & \div & 5.909{,}6165 \\ F & \div & 5.909{,}6165 \\ G & \div & 5.909{,}6165 \\ H & \div & 2.982{,}0248 \\ I & \div & 2.982{,}0248 \\ J & \div & 2.982{,}0248 \\ K & \div & 7{,}1724 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{22} \\ \hat{\beta}_{33} \\ \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \\ \hat{S} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}=\hat{\eta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_3+\hat{\beta}_{11}(x_1^2-c)+\hat{\beta}_{22}(x_2^2-c)+\hat{\beta}_{33}(x_3^2-c)+\hat{\beta}_{12}x_1x_2+\hat{\beta}_{13}x_1x_3+\hat{\beta}_{23}x_2x_3$$

onde c, no câso, é igual a 10,14098. Essa é a equação que possibilitará a obtenção dos valores esperados já corrigidos para blocos.

A análise da variância é obtida da forma usual. A parte relativa a blocos pode ser estimada tanto por $\hat{S}K$ como pelo cálculo comum da soma de quadrados de blocos.

QUADRO 1. — Análise da variância relativa ao delineamento duplo central composto com 29 pontos, em dois blocos

F.V.	S.Q.	G.L.	Q.M.	F
Total	ΣY^2	29		
Média	$\hat{\eta}_0 A$	1		
N_L	$\hat{\beta}_1 B$	1	$\hat{\beta}_1 B \div 1$	
P_L	$\hat{\beta}_2 C$	1	$\hat{\beta}_2 C \div 1$	
K_L	$\hat{\beta}_3 D$	1	$\hat{\beta}_3 D \div 1$	
N_Q	$\hat{\beta}_{11} E$	1	$\hat{\beta}_{11} E \div 1$	
P_Q	$\hat{\beta}_{22} F$	1	$\hat{\beta}_{22} F \div 1$	
K_Q	$\hat{\beta}_{33} G$	1	$\hat{\beta}_{33} G \div 1$	
$N_L P_L$	$\hat{\beta}_{12} H$	1	$\hat{\beta}_{12} H \div 1$	
$N_L K_L$	$\hat{\beta}_{13} I$	1	$\hat{\beta}_{13} I \div 1$	
$P_L K_L$	$\hat{\beta}_{23} J$	1	$\hat{\beta}_{23} J \div 1$	
Blocos	$B_1^2/16 + B_2^2/13 - A^2/29$	1	$Bls \div 1$	
Resíduo	Total $-$ outros $=$ R	18	$R \div 18$	

Os testes F são feitos de cada termo em relação ao QM resíduo, sendo F procurado nas tabelas com 1 e 18 graus de liberdade.

$$V\hat{\eta}_0 = \frac{\sigma^2}{29} \qquad \hat{V}\hat{\eta}_0 = s^2/29$$

$$V\hat{\beta}_i = \frac{\sigma^2}{294{,}0886} \qquad \hat{V}\hat{\beta}_i = \frac{s^2}{294{,}0886},\ i=1,2,3$$

$$V\hat{\beta}_{ii} = \frac{\sigma^2}{5909{,}6165} \qquad \hat{V}\hat{\beta}_{ii} = \frac{s^2}{5909{,}6165},\ i=1,2,3$$

$$V\hat{\beta}_{ij} = \frac{\sigma^2}{2982{,}0248} \qquad \hat{V}\hat{\beta}_{ij} = \frac{s^2}{2982{,}0248},\ \underset{i<j}{i,j=1,2,3}$$

Para a análise econômica, deve-se ter e expressão de $\hat{Y}$ em termos dos níveis X_i originais.

$$\hat{Y}=\hat{\eta}_0+\hat{\beta}_1(X_1-7{,}262)+\hat{\beta}_2(X_2-7{,}262)+\hat{\beta}_3(X_3-7{,}262)+\hat{\beta}_{11}[(X_1-7{,}262)^2-c]+\hat{\beta}_{22}[(X_2-7{,}262)^2-c]+$$
$$+\hat{\beta}_{33}[(X_3-7{,}262)^2-c]+\hat{\beta}_{12}[(X_1-7{,}262)(X_2-7{,}262)]+\hat{\beta}_{13}[(X_1-7{,}262)(X_3-7{,}262)]+\hat{\beta}_{23}[(X_2-$$
$$-7{,}262)(X_3-7{,}262)]$$

Simplificando, chega-se a:

$$\hat{Y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1'X_1+\hat{\beta}_2'X_2+\hat{\beta}_3'X_3+\hat{\beta}_{11}X_1^2+\hat{\beta}_{22}X_2^2+\hat{\beta}_{33}X_3^2+\hat{\beta}_{12}X_1X_2+\hat{\beta}_{13}X_1X_3+\hat{\beta}_{23}X_2X_3$$

onde:

$$\hat{\beta}_0=\hat{\eta}_0-7.262(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)+42.596(\hat{\beta}_{11}+\hat{\beta}_{22}+\hat{\beta}_{33})+52.737(\hat{\beta}_{12}+\hat{\beta}_{13}+\hat{\beta}_{23})$$

$$\hat{\beta}_1'=\hat{\beta}_1-14.524\hat{\beta}_{11}-7.262(\hat{\beta}_{12}+\hat{\beta}_{13})$$

$$\hat{\beta}_2'=\hat{\beta}_2-14.524\hat{\beta}_{22}-7.262(\hat{\beta}_{12}+\hat{\beta}_{23})$$

$$\hat{\beta}_3'=\hat{\beta}_3-14.524\hat{\beta}_{33}-7.262(\hat{\beta}_{13}+\hat{\beta}_{23})$$

Exemplo — Envolvendo esse último delineamento, é apresentado um exemplo.

Os dados de produção encontram-se na página 231; estão assinalados os tratamentos com sua numeração de 1 a 29, o vetor $\underline{Y}$ das observações, com a especificação dos níveis dos tratamentos, e suas respectivas produções. São dados, na mesma página, os valores esperados para o vetor $\underline{Y}$, usando o modelo quadratico desenvolvido no trabalho. Os tratamentos 1 a 16 constituem o primeiro bloco.

Calculando na forma apresentada às páginas 226 e 228, foram obtidos os elementos do vetor $X'\underline{Y}$, como se segue:

A = ΣY = 156765,00

B = 37102,08; C = 43696,06; D = 6794,10; E = −32645,5636;

F = −71842,0342; G = 47253,5882; H = −40230,4630;

I = −14818,8660; J = 6942,4162; K = 3087,9655

Com esses valores, será calculado $\underline{\hat{\beta}} = A^{-1}X'\underline{Y}$.

$$\underline{\hat{\beta}} = A^{-1}X'\underline{Y} = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{22} \\ \hat{\beta}_{33} \\ \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \\ \hat{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5405,6897 \\ 126,1595 \\ 148,5813 \\ 23,1022 \\ -5,5241 \\ -12,1568 \\ -7,9960 \\ -13,4910 \\ -4,9694 \\ 2,3281 \\ 430,5345 \end{pmatrix}$$

A análise da variância encontra-se no quadro 2.

$$
\underline{Y} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ \\ T_{17} \\ T_{18} \\ T_{19} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{24} \\ T_{25} \\ T_{26} \\ T_{27} \\ T_{28} \\ T_{29} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} Y_{(2,871;\ 2,871;\ 2,871)} \\ Y_{(11,653;\ 2,871;\ 2,871)} \\ Y_{(2,871;\ 11,653;\ 2,871)} \\ Y_{(11,653;\ 11,653;\ 2,871)} \\ Y_{(2,871;\ 2,871;\ 11,653)} \\ Y_{(11,653;\ 2,871;\ 11,653)} \\ Y_{(2,871;\ 11,653;\ 11,653)} \\ Y_{(11,653;\ 11,653;\ 11,653)} \\ Y_{(6,262;\ 6,262;\ 6,262)} \\ Y_{(8,262;\ 6,262;\ 6,262)} \\ Y_{(6,262;\ 8,262;\ 6,262)} \\ Y_{(8,262;\ 8,262;\ 6,262)} \\ Y_{(6,262;\ 6,262;\ 8,262)} \\ Y_{(8,262;\ 6,262;\ 8,262)} \\ Y_{(6,262;\ 8,262;\ 8,262)} \\ Y_{(8,262;\ 8,262;\ 8,262)} \\ \\ Y_{(7,262;\ 7,262;\ 7,262)} \\ Y_{(0,000;\ 7,262;\ 7,262)} \\ Y_{(3,631;\ 7,262;\ 7,262)} \\ Y_{(10,893;\ 7,262;\ 7,262)} \\ Y_{(14,524;\ 7,262;\ 7,262)} \\ Y_{(7,262;\ 0,000;\ 7,262)} \\ Y_{(7,262;\ 3,631;\ 7,262)} \\ Y_{(7,262;\ 10,893;\ 7,262)} \\ Y_{(7,262;\ 14,524;\ 7,262)} \\ Y_{(7,262;\ 7,262;\ 0,000)} \\ Y_{(7,262;\ 7,262;\ 3,631)} \\ Y_{(7,262;\ 7,262;\ 10,893)} \\ Y_{(7,262;\ 7,262;\ 14,524)} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 3590 \\ 5617 \\ 5439 \\ 6226 \\ 3959 \\ 5411 \\ 5812 \\ 6434 \\ 5257 \\ 5817 \\ 5793 \\ 6144 \\ 5966 \\ 6201 \\ 5894 \\ 6019 \\ \\ 5435 \\ 4605 \\ 4484 \\ 5809 \\ 5921 \\ 3778 \\ 4702 \\ 5738 \\ 5968 \\ 5006 \\ 5113 \\ 5452 \\ 5175 \end{pmatrix} ; \quad
\hat{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} 3552,13 \\ 5371,93 \\ 5287,43 \\ 6066,76 \\ 3856,87 \\ 5293,41 \\ 5771,72 \\ 6167,79 \\ 5326,43 \\ 5615,67 \\ 5645,92 \\ 5881,19 \\ 5377,91 \\ 5647,28 \\ 5706,71 \\ 5922,11 \\ \\ 5666,08 \\ 4458,59 \\ 5135,16 \\ 6051,33 \\ 6290,93 \\ 3945,97 \\ 4966,30 \\ 6045,30 \\ 6103,97 \\ 5076,63 \\ 5476,77 \\ 5644,54 \\ 5412,17 \end{pmatrix}
$$

$B_1 = 89\ 579$

$B_2 = 67\ 186$

$A = 156\ 765$

QUADRO 2. — Análise da Variância dos Dados do Exemplo

F.V.		S.Q.	G.L.	Q.M.	F
Total	ΣY^2	862922883,00	29		
Média	$\hat{\eta}_0 A$	847422945,80	1		
N_L	$\hat{\beta}_1 B$	4680779,86	1	4680779,86	99,57**
P_L	$\hat{\beta}_2 C$	6492417,40	1	6492417,40	138,10**
K_L	$\hat{\beta}_3 D$	156958,66	1	156958,66	3,34
N_Q	$\hat{\beta}_{11} E$	180337,36	1	180337,36	3,84
P_Q	$\hat{\beta}_{22} F$	873369,24	1	873369,24	18,58**
K_Q	$\hat{\beta}_{33} G$	377839,69	1	377838,69	8,04**
$N_L P_L$	$\hat{\beta}_{12} H$	542749,18	1	542749,18	11,54**
$N_L K_L$	$\hat{\beta}_{13} I$	73640,87	1	73640,87	1,57
$P_L K_L$	$\hat{\beta}_{23} J$	16162,64	1	16162,64	0,34
Blocos		1329472,90	1	1329472,90	28,28**
Resíduo		846209,40	18	47011,63	

$$\hat{V}\hat{\beta}_i = \frac{s^2}{294,0886} = \frac{47011,63}{294,0886} = 159,8553$$

$$\hat{V}\hat{\beta}_{ii} = \frac{s^2}{5909,6165} = \frac{47011,63}{5909,6165} = 7,9551$$

$$\hat{V}\hat{\beta}_{ij} = \frac{s^2}{2982,0248} = \frac{47011,63}{2982,0248} = 15,7650$$

A equação, nas variáveis originais, vem a seguir:

$$\hat{Y} = 1298,2680 + 340,4509X_1 + 406,2116X_2 + 158,4172X_3 - 5,5241X_1^2 - 12,1568X_2^2 - 7,9960X_3^2 -$$
$$- 13,4910X_1X_2 - 4,9694X_1X_3 + 2,3281X_2X_3$$

Os valores esperados foram calculados a partir dessa equação, encontrando-se na última coluna da página 231.

3. EFICIÊNCIA DO DELINEAMENTO DUPLO CENTRAL COMPOSTO

Usando o critério de Box & Wilson (2) para a avaliação da eficiência do delineamento duplo central composto, em relação ao fatorial 3 x 3 x 3, na estimação dos coeficientes β, tem-se:

a) Delineamento duplo central composto Não Ortogonal (dcc)

$$Ef(\hat{\beta}_i)\ \left\{\frac{dcc}{3x3x3}\right\} = \frac{(\sigma^2/18)[1/(\sqrt{3/2})^2]27}{(\sigma^2/50)[1/(\sqrt{29/50})^2]29} = 1,000$$

$$Ef(\hat{\beta}_{ii})\ \left\{\frac{dcc}{3x3x3}\right\} = \frac{(\sigma^2/6)(2/3)(2/3)27}{0,0214\sigma^2[1/(\sqrt{29/50})^2][1/(\sqrt{29/50})^2]29} = 1,084$$

$$Ef(\hat{\beta}_{ij})\ \left\{\frac{dcc}{3x3x3}\right\} = \frac{(\sigma^2/12)[1/(\sqrt{3/2})^2][1/(\sqrt{3/2})^2]27}{(\sigma^2/136)[1/\sqrt{29/50})^2][1/(\sqrt{29/50})^2]29} = 1,577$$

b) Delineamento duplo central composto ortogonal (dcco)

$$Ef(\hat{\beta}_i)\left\{\frac{dcco}{3x3x3}\right\}=\frac{(\sigma^2/18)(2/3)27}{(\sigma^2/62{,}8010)(62{,}8010/29)29}=1{,}000$$

$$Ef(\hat{\beta}_{ii})\left\{\frac{dcco}{3x3x3}\right\}=\frac{(\sigma^2/6)(2/3)(2/3)27}{(\sigma^2/176{,}7623)(62{,}801/29)(62{,}801/29)29}=2{,}599$$

$$Ef(\hat{\beta}_{ij})\left\{\frac{dcco}{3x3x3}\right\}=\frac{(\sigma^2/12)(2/3)(2/3)27}{(\sigma^2/136)(62{,}8010/29)(62{,}8010/29)29}=1{,}000$$

c) Delineamento duplo central composto ortogonal, em dois blocos (dccob)

$$Ef(\hat{\beta}_i)\left\{\frac{dccob}{3x3x3}\right\}=\frac{(\sigma^2/18)(2/3)27}{(\sigma^2/294{,}0886)(294{,}0886/29)29}=1{,}000$$

$$Ef(\hat{\beta}_{ii})\left\{\frac{dccob}{3x3x3}\right\}=\frac{(\sigma^2/6)(2/3)^2 27}{(\sigma^2/5909{,}6165)(294{,}0886/29)^2 29}=3{,}963$$

$$Ef(\hat{\beta}_{ij})\left\{\frac{dccob}{3x3x3}\right\}=\frac{(\sigma^2/12)(2/3)^2 27}{(\sigma^2/2982{,}0248)(294{,}0886/29)^2 29}=1{,}000$$

4. CONCLUSÃO

Para o sucesso de programas que visem ao estudo de macronutrientes, com vistas à recomendação final e econômica das dosagens de nutrientes, é de grande importância o uso de delineamentos com um número razoável de níveis e que possibilitem uma análise econômica fácil e expedita.

O delineamento proposto para o estudo de três fatores, com cinco níveis para o não-ortogonal e com nove níveis tanto para o ortogonal como para o ortogonal dividido em dois blocos, revela propriedade altamente positiva quando comparado com o clássico 3 x 3 x 3: possibilita a estimação mais eficiente dos coeficientes quadráticos. Tais coeficientes são diretamente responsáveis pela curvatura da função; como essa curvatura é a maior responsável pela localização do ponto ótimo econômico, conclui-se que esses delineamentos são superiores ao 3 x 3 x 3 não só por possibilitar o estudo de três fatores com maior número de níveis, como por estimar os coeficientes quadráticos com variância menor que as do **3 x 3 x 3**.

DOUBLE CENTRAL COMPOSITE DESIGN WITH 29 POINTS

SUMMARY

The double central composite design with 29 points represents an extension of the central composite design and was developed for the study of three factors in more than three levels.

Essentially it is composed of two 2^3 factorials (levels 1 and B), of two stars (levels α and 2α) and of one central point.

In the present paper the origin of the design, the double central composite completely randomized not orthogonal in 5 levels (−2, −1, 0, +1 and +2), the completely randomized design, orthogonal, in nine levels (−3.02; −2.00; −1.51; −1.00; 0.00;

+1.00; +1.51; +2.00; +3.02) and the orthogonal design divided in two blocks (levels −7.262; −4.391; −3.631; −1.000; 0.000; +1.000; +3.631; +4.391 and +7.262) are shown.

One example of the late design is presented with its correspondent analysis.

According with Box and Wilson criterion, this last design is more efficient than the 3 x 3 x 3 factorial.

They can be used in fertilizer programs aiming the most efficient economical recommendation of dosages and in other areas of scientific research in which we want to evaluate the surface response equations and its extremum properties looking at the maximum response.

LITERATURA CITADA

1. ALVAREZ, R.; SEGALLA, A. L.; WUTKE, A. C. P. & FREIRE, E. S. Adubação da cana-de-açúcar. VIII — Adubação mineral em solos massapé-salmourão (1957-58). Bragantia, Campinas, 22:657-675, 1963.
2. BOX, G. E. P. & WILSON, K. B. On the experimental attainment of optimum conditions. J. R. statist. Soc., B, **13**:1-45, 1951.
3. CONAGIN, A. & JORGE, J. de P. N. Delineamentos (1/5) (5^3). Bragantia, Campinas, 36:23-58, 1977.
4. ———; ——— & VENTURINI, W. R. Delineamentos experimentais utilizáveis na experimentação de campo. In: REYNAERT, E. E., ed. La investigación de fertilidad de suelos para la producción en la zona templada. Montevideo, IICA Zona Sur, 1969. p.183-201.
5. FUZATTO, M. G.; VENTURINI, W. R. & CAVALERI, P. A. Estudo técnico-econômico da adubação do algodoeiro no Estado de São Paulo. Campinas, Instituto Agronômico, 1970. 15p. (Projeto BNDE/ANDA/CIA, 1)
6. IGUE, T.; MASCARENHAS, H. A. A. & MIYASAKA, S. Estudo comparativo dos métodos de Mitscherlich e do trinômio do segundo grau, na determinação das doses mais econômicas de fertilizantes, na adubação do feijoeiro (**Phaseolus vulgaris** L.). Campinas, Instituto Agronômico, 1971. 15p. (Projeto BNDE/ANDA/CIA, 4)
7. MALAVOLTA, E. et alii. A diagnose foliar na cana-de-açúcar: IV. Piracicaba, 1963. 47p.
8. MIRANDA, L. E. C. de & MIRANDA, L. T. de. Adubação do milho. IV — Estudo econômico de adubação do milho no Estado de São Paulo. Campinas, Instituto Agronômico, 1971. 19p. (Projeto BNDE/ANDA/CIA, 14)
9. MIRANDA, L. T. de. Resultados de experimentos de adubação e sugestões para a interpretação baseada na análise química de solo. In: Cultura e adubação do milho: São Paulo, Instituto Brasileiro de Potassa, 1966. p.451-472.
10. MYERS, R. H. Response surface methodology. Boston, Allyn and Bacon, 1971. 243p.
11. PIMENTEL GOMES, F. & CAMPOS, H. de. Resultados de ensaios de adubação. In: Cultura e adubação do milho. São Paulo, Instituto Brasileiro de Potassa, 1966. p.429-449.
12. RICHARDSON, H. L. Field experiment programmes. Outl. Agric., **1**:87-94, 1956.
13. STRAUSS, E. Experimentos de adubação na zona canavieira de Pernambuco. In: Reunião Brasileira de Ciências do Solo, 3., 1951. Anais. p.336-446.

14. TELLA, R. de; CANECCHIO FILHO, V.; ROCHA, J. L. V.; FREIRE, E. S. & IGUE, T. Experiências de adubação do amendoim. Campinas, Instituto Agronômico, 1971. 8p. (Projeto BNDE/ANDA/CIA 2)

15. VIEIRA, S.; ARRUDA, H. V. & HOFFMANN, R. Estudo comparativo de três funções na análise econométrica de experimentos de adubação. Piracicaba, Convênio ESCO-MA/ESALQ-USP, 1971. 111p.

16. VOSS, R. & PESEK, J. T. Yield of corn as affected by fertilizer rates and environmental factors. Agron. J., 59:567-572, 1967.