RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES BOOLEANAS: APLICAÇÃO A UM PROBLEMA DE DECISÃO EMPRESARIAL QUALITATIVA

Walter Del Picchia *

* Professor-adjunto do Departamento de Engenharia de Eletricidade da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Formado em engenharia eletrônica pela Escola Politécnica da USP. Livre-docente pelo Departamento de Engenharia de Eletricidade da EPUSP.

Este artigo tem dupla finalidade: a) mostrar como problemas lógicos podem ser equacionados em termos das equações booleanas; b) apresentar um processo original de resolução dessas equações, o algoritmo resto-quociente, ou algoritmo *RQ*.

O método de resolução apresentado é resultado de trabalhos desenvolvidos no Departamento de Engenharia de Eletricidade da Escola Politécnica da USP, trabalhos que deram origem a artigos enviados para publicação no exterior.[1]

Sendo este um trabalho de divulgação, o método será descrito sem excessiva preocupação de rigor; contentar-nos-emos em mostrar como as equações podem ser formuladas e resolvidas.

1. PROBLEMA LÓGICO

Nosso problema-exemplo é o seguinte:[2]

A junta de diretores de certa firma manufatureira reuniu-se para decidir sobre a política de seus futuros negócios à luz de seus objetivos. Eles discutiram as relações entre dinheiro gasto em propaganda, o preço das mercadorias manufaturadas, a percentagem das comissões dos vendedores e as possíveis mudanças para um tipo mais aperfeiçoado de seus produtos, e também os vários efeitos que suas atitudes teriam no lucro total da firma e na quantidade do produto vendido. Os objetivos da firma foram claramente definidos: a) obter grande lucro (responsabilidade assumida pelos diretores); b) vender grandes quantidades de artigos manufaturados, para levar a operação da fábrica à sua máxima capacidade possível. Todos eles concordaram nos cinco pontos seguintes:

a) se a política da empresa for ou aperfeiçoar o produto, ou cortar anúncios onerosos, ou pagar aos vendedores uma comissão mais elevada ou elevar o preço das mercadorias vendidas a varejo, com a venda de um pequeno número de artigos, em qualquer desses casos, então o lucro será pequeno;

b) se grandes somas forem gastas em propaganda, sem alteração no tipo do produto, ou se houver mudança para um tipo mais aperfeiçoado e redução na dotação para propaganda, então não haverá simultaneamente um grande volume de vendas e grandes lucros;

c) se a firma tiver grande lucro ou se seu volume de vendas for elevado, então o preço dos artigos no varejo será baixo e o gasto em propaganda elevado; ou então o preço da venda a varejo será baixo com uma pequena dotação para propaganda, e haverá uma mudança para um melhor tipo de produto sem uma baixa comissão para os vendedores;

R. Adm. Emp., Rio de Janeiro, 14(4) : 79-84, jul./ago. 1974

Resolução de equações booleanas aplicação a um problema de decisão empresarial qualitativa

d) se o preço da venda a varejo for baixo, se não houver corte na despesa para propaganda, e se houver comissões elevadas para os vendedores, ou se o preço de venda e as comissões forem baixos com uma mudança para aperfeiçoar o produto, então uma grande quantidade de artigos será vendida;

e) se houver um grande gasto em propaganda, com uma mudança para um produto aperfeiçoado, mas com o preço de venda conservado baixo e com muitos artigos vendidos, então haverá um lucro elevado.

Pede-se, com essas regras gerais como guia, qual deverá ser a política de tomadas de decisões da diretoria para se atingir os seguintes objetivos:

a) obter grande margem de lucro;

b) obter grande volume de vendas;

c) obter simultaneamente grande lucro e grande volume de vendas?

2. CÁLCULO DAS PROPOSIÇÕES E ÁLGEBRA BOOLEANA

Para equacionar nosso problema necessitamos introduzir alguns conceitos.

O exposto é um problema de cálculo das proposições e pode ser equacionado com auxílio da álgebra booleana de dois valores.

A álgebra booleana de dois valores é definida sobre um conjunto A de dois elementos e apresenta três operações $(+ \, , \cdot \, , ')$ adiante definidas. Essas operações devem obedecer certas propriedades para obtermos uma *álgebra booleana de dois valores definida sobre o conjunto* A.[3]

Notaremos os dois elementos do conjunto A com os símbolos 1 e 0. Portanto, $A = (1,0) =$ conjunto formado pelos elementos 1 e 0.

As operações $+ \, , \cdot \, , '$ sobre (1,0) obedecem às seguintes tabelas (a e b representam elementos de A, e podem tomar os valores 1 ou 0):

Tabela do +

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela do

a	b	$a \, . \, b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela do '

a	a'
0	1
1	0

Todas as possíveis combinações de 0 e 1 (valores de a e b) estão nas tabelas citadas.

No caso do cálculo das proposições, obtemos uma álgebra booleana de dois valores definindo:

$A = (V, F) =$ conjunto formado pelos elementos "proposição verdadeira" e "proposição falsa"

$V =$ proposição verdadeira

$F =$ proposição falsa.

Temos:

A operação + sobre 1,0 é a operação *ou* sobre V, F

A operação $\cdot$ sobre 1,0 é a operação *e* sobre V, F

A operação $'$ sobre 1,0 é a operação *não* sobre V, F

Desse modo, associando V com 1, F com 0, *ou* com +, *e* com $\cdot$, *não* com $'$, obtemos as seguintes versões das tabelas de $+, \cdot, '$ vistas:

Tabela do *ou*

a	b	a ou b
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Tabela do *e*

a	b	a e b
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Tabela do *não*

a	não a
F	V
V	F

Por exemplo, nestas tabelas se lê:

Se X for uma proposição falsa e Y verdadeira $(X = F$ e $Y = V)$, temos:

— a proposição composta X *ou* Y é verdadeira

— a proposição composta X *e* Y é falsa

— a proposição composta *não* X é verdadeira.

Este último caso traduz-se por: "a negação do falso é a verdade".

Utilizando os conectivos *ou, e, não* repetidamente podemos formar proposições compostas bem mais complexas, e por meio das tabelas citadas, usadas sucessivamente, podemos obter o valor (V ou F) das proposições compostas construídas.

Por conveniência de notação, em lugar de *V, F, ou, e, não,* vamos usar de agora em diante os símbolos 1,0 , + , $\cdot$, $'$, respectivamente (as duas notações são equivalentes).

Desse modo, a proposição composta "o sol é redondo, e a lua não é azul ou é amarela" se escreve: $x \cdot (y' + z)$

com: $x =$ o sol é redondo

$y =$ a lua é azul

$z =$ a lua é amarela.

Igualmente a frase "ter lucro alto ou diminuir o número de vendedores é equivalente a diminuir a produção e não gastar mais em propaganda com um aumento no número de vendedores" se escreve:

$$a + b' = c' \cdot d' \cdot b$$

com: a = ter lucro alto
b = aumentar o número de vendedores
c = aumentar a produção
d = gastar mais em propaganda.

Nesses exemplos, os valores possíveis para cada variável são só dois; supusemos, por exemplo, que só é possível aumentar ou diminuir a produção e, desse modo, "aumentar a produção" é a negação de "diminuir a produção", e vice-versa.

Apresentamos, a seguir, uma tabela de "traduções" de expressões da língua portuguesa, nas expressões correspondentes, escritas na notação vista anteriormente (x, y são proposições).

x e y x com y x mas y x embora y	$x \cdot y$
x ou y (inclusivo)	$x + y$
não x	x'
x sem y x com não y	$x \cdot y'$
nem x nem y	$x' \cdot y'$
não x mas y	$x' \cdot y$
não ambos x e y não x e y simultaneamente	$(x \cdot y)'$
x ou y (exclusivo) x diferente de y	$x \cdot y' + x' \cdot y$
x implica y se x então y y se x y sob a condição que x y é condição necessária para x x somente se y y devido a x x é condição suficiente para y y quando x	$x \rightarrow y$ $x' + y$
x é condição necessária e suficiente para y x se e somente se y x é equivalente a y	$x = y$

Nesta tabela há duas novidades que necessitam de explicação:

I) x ou y (exclusivo): em nossa linguagem temos dois tipos de *ou*, o *ou inclusivo* (ou a, ou b, ou ambos) e o *ou exclusivo* (ou a ou b, mas não ambos). Numa frase, às vezes, é difícil determinar qual dos *ou's* estamos usando; outras vezes, a determinação é feita pelo sentido. Por exemplo, na frase "o professor entrou na classe pela porta da direita ou pela porta da esquerda", o *ou* é exclusivo, pois o professor pode ter entrado pela porta da direita *ou* (exclusivamente) pela porta da esquerda. Prova-se que "x ou (exclusivo) y" é equivalente a "x e não y, ou (inclusivo) não x e y" (ou seja, $x \cdot y' + x' \cdot y$).

II) x implica y: identicamente, prova-se que "x implica y" é equivalente a "não x ou y" (ou seja $x \rightarrow y$ é equivalente a $x' + y$).

3. FUNÇÕES BOOLEANAS

Antes de resolver o problema apresentado no item 1, necessitamos de mais alguns conceitos.

Função booleana de N variáveis é uma correspondência entre cada uma das 2^N possíveis combinações de valores 0,1 das variáveis $a, b, c, \ldots n$, com um só dos valores 0 ou 1. Essa correspondência é apresentada por meio da "tabela das combinações", vista adiante.

Para $N = 3$ variáveis uma possível função de a, b, c é a função z, especificada pela tabela seguinte (as combinações abc são dispostas em ordem de 000 a 111).

Tabela de combinações

	a	b	c	$z = f(a, b, c)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

A seqüência 1 1 0 0 0 1 1 0 (que é a coluna da direita lida de baixo para cima), desde que se especifique a ordem das variáveis, define completamente a função z. Essa seqüência, junto com N (número de variáveis), e as variáveis abc, na ordem utilizada na tabela, recebe o nome de *transformada numérica*[4] e foi a criação desse conceito[5] que possibilitou a dedução do algoritmo resto-quociente que veremos adiante. Por simplicidade, toda vez que nos quisermos referir àquela seqüência proveniente da tabela da função z, notaremos "J_z". Portanto, no exemplo, $J_z = 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0$.

Um modo usual de representar uma função booleana é a notação de Caldwell, que especifica as posições dos 1's na seqüência J_z.

No exemplo dado, temos 1's nas posições 7, 6, 2, 1. Na notação de Caldwell escreveríamos:

$$z = \Sigma\,(7, 6, 2, 1)$$

Observe-se que da notação de Caldwell podemos facilmente determinar J_z e tendo-se J_z podemos determinar facilmente a notação de Caldwell da função.

Outro modo usual de representar uma função é a forma algébrica; nesse caso, a função se escreve:

$$z = a' \cdot b' \cdot c + a' \cdot b \cdot c' + a \cdot b \cdot c' + a \cdot b \cdot c =$$
$$= b \cdot c' + a \cdot b + a' \cdot b' \cdot c$$

A primeira expressão é obtida diretamente da tabela, e a segunda é deduzida da primeira por manuseio algébrico. [6]

Dando a *a, b, c* os valores da tabela de combinações, linha por linha, e efetuando as operações de acordo com as tabelas de $+$, $\cdot$, $'$, obtemos a coluna z.

Passar da notação algébrica de z para J_z chama-se "transformar z", e passar de J_z para a notação algébrica chama-se "antitransformar J_z" e há métodos próprios para as duas operações.

4. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Em primeiro lugar, vamos escrever o sistema de equações que traduz o problema proposto e transformá-lo numa só equação equivalente ao sistema.

Sejam as proposições:

A — gastar muito em propaganda
B — melhorar o tipo de produto
C — ter alto preço de venda a varejo
D — pagar altas comissões de vendas
X — ter alto lucro
Y — ter alto volume de vendas.

O leitor poderá verificar, consultando o item 2, que as cinco afirmações ("verdades") do problema se escrevem:

I) $(B + A' + D + C) \cdot Y' \rightarrow X'$

II) $A \cdot B' + A' \cdot B \rightarrow (X \cdot Y)'$

III) $X + Y \rightarrow AC' + A' \cdot B \cdot C' \cdot D'$

IV) $A \cdot C' \cdot D + B \cdot C' \cdot D' \rightarrow Y$

V) $A \cdot B \cdot C' \cdot Y \rightarrow X$

Como sabemos, "$x \rightarrow y$" (implicação) é equivalente a "$x' + y$". Como as afirmações do problema são admitidas verdadeiras (base do problema), escreveremos $x' + y = 1$. Aplicando essa igualdade às implicações citadas, por manuseio das expressões, vem:

I) $Y + A \cdot B' \cdot C' \cdot D' + X' = 1$

II) $A' \cdot B' + A \cdot B + X' + Y' = 1$

III) $X' \cdot Y' + A \cdot C' + A' \cdot B \cdot C' \cdot D' = 1$

IV) $C + A' \cdot D + B' \cdot D' + Y = 1$

V) $A' + B' + C + Y' + X = 1$

Se temos várias expressões iguais a 1, a expressão obtida pelo produto (operação $\cdot$) de todas expressões entre si, igualado a 1, é equivalente às expressões originais dadas.

Assim, chamando de *P, Q, R, S, T* às expressões à esquerda nas igualdades I, II, III, IV, V, respectivamente, obtemos:

$$P \cdot Q \cdot R \cdot S \cdot T = 1$$

Efetuando o produto obtemos uma função de *X, Y, A, B, C. D* que chamaremos de *w (X, Y, A, B, C, D)*.

Portanto: $w\,(X, Y, A, B, C, D) = P \cdot Q \cdot R \cdot S \cdot T = 1$

A função w é chamada função equivalente ao sistema e pode ser expressa na notação de Caldwell. Em geral, o produto pode ser mais facilmente efetuado com auxílio da transformada numérica (TN): obtém-se a TN de w, e a partir da mesma obtém-se a notação de Caldwell de w.

No exemplo dado, efetuando o produto obtemos, para a equação equivalente:

$$w\,(X, Y, A, B, C, D) = \Sigma\,(61, 60, 40, 25, 24, 20, 15, 14, 11, 10, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 0)$$

Os detalhes dessa multiplicação serão omitidos aqui, por não serem essenciais à continuação do artigo.

Ainda, o problema pede (ver o item 1):

a) ***X*** em função de ***A, B, C, D***

b) ***Y*** em função de ***A, B, C, D***

c) ***X · Y*** em função de ***A, B, C, D***

Em seguida veremos como se determinam os itens a), b) e c).

5. ALGORITMO *RQ*

Apresentaremos o algoritmo à medida que o aplicarmos na resolução do problema proposto.

No exemplo proposto, temos $N = 6$ variáveis e desejamos duas dessas variáveis (X e Y) em função das outras 4 (2 variáveis dependentes e 4 independentes). Chamando de j o número de variáveis dependentes, vem:

I) Dividem-se os números da notação de Caldwell de w por $2^{N-j} = 2^{6-2} = 16$, obtendo-se quocientes q e restos r:

	q	r
61	3	13
60	3	12
40	2	8
25	1	9
24	1	8
20	1	4
15	0	15
14	0	14
11	0	11
10	0	10
8	0	8
7	0	7
	0	6
5	0	5
3	0	3
2	0	2
1	0	1
0	0	0

Por exemplo, $61 \div 16 = 3$, com resto 13.

II) Ordenam-se os quocientes q de acordo com os restos r correspondentes (r vai de 0 a 2^{N-j}-1, que é igual a 15).

r	quocientes
0	0
1	0
2	0
3	0
4	1
5	0
6	0
7	0
8	0,1,2
9	1
10	0
11	0
12	3
13	3
14	0
15	0

III) Determinam-se todas as combinações de q's, tomando um só q para cada r, na ordem $r = 2^{N-j}$-1 a $r = 0$ (são as várias seqüências de números que se obtêm, lendo-se a coluna da direita da tabela anterior de baixo para cima).

a) (0 0 3 3 0 0 1 2 0 0 0 1 0 0 0 0)

b) (0 0 3 3 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0)

c) (0 0 3 3 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0)

IV) Cada solução para X, Y (variáveis dependentes) é obtida construindo, para cada combinação citada, uma matriz cujas colunas são os números da combinação dada expressos em base 2, de cima para baixo:

a) $$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0011000100000000 \\ 0011001000010000 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0011000000000000 \\ 0011001100010000 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0011000000000000 \\ 0011001000010000 \end{vmatrix}$$

Por exemplo, na solução do item a), o terceiro número é 3, o qual em base 2 é 11.

Seja a primeira solução:

$$X = 0011000100000000$$
$$Y = 0011001000010000$$

Tais seqüências são o J^X de X e o J^Y de Y (ver item 3). Antitransformando obtemos: [7]

a) $$X = A \cdot B \cdot C' + A \cdot C' \cdot D' \qquad (1)$$
$$Y = B \cdot C' \cdot D' + A \cdot C' \cdot D + A \cdot B \cdot C' \qquad (2)$$

Do mesmo modo obtemos para as outras soluções

b) $$X = A \cdot B \cdot C'$$
$$Y = AC' + B \cdot C' \cdot D' \qquad (3)$$

c) $$X = A \cdot B \cdot C'$$
$$Y = B \cdot C' \cdot D + A \cdot C' \cdot D + A \cdot B \cdot C'$$

Como o problema pede também $X \cdot Y = f(A, B, C, D)$, efetuando o produto obtemos:

$$X \cdot Y = A \cdot B \cdot C' \qquad (4)$$

Neste exemplo, as três soluções *a*, *b*, *c* de $X \cdot Y$ coincidem entre si.

6. INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Em cada solução encontrada, atribuindo às variáveis independentes A, B, C, D valores desejados e efetuando as operações $+$, $\cdot$, $'$ indicadas, obtemos os correspondentes valores de X e Y, variáveis dependentes. Por exemplo, na solução a), do item 5 para $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ e $D = 1$ obtemos:

$$X = 1 \cdot 0 \cdot (0)' + 1 \cdot (0)' \cdot (1)' = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$Y = 0 \cdot (0)' \cdot (1)' + 1 \cdot (0)' \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (0)' = 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot + 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 + 1 + 0 = 1$$

Portanto, se fizermos

$A = 1$, ou seja, gastarmos muito em propaganda

$B = 0$, ou seja, *não* melhorarmos o tipo do produto

$C = 0$, ou seja, *não* termos alto preço de venda a varejo

$D = 1$, ou seja, pagarmos altas comissões de vendas

então teremos:

$X = 0$, ou seja, não teremos alto lucro

$Y = 1$, ou seja, teremos alto volume de vendas.

Do exame das expressões de X e Y podemos deduzir os valores que devem ser atribuídos a A, B, C e D para acarretar $X = 1$, $Y = 1$, ou $X \cdot Y = 1$ ($X=1$ e $Y=1$ simultaneamente).

Temos:

De (1), $X = A \cdot B \cdot C' + A \cdot C' \cdot D'$, vemos que $A=1$, $B=1$ e $C=0$ (com D qualquer) acarretam $X=1$, ou que $A=1$, $C=0$, $D=0$ (com B qualquer), também acarretam $X=1$.

Portanto "teremos alto lucro" se "gastarmos muito em propaganda", "melhorarmos o tipo do produto" e "*não* tivermos alto preço de venda a varejo", ou se "gastarmos muito em propaganda", "*não* tivermos alto preço de venda a varejo" e "*não* pagarmos altas comissões de vendas".

Desse modo vemos que cada termo de $X = A \cdot B \cdot C' + A \cdot C' \cdot D'$ nos fornece uma alternativa para obter $X=1$, ou seja, para "ter alto lucro".

Aplicando essas conclusões a (2), $Y = B \cdot C' \cdot D' + A \cdot C' \cdot D + A \cdot B \cdot C'$, concluímos que a solução a) nos fornece três alternativas para obter $Y=1$, ou seja, "termos alto volume de vendas":

1ª alternativa: $B = 1$, $C = 0$ e $D = 0$ (com A qualquer)

2ª alternativa: $A = 1$, $C = 0$ e $D = 1$ (com B qualquer)

3ª alternativa: $A = 1$, $B = 1$ e $C = 0$ (com D qualquer).

Note-se que valores de A, B, C e D, que acarretam $X=1$ na solução a) podem não acarretar $Y=1$ na mesma solução, e vice-versa.

Se desejarmos obter $X \cdot Y = 1$ ($X=1$ e $Y=1$ simultaneamente), devemos examinar a expressão (4), $X \cdot Y = A \cdot B \cdot C'$, da qual se conclui que: "teremos alto lucro" e "alto volume de vendas" simultaneamente se "gastarmos muito em propaganda", "melhorarmos o tipo do produto" e "*não* tivermos alto preço de venda a varejo"; D pode ser qualquer, ou seja, podemos pagar ou não altas comissões de vendas, que o resultado será o mesmo.

A análise que fizemos para a solução a) pode ser repetida para as outras soluções b) e c), levando a outros valores de A, B, C e D que acarretam $X=1$, $Y=1$ ou $X \cdot Y=1$.

Note-se que cada solução, a), b) ou c), deve ser estudada isoladamente, como fizemos com a solução a). Não é permitido, por exemplo, utilizar a expressão (1) para obter X, juntamente com a expressão (3) para obter Y.

Por exemplo, $A=1$, $C=0$ e $D=0$ (com B qualquer) acarretam $X=1$ se usarmos a expressão (1). Esses mesmos valores acarretam $Y=1$, se utilizarmos a expressão (3), porém a conclusão que $A=1$, $C=0$ e $D=0$ (com B qualquer) acarretam $X=1$ e $Y=1$ é incorreta.

O algoritmo *RQ* aqui apresentado é facilmente programável em computadores, permitindo o manuseio de expressões com grande número de variáveis. Esse algoritmo já foi implementado em computador, com sucesso, fornecendo as soluções algébricas, a partir do sistema inicial fornecido também em forma algébrica. □

1 Del Picchia, W. & Martins, W. W. The numerical transform. Part I: Basis, the numerical transform. Part II: Simplification of boolean functions, the numerical transform. Part III: Resolution of boolean equations, repository system. *IEEE transactions on computers.* Números R72-78, R72-176, R72-177, submetidos aos IEEE Transactions on Computers; e Del Picchia, W. A numerical algorithm for the resolution of boolean equations. *IEEE transaction on computers.* 1974.

2 Ledley, R. S. *Digital computer and control engineering.* New York, McGraw-Hill, 1960

3 Eldon, J. Whitesitt. *Boolean algebra and its applications.* Addison-Wesley, Publ., 1961.

4 Del Picchia, W. & Martins, W. W. op. cit.

5 Martins, W. W. 1967. Escola Politécnica da USP.

6 Eldon, J. Whitesitt. op. cit.

7 Del Picchia, W. & Martins, W. W. op. cit.