Sôbre uma propriedade da equação utilizada para interpolação da Lei de Mitscherlich

IZAIAS RANGEL NOGUEIRA
Assistente Substituto de Matemática da E. S. A.
"Luiz de Queiroz"

O método dos quadrados mínimos, aplicada à equação de Mitscherlich

$$y = A \left[1 - 10^{-c\ (x + b)} \right]$$, conduz ao determinante

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \Sigma y & n & \Sigma Z^{x} \\ \Sigma xyZ^{x} & \Sigma xZ^{x} & \Sigma xZ^{2x} \\ \Sigma xZ^{x} & \Sigma Z^{x} & \Sigma Z^{2x} \end{vmatrix} = O, \text{ onde } Z = 10^{-cq}$$

sendo q constante,

como mostraram *Pimentel Gomes* e *Malavolta* (1949)

Nota-se à primeira vista a exsitência de uma raiz $Z = 1$ para aquela equação.

Nogueira (1950), salientou essa propriedade da equação (1).

Após aquêle trabalho, verificou que a raiz $Z = 1$ é tripla.

Êste fato foi notado em todos os casos pesquisados, o que nos levou a procurar prová-lo de um modo geral.

Derivando-se em relação à Z, o determinante acima e tomando-se $Z = 1$, encontra-se :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum y & n & n \\ \sum x^2 y & \sum x^2 & \sum 2x^2 \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum y & n & n \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum xy & \sum x & \sum 2x \end{vmatrix}$$

O segundo determinante é nulo. Logo

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum y & n & n \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ 0 & 0 & \sum x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} = 0$$

Derivando outra vez e tomando $Z = 1$, temos:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} \sum y & n & n \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum x(x-1)y & \sum x(x-1) & \sum 2x(2x-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum y & n & n \\ \sum x^2(x-1)y & \sum x^2(x-1) & \sum 2x^2(2x-1) \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x(x-1) \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x \\ \sum x^2 y & \sum x^2 & 2\sum x^2 \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum xy & \sum x & 2\sum x \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\begin{vmatrix} \sum y & n & n \\ \sum x^2 y & \sum x^2 & 2\sum x^2 \\ \sum xy & \sum x & 2\sum x \end{vmatrix}$$

Os determinantes 2º e 5º evidentemente são nulos. Logo temos:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} \sum y & n & 0 \\ \sum xy & \sum x & 0 \\ \sum x(x-1)y & \sum x(x-1) & \sum 2x(2x-1) - \sum x(x-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x(x-1) \\ \sum xy & \sum x & \sum x \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} +$$

$$+2\begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum x \\ \sum x^2 y & \sum x^2 & 2\sum x^2 \\ \sum y & n & n \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \sum y & n & -n \\ \sum x^2 y & \sum x^2 & 0 \\ \sum xy & \sum x & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando propriedades de determinantes, chegamos a:

$$\Delta'' = \left[\sum 2x(2x-1) - \sum x(x-1)\right]\begin{vmatrix} \sum y & n \\ \sum xy & \sum x \end{vmatrix} + \sum x(x-1)\begin{vmatrix} \sum xy & \sum x \\ \sum y & n \end{vmatrix} + 2\sum x\begin{vmatrix} \sum x^2 y & \sum x^2 \\ \sum y & n \end{vmatrix} -$$

$$-2n\begin{vmatrix} \sum x^2 y & \sum x^2 \\ \sum xy & \sum x \end{vmatrix} = 2\sum x^2\begin{vmatrix} \sum y & n \\ \sum xy & \sum x \end{vmatrix} + 2\sum x\begin{vmatrix} \sum x^2 y & \sum x^2 \\ \sum y & n \end{vmatrix} - 2n\begin{vmatrix} \sum x^2 y & \sum x^2 \\ \sum xy & \sum x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\sum x^2 & \sum x^2 y & \sum x^2 \\ 2n & \sum y & n \\ 2\sum x & \sum xy & \sum x \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, fica provada a existência daquela raiz tripla para qualquer caso.

Encontramos exemplos em que a derivada terceira não se anulou. Logo a existência de raiz igual a *1* com ordem de multiplicidade superior a três não se dá necessàriamente.

Êste fato favorece muito a resolução da equação resultante do desenvolvimento do determinante, que, em geral, é de grau elevado, pelos seguintes motivos:

1) Se a equação obtida não for divisível por $(Z-1)^3$, ela está errada.
2) Uma vez eliminada a raiz múltipla, resulta uma equação de grau inferior ao anterior (grau n—3), donde favorecer o cálculo da raiz compreendida entre *0* e *1*, que é a única que nos interessa.
3) Se a equação resultante da eliminação daquela raiz múltipla, só tiver permanências de sinal, isso indica, como sabemos da Algebra elementar, a existência sòmente de raízes negativas. Como o valor de *Z* que interessa é positivo, não precisamos continuar o cálculo, pois aquela raiz não existe.
4) A existência dessa raiz tripla veio facilitar a tabulação dos polinômios necessários à resolução da equação (1) por meio de tabelas conforme trabalho em preparo.

Como exemplo, apresentamos um trabalho por nós pesquisado, em um dos dados que nos foram gentilmente fornecidos pelo Dr. Glauco Pinto Viegas, do Instituto Agronômico de Campinas.

No ano de 43-44 em Taíuva fizeram ùma adubação fosfatada nas doses de 40, 80 e 120 kg/ha, além da testemunha.

Se tomarmos como unidade, para facilitar o cálculo, 40 kg/ha, as doses serão 0, 1, 2 e 3.

Em resumo:

	Colheita obtida, soma de 6 repetições	Médias
0	19,76	3,293
1	26,45	4,408
2	28,49	4,748
3	28,62	4,770
	Soma total	17,219

Aplicando a equação (1), chegamos à equação do 7.o grau:

$$10{,}77\,Z^7 - 1{,}73\,Z^6 - 39{,}75\,Z^5 + 30{,}71\,Z^4 - 2{,}09\,Z^3 + 19{,}29\,Z^2 - 21{,}41\,Z + 4{,}21 = 0$$

Dividindo por $(Z-1)^3$, temos:

$$(2) \quad 10{,}77\,Z^4 + 30{,}58\,Z^3 + 19{,}68\,Z^2 + 8{,}78\,Z - 4{,}21 = 0,$$

cujo valor de Z determinado pelo processo de aproximação da Álgebra Elementar é $Z = 0{,}2604$.

Com êsse valor fàcilmente determinamos os parâmetros c, b e A, da equação de Mitscherlich.

A equação obtida é: $y = 4{,}833\left[1-10^{-0{,}584359\,(x\,+\,0{,}8357)}\right]$

Note-se que a equação (2) demonstra à primeira vista a existência de uma raiz positiva, pois tem uma variação.

BIBLIOGRAFIA CITADA

PIMENTEL GOMES, Frederico e Euripedes MALAVOLTA — Considerações Matemáticas sôbre a Lei de Mitscherlich. Piracicaba, 1949.

NOGUEIRA, Izaias Rangel — A Técnica da resolução das equações Relativas à Interpolação da lei de Mitscherlich, pelo Método dos Quadrados Mínimos.

ABSTRACT

The author proves that equation,

$$\begin{vmatrix} \Sigma y & n & \Sigma Z^x \\ \Sigma xyZ^x & \Sigma xZ^x & \Sigma xZ^{2x} \\ \Sigma y & \Sigma Z^x & \Sigma Z^{2x} \end{vmatrix} = 0,$$

where $Z = 10^{-cq}$ and q is a numerical constant, used by *Pimentel Gomes* and *Malavolta* in several articles for the interpolation of Mitscherlih's equation

$$y = A\left[1-10^{-c\,(x+b)}\right]$$

by the least squares method, always has a zero of order three for $Z = 1$. Therefore, equation

$$A\,Z^m + A_1 Z^{m-1} + \dots\dots\dots\dots + A_m = 0$$

obtained from that determinant can be divided by $(Z-1)^3$.

This property provides a good test for the correctness of the computations and facilitates the solution of the equation.