Revisitando a Lógica de Dunn-Belnap

Carolina Blasio

Universidade Estadual de Campinas
Departamento de Filosofia
Campinas, Brasil
carolblasio@gmail.com

Informação sobre o artigo
CDD:115
Recebido: 05.07.2016; Revisado: 02.11.2016; Aceito: 7.11.2016
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/0100-6045.2017.V40N2.CB

Palavras-chaves / Keywords
Lógica de Dunn-Belnap / Dunn-Belnap's Logic
Relação de consequência / Consequence relation
Semânticas multivaloradas / Many-valued semantics

RESUMO
O presente artigo apresenta uma semântica baseada nas atitudes cognitivas de aceitação e rejeição por uma sociedade de agentes para lógicas inspiradas no *First Degree Entailment* ($\mathbf{E}$) de Dunn e Belnap. Diferente das situações epistêmicas originalmente usadas em $\mathbf{E}$, as atitudes cognitivas não coincidem com valores-de-verdade e parecem mais adequadas para as lógicas que pretendem considerar o conteúdo informacional de proposições "ditas verdadeiras" tanto quanto as proposições "ditas falsas" como determinantes da noção de validade das inferências. Após analisar algumas lógicas associadas à semântica proposta, introduzimos a lógica $\mathbf{E}^B$ cuja relação de consequência semântica subjacente —o B*-entailment*— é capaz de expressar diversos tipos de raciocínio em relação às atitudes cognitivas de aceitação e rejeição. Apresentamos também um cálculo de sequentes correto e completo para $\mathbf{E}^B$.

ABSTRACT
In the present work I introduce a semantics based on the cognitive attitudes of acceptation and rejection entertained by a given society of agents for logics inspired on Dunn and Belnap's 'First Degree Entailment' ($\mathbf{E}$). Distinctly from the original epistemic situation of $\mathbf{E}$, the cognitive attitudes do not coincide with truth-values and it seems more suitable for logics that intend to consider the informational content of propositions "said to be true" as well as propositions "said to be false" as determinants of the notion of logical validity. After analyzing some logics associated with the proposed semantics, we introduce the logic $\mathbf{E}^B$, whose underlying semantic entailment relation —the B-entailment— is able to express several kinds of reasoning towards the cognitive attitudes of acceptance and rejection. A correct and complete sequent calculus for $\mathbf{E}^B$ is also presented.

1. A lógica de Dunn-Belnap

Em meados da década de 1970, quando as pesquisas sobre inteligência artificial se consolidaram, surge a demanda de que um computador, além de ser capaz de responder questões usando raciocínio dedutivo, lidasse com seus dados mesmo que estes contivessem alguma inconsistência (explícita ou não) ou dados parciais.

A criação de tal raciocinador artificial hipotético inspirou a lógica *First Degree Entailment* ou lógica de Dunn-Belnap $\mathbf{E}$ [4, 2], uma lógica relevante na qual os clássicos princípio do terceiro excluído e princípio da explosão não são válidos.

A lógica $\mathbf{E}$, como veremos a seguir, possui uma semântica com quatro valores-de-verdade não clássicos que permitem, de certa forma, lidar com inconsistências e parcialidades de conteúdos informacionais. Contudo, a lógica $\mathbf{E}$ possui uma relação de consequência definida em termos da preservação do conjunto de valores-de-verdade que são atribuídos aos enunciados ditos serem verdadeiros. Esta limitação, própria da estrutura da relação de consequência tarskiana, não parece ser adequada para um raciocínio que pretende lidar com enunciados ditos verdadeiros tão bem quanto os ditos falsos, dado que não há complementaridade entre aquilo que é dito ser verdadeiro com aquilo que é dito ser falso.

A lógica de Dunn-Belnap é dada pela estrutura:

$$\mathbf{E} = \langle S, \vDash^4 \rangle$$

onde S é uma linguagem recursivamente formada por símbolos de fórmulas atômicas, pelo conectivo unário *negação* ($\neg$) e pelos conectivos lógicos binários *disjunção* ($\vee$) e *conjunção* ($\wedge$), e $\vDash^4$ é uma relação de consequência semântica.

A lógica $\mathbf{E}$ possui uma semântica com quatro valores estruturados em um birreticulado conhecido como $FOUR$. Um reticulado é uma estrutura $\langle B, \leq \rangle$ tal que os elementos do conjunto B são ordenados pela relação de ordem parcial $\leq$ e todo par $x,\ y \in B$ possui um supremo ($\sqcup$) e um ínfimo

($\sqcap$), definidos por

$$x \sqcap y = x \text{ sse } x \leq y,$$

$$x \sqcup y = x \text{ sse } y \leq x.$$

Um *birreticulado* é uma estrutura algébrica $\mathfrak{B} = \langle B, \leq_t, \leq_i, -_t \rangle$, tal que $\langle B, \leq_t \rangle$ e $\langle B, \leq_i \rangle$ são ambos reticulados, e a inversão $-_t$ é uma operação unária que satisfaz as cláusulas que seguem. Para todo $x,\ y \in B$,

$$\text{se } x \leq_t y \text{ , então } -_t y \leq_t -_t x,$$

$$\text{se } x \leq_i y \text{ , então } -_t x \leq_i -_t y,$$

$$x = -_t -_t x.$$

A semântica da lógica $\mathbf{E}$ é dada pelo birreticulado

$$FOUR = \langle \mathbf{4},\ \leq_t,\ \leq_i,\ -_t \rangle,$$

onde $\mathbf{4} = \{\text{f},\ \bot,\ \top,\ \text{t}\}$. Representamos $FOUR$ pelo diagrama de Hasse na Figura 1 abaixo.

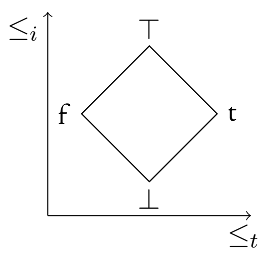

Figura 1: $FOUR$

Cada elemento de $\mathbf{4}$ corresponde a um elemento do conjunto potência $\wp(\{T, F\})$ do conjunto dos valores-de-verdade clássicos T e F. Estes quatros valores-de-verdade foram denominados por Belnap como "situações epistêmicas" nas quais o conteúdo informacional de uma dada proposição φ é representado pelo valor dado pela Tabela 1.

$\mathsf{f} := \{F\}$	se φ *dito ser somente falso*;
$\bot := \emptyset$	se φ *nem dito ser verdadeiro e nem dito ser falso*;
$\top := \{F, T\}$	se φ *dito ser verdadeiro e dito ser falso*;
$\mathsf{t} := \{T\}$	se φ *dito ser somente verdadeiro.*

Tabela 1: *Valores-de-verdade em termos de situações epistêmicas.*

Note que a leitura dos valores-de-verdade dada pela Tabela 1 resulta em situações nas quais um dado enunciado é considerado como "nem dito ser verdadeiro e nem dito ser falso", ou ainda, "dito ser verdadeiro e dito ser falso". Devemos chamar atenção também para o fato de que os valores f e t não são os valores clássicos T e F.

A ordem $\leq_t$ de $FOUR$ é, assim, conhecida como "ordem lógica" porque os elementos de $\mathbf{4}$ são ordenados do "dito ser mais falso" para o "dito ser mais verdadeiro". A "ordem da informação" $\leq_i$, por sua vez, é geralmente entendida como a ordem que parte da "falta de informação" para o "excesso de informação"[1].

Formalmente,

$$x \leq_t y \text{ sse } x^{\mathsf{t}} \subseteq y^{\mathsf{t}} \text{ e } y^{\mathsf{f}} \subseteq x^{\mathsf{f}},$$

para cada $x, y \in \mathbf{4}$, dado $a^{\mathsf{t}} = \{T\} \cap a$ (a parte verdadeira de a) e $a^{\mathsf{f}} = \{F\} \cap a$ (a parte falsa de a); e

$$x \leq_i y \text{ sse } x \subseteq y.$$

Uma valoração v^4 baseada em $FOUR$ é um homomorfismo da linguagem S para os valores-de-verdade estruturados $\mathbf{4}$, $v^4\colon S \to \mathbf{4}$. A semântica $SEM^{\mathbf{E}}$ de $\mathbf{E}$ é formada por todas as valorações baseadas em $FOUR$. Usaremos a seguinte abreviatura para a valoração de um conjunto de fórmulas

[1] Esta ordem frequentemente aparece na literatura com o nome de "ordem do conhecimento", contudo, concordamos com [6, p. 3] de que o termo "informação" é mais apropriado por ser mais neutro em relação aos conceitos de crença e de verdade.

$\Gamma \in \mathcal{S}, v^4(\Gamma) = \{v^4(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$.

O símbolo $\models^4$ representa a relação de consequência semântica de $\mathbf{E}$, definida como $\models^4 \subseteq \wp(S) \times S$, tal que, para todo $\alpha \in S$ e todo $\Gamma \subseteq S$,

$$\Gamma \models^4 \alpha \text{ sse para toda } v^4 \in SEM^{\mathbf{E}},\ \sqcap_t v^4(\Gamma) \leq_t v^4(\alpha),$$

onde $\sqcap_t v^4(\Gamma)$ é o ínfimo do conjunto de valores-de-verdades atribuídos às fórmulas de Γ em relação a ordem $\leq_t$. Podemos entender a definição de validade de $\models^4$ como: a inferência $\Gamma \models^4 \alpha$ é válida se, e somente se, α é dito ser tão ou mais verdadeiro do que todos os enunciados de Γ.

Uma maneira equivalente[2] de se definir $\models^4$ é a partir da matriz lógica $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{4}, \mathcal{F}, \mathcal{O} \rangle$, onde $\mathbf{4}$ é o conjunto de valores definido anteriormente, $\mathcal{F}$ é o conjunto de valores designados corresponde ao bifiltro (primo)[3] de $FOUR$, a saber $\mathcal{F} = \{\top, \mathrm{t}\}$, e o conjunto $\mathcal{O} = \{\sqcap_t, \sqcup_t, -_t\}$ contém as operações de $FOUR$ inversão, ínfimo e supremo da ordem $\leq_t$, que correspondem às funções de verdade de cada conectivo da linguagem S, definidas abaixo:

$$v^4(\neg\alpha) = -_t v^4(\alpha)$$

$$v^4(\alpha \wedge \beta) = v^4(\alpha) \sqcap_t v^4(\beta)$$

$$v^4(\alpha \vee \beta) = v^4(\alpha) \sqcup_t v^4(\beta)$$

A relação de consequência $\models^4$ associada a $\mathfrak{M}$ é tal que para todo $\alpha \in S$ e todo $\Gamma \subseteq S$,

$$\Gamma \models^4 \alpha \text{ sse não existe } v^4 \in SEM^{\mathbf{E}} \text{ tal que } v^4(\Gamma) \subseteq \mathcal{F} \text{ e } v^4(\alpha) \in \mathbf{4} - \mathcal{F}.$$

---

[2] A equivalência entre estas definições de relação de consequência para $\mathbf{E}$ é demonstrada em [1], Proposição 4.14.

[3] O *bifiltro* de $FOUR$ é o subconjunto $\mathfrak{F} \subset \mathbf{4}$, tal que para cada $x, y \in \mathbf{4}$,
$x \sqcap_t y \in \mathfrak{F}$ sse $x \in \mathfrak{F}$ e $y \in \mathfrak{F}$, e
$x \sqcap_i y \in \mathfrak{F}$ sse $x \in \mathfrak{F}$ e $y \in \mathfrak{F}$.
O bifiltro $\mathfrak{F}$ de $FOUR$ é dito *primo* se
$x \sqcup_t y \in \mathfrak{F}$ sse $x \in \mathfrak{F}$ ou $y \in \mathfrak{F}$, e
$x \sqcup_i y \in \mathfrak{F}$ sse $x \in \mathfrak{F}$ ou $y \in \mathfrak{F}$.

Como toda relação de consequência tarskiana, $\models^4$ respeita as propriedades de Reflexividade, Monotonicidade e Transitividade. Sejam $\alpha,\ \beta \in S$ e $\Delta,\ \Gamma \subseteq S$,

Reflexividade

- $\Delta \cup \{\alpha\} \models^4 \alpha$

Monotonicidade

- Se $\Delta \models^4 \alpha$ então $\Delta \cup \Gamma \models^4 \alpha$

Transitividade

- Se $\Delta \models^4 \alpha$ e, para todo $\beta \in \Delta,\ \Gamma \models^4 \beta$ então $\Gamma \models^4 \alpha$

Observe que, na relação de consequência $\models^4$ associada a $\mathfrak{M}$, apenas os valores que possuem T, ou seja, os valores que possuem "a verdade", são preservados das premissas para a conclusão. Isto evidencia também o fato de que apenas a ordem lógica $\leq_t$ determina a relação de consequência de $\mathbf{E}$.

Sustento contudo que uma lógica que pretende lidar com o conteúdo informacional dos enunciados, mesmo havendo inconsistência ou parcialidade, não deveria eleger somente os enunciados "ditos serem verdadeiros" em detrimento dos enunciados "ditos serem falsos" como determinantes da noção de validade das inferências. A semântica de $\mathbf{E}$ é definida de tal forma que os enunciados "ditos serem falsos" não são o complemento dos enunciados "ditos serem verdadeiros", e ambos são igualmente importantes para o raciocínio proposto pela lógica $\mathbf{E}$. Desta maneira, a noção de validade de $\mathbf{E}$ deveria também levar em consideração aquilo que é "dito ser falso".

Proponho, assim, uma leitura alternativa baseada em $FOUR$, em que as definições pautadas nos valores-de-verdade dêem lugar às atitudes cognitivas de aceitação e rejeição de um dado conteúdo informacional por uma sociedade de agentes. Isto significa eleger as atitudes cognitivas de aceitação e rejeição como objetos primitivos da semântica em detrimento dos valores-de-verdade. A seguir, apresento algumas lógicas inspiradas na lógica de Dunn-Belnap que propõem expressar as diferentes formas de raciocínio envolvendo o conteúdo informacional proposicional.

2. Atitudes cognitivas

Vimos na seção anterior que a semântica da lógica de Dunn-Belnap $\mathbf{E}$ identifica cada valor-de-verdade com uma situação epistêmica (cf. Tabela 1). Tal identificação gera leituras de enunciados que nem são ditos serem verdadeiros e nem são ditos serem falsos e enunciados que são, ao mesmo tempo, ditos serem verdadeiros e serem falsos, apesar da noção de validade ser definida em termos da preservação daquilo que é apenas dito ser verdadeiro.

Como uma alternativa, propomos uma semântica formada por uma sociedade de agentes que, ao invés de diretamente atribuir valores-de-verdade aos enunciados, apresentam atitudes cognitivas em relação ao conteúdo informacional dos enunciados consultados: as atitudes de aceitação e rejeição.

Em $\mathbf{E}$, a atitude cognitiva de um agente pode ser “aceitar” (Y), “não-aceitar” (⅄), “rejeitar” (N) ou “não-rejeitar” (И) o conteúdo informacional de um determinado enunciado φ. No caso da lógica $\mathbf{E}$, as atitudes dos agentes são de aceitar e rejeitar, mas em outros casos, as atitudes poderiam ser votar contra, dizer que é bom, gostar, etc.

Seja S a linguagem da lógica $\mathbf{E}$ e COG o conjunto de atitudes cognitivas, $COG = \{$Y, ⅄, N, И$\}$, um agente s é um homomorfismo da linguagem S em COG. Embora os valores-de-verdade deixam de ser objetos primitivos da semântica, eles podem ser definidos a partir da noção de atitudes cognitivas. Apresentamos abaixo a definição canônica dos valores-de-verdade a partir das atitudes cognitivas. Dado um agente s, $C \in COG$ e $\varphi \in S$, “$Cs{:}\varphi$” lê-se como “O agente s apresenta a atitude cognitiva C em relação a φ”. Ao consultar um agente $s \in SOC$ sobre o conteúdo informacional de $\varphi \in S$, o valor-de-verdade atribuído a φ será:

Podemos também recuperar as atitudes cognitivas a partir dos valores-de-verdade estruturados de $\mathbf{4}$ tal como mostra a Tabela 3, onde $s \in SOC$ e $\varphi \in S$:

f : *se* ⅄$s{:}\varphi$ *e* $\mathsf{N}s{:}\varphi$

$\perp$: *se* ⅄$s{:}\varphi$ *e* И$s{:}\varphi$

$\top$: *se* $\mathsf{Y}s{:}\varphi$ *e* $\mathsf{N}s{:}\varphi$

t : *se* $\mathsf{Y}s{:}\varphi$ *e* И$s{:}\varphi$

Tabela 2: *Valores-de-verdade em termos de atitudes cognitivas.*

$\mathsf{Y}s{:}\varphi \quad sse \quad T \in s(\varphi) \quad sse \quad s(\varphi) \in \{\top, \mathrm{t}\}$

⅄$s{:}\varphi \quad sse \quad T \notin s(\varphi) \quad sse \quad s(\varphi) \in \{\mathrm{f}, \perp\}$

$\mathsf{N}s{:}\varphi \quad sse \quad F \in s(\varphi) \quad sse \quad s(\varphi) \in \{\mathrm{f}, \top\}$

И$s{:}\varphi \quad sse \quad F \notin s(\varphi) \quad sse \quad s(\varphi) \in \{\perp, \mathrm{t}\}$

Tabela 3: *Atitudes cognitivas em termos de valores-de-verdade*

A um conteúdo informacional aceito por um agente pode ser atribuído um valor-de-verdade estruturado que contém T e a um conteúdo informacional rejeitado algum valor-de-verdade estruturado que contém F. A um conteúdo informacional não-aceito será atribuído um valor-de-verdade estruturado que não contém T e a um conteúdo informacional não-rejeitado um valor-de-verdade estruturado que não contém F. Note que, em termos de valores-de-verdade, a semântica cujo objeto primitivo são atitudes cognitivas é em princípio não-determinística, ou seja, pode ser atribuído mais de um valor-de-verdade a um enunciado.

Dada a atitude cognitiva que um dado agente s apresenta em relação a um átomo proposicional da lógica **E**, os enunciados compostos são interpretados pelas seguintes **cláusulas recursivas**. Seja $\varphi, \psi \in S$,

2.1 $\mathsf{Y}s{:}\neg\varphi$, se $\mathsf{N}s{:}\varphi$

2.2 $\mathsf{N}s{:}\neg\varphi$, se $\mathsf{Y}s{:}\varphi$

2.3 ⅄$s{:}\neg\varphi$, se И$s{:}\varphi$

2.4 И$s{:}\neg\varphi$, se ⅄$s{:}\varphi$

2.5 Y$s{:}\varphi \wedge \psi$, se Y$s{:}\varphi$ e Y$s{:}\psi$

2.6 N$s{:}\varphi \wedge \psi$, se N$s{:}\varphi$ ou N$s{:}\psi$

2.7 ⅄$s{:}\varphi \wedge \psi$, se ⅄$s{:}\varphi$ ou ⅄$s{:}\psi$

2.8 И$s{:}\varphi \wedge \psi$, se И$s{:}\varphi$ e И$s{:}\psi$

2.9 Y$s{:}\varphi \vee \psi$, se Y$s{:}\varphi$ ou Y$s{:}\psi$

2.10 N$s{:}\varphi \vee \psi$, se N$s{:}\varphi$ e N$s{:}\psi$

2.11 ⅄$s{:}\varphi \vee \psi$, se ⅄$s{:}\varphi$ e ⅄$s{:}\psi$

2.12 И$s{:}\varphi \vee \psi$, se И$s{:}\varphi$ ou И$s{:}\psi$

Note que a definição da atitude cognitiva de aceitação Y em termos de valores-de-verdade coincide com o bifiltro $\mathcal{F}$ de $FOUR$ (cf. Figura 1). Temos, desta forma, que $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{4}, \mathsf{Y}, \mathcal{O} \rangle$. Logo, apenas a atitude cognitiva Y e seu complemento $\mathbf{4} - \mathsf{Y} =$ ⅄ definem a noção de validade de $\mathbf{E}$. Seja $Cs{:}\Phi = \{Cs{:}\varphi |$ para todo $\varphi \in \Phi\}$, onde $C \in COG$ e $\Phi \subseteq \mathcal{S}$. A sociedade de agentes SOC de $\mathbf{E}$ é o conjunto de agentes baseados em $\mathfrak{M}$. Para todo $\alpha \in S$ e todo $\Gamma \subseteq S$:

$\Gamma \vDash^4 \alpha$ sse não existe $s \in SOC$ tal que Y$s{:}\Gamma$ e ⅄$s{:}\alpha$.

Dada a relação $\vDash^4$, dizemos que α é consequência de Γ se nenhum agente da sociedade consultada aceita todas as premissas e não-aceita a conclusão.

Considerando também a atitude cognitiva de rejeição, notamos que N em termos de valores-de-verdade é o bifiltro (primo) do birreticulado $FOUR^{-}$, formado pela ordem informacional $\leq_i$ e a inversa da ordem lógica $\leq_t^{-}$ (cf. Figura 2).

A partir de $FOUR^{-}$ podemos definir a lógica $\mathbf{E}^{-} = \langle S, \vDash^{4-} \rangle$, em que a noção de validade é definida com base nas atitudes cognitivas de rejeição N e, seu complemento, não-rejeição И. A sociedade de agentes SOC^{-} de $\mathbf{E}^{-}$

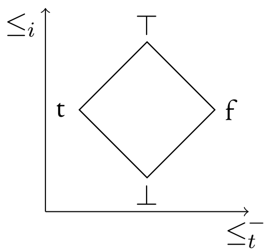

Figura 2: $FOUR^-$

é o conjunto de agentes baseados na matriz $\mathfrak{M}^- = \langle \mathbf{4}, \mathsf{N}, \mathcal{O}\rangle$. Para todo $\alpha \in S$ e todo $\Gamma \subseteq S$,

$$\Gamma \vDash^{4-} \alpha \text{ sse não existe } s \in SOC^- \text{ tal que } \text{И}s{:}\Gamma \text{ e } \mathsf{N}s{:}\alpha.$$

Dada a relação $\vDash^{4-}$, dizemos que α é consequência de Γ se não existe um agente da sociedade consultada que não-rejeita todas as premissas e rejeita a conclusão.

Como forma de efetivar que o conteúdo informacional rejeitado tenha a mesma importância que o conteúdo informacional aceito em uma lógica baseada em $FOUR$, adotaremos uma matriz semântica alternativa criada em [8] e generalizada em [10]. A chamada matriz simétrica possui dois conjuntos de valores-de-verdade designados, que correspondem às atitudes cognitivas de aceitação e de rejeição.

Seja a matriz simétrica

$$\mathfrak{M}^* = \langle \mathbf{4},\ \mathsf{Y},\ \mathsf{N},\ \mathcal{O}\rangle,$$

tal que, $\mathbf{4} = \{\mathrm{f}, \bot, \top, \mathrm{t}\}$, $\mathsf{Y} = \{\top, \mathrm{t}\}$, $\mathsf{N} = \{\mathrm{f}, \top\}$ e $\mathcal{O} = \{\sqcap_t, \sqcup_t, -_t\}$. A aceitação e a rejeição do conteúdo informacional por um determinado agente é representado em $\mathfrak{M}^*$ respectivamente por Y e N. Note que $\top \in \mathsf{Y} \cap \mathsf{N}$ e $\bot \in \mathbf{4} - \mathsf{Y} \cup \mathsf{N}$ (cf. Figura 3), logo, é possível que o conteúdo informacional de um enunciado possa ser simultaneamente aceito e rejeitado ou simultaneamente nem aceito e nem rejeitado por um agente.

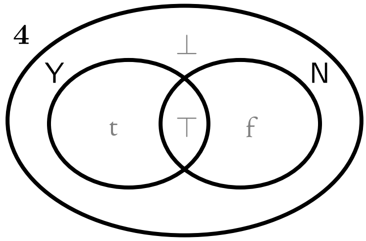

Figura 3: *Matriz Simétrica* $\mathfrak{M}^*$.

Comparada às matrizes $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}^-$, a matriz $\mathfrak{M}^*$ pode ser associada a novas definições de relações de consequência semântica, e consequentemente, a diferentes lógicas multivalentes relacionadas a $FOUR$, algumas das quais são apresentadas na próxima seção.

3. Como um computador poderia pensar

Dada a matriz $\mathfrak{M}^* = \langle \mathbf{4},\ \mathsf{Y},\ \mathsf{N},\ \mathcal{O} \rangle$, definimos uma lógica que possui duas relações de consequência tarskianas. Tal lógica segue a proposta de [9, 10] chamada lógica tarskiana k-dimensional. Uma lógica tarskiana k-dimensional possui k relações de consequência tarskianas independentes, onde $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$. Uma relação de consequência é dita independente das demais quando ela não pode ser definida a partir de outra relação de consequência presente na lógica k-dimensional.

Neste sentido, definimos a lógica 2-dimensional $\mathbf{E}^{2D}$ associada a $\mathfrak{M}^*$ como:

$$\mathbf{E}^{2D} = \langle S, \vDash^t, \vDash^f \rangle,$$

onde S é a mesma linguagem de $\mathbf{E}$, SOC^* é a sociedade de agente baseado em $\mathfrak{M}^*$ e as relações de consequência são definidas como $\vDash^t = \vDash^4$ e $\vDash^f = \vDash^{4-}$.

A lógica $\mathbf{E}^{2D}$ contém uma relação de consequência tarskiana que lida com o conteúdo informacional aceito (ou não) e outra que lida com o conteúdo informacional rejeitado (ou não). Esta lógica parece estar um passo mais próxima de nosso objetivo, mas não é claro como ela relaciona a aceitação e a rejeição dos enunciados.

As relações de consequência tarskianas, contudo, não são as únicas definições de relação de consequência que podem ser associadas à matriz $\mathfrak{M}^*$. Shramko e Wansing [9, 10] notam ainda a possibilidade de definir outras relações de consequência para lógicas associadas a matrizes com mais de um conjunto de valores designados, como é o caso da matriz simétrica:

> Aparentemente, a mera multiplicação de valores semânticos [estruturados] não apenas abre espaço para a definição de várias relações de consequência, como também permite a definição de relações semânticas que diferem em importantes aspectos da noção familiar de consequência semântica (cf. [10, p. 208], tradução livre).

Uma das definições de relação de consequência semântica que pode ser associada a $\mathfrak{M}^*$ é o *q-entailment* —q de *quase*—, proposto por Malinowski juntamente com a q-matriz [8]. O raciocínio dado pelo *q-entailment* está relacionado com o raciocínio por hipóteses, amplamente adotado nas ciências empíricas. Um inferência do *q-entailment* é válida quando se todas as premissas forem *não-rejeitadas*, a conclusão é *aceita*, e, caso a conclusão seja não-aceita, alguma das premissas deve ser rejeitada. Para todo todo $\Gamma \subseteq S$ e $\alpha \in S$,

$$\Gamma \vDash^q \alpha \text{ sse não existe um agente } s \in SOC^* \text{ tal que } \text{И}s{:}\Gamma \text{ e } \text{⅄}s{:}\alpha.$$

Dentre as propriedades da noção tarskiana de relação de consequência, a Reflexividade não é garantida pelo *q-entailment*, pois uma informação pode ser não-aceita e não-rejeitada pelos agentes de uma dada sociedade.

O q-entailment associada a $\mathfrak{M}^*$ também não respeita a propriedade de Transitividade[4]. Com efeito, suponha que exista um agente s da sociedade, tal que $\text{И}s{:}\Gamma$, $\mathsf{N}s{:}\Delta$ e $\text{⅄}s{:}\alpha$. Temos que $\Gamma \vDash^q \delta$, para todo $\delta \in \Delta$ e $\Delta \vDash^q \alpha$. Como existe um agente s que não-rejeita o conteúdo informacional das

[4] Originalmente o *q-entailment* é uma relação transitiva, mas não reflexiva, pois é baseado em uma matriz semântica onde o conjunto de valores aceitos e o conjunto de valores rejeitados são disjuntos ($\mathsf{Y} \cap \mathsf{N} = \emptyset$).

proposições de Γ e não-aceita o conteúdo informacional de α, por definição, temos que $\Gamma \not\models^q \alpha$.

Outra relação de consequência não-tarskiana possível de ser definida com base em $\mathfrak{M}^*$ é o *p-entailment* —p de *plausible*— cf. [7]. O raciocínio expresso pelo *p-entailment* permite que haja um decréscimo de certeza a partir das premissas para a conclusão. Uma inferência na forma de um *p-entailment* é válida quando, sendo as premissas aceitas, a conclusão não é rejeitada. Para todo $\Gamma \subseteq S$ e todo $\alpha \in S$,

$$\Gamma \models^p \alpha \text{ sse não existe um agente } s \in SOC^*, \text{ tal que } \mathsf{Y}s{:}\Gamma \text{ e } \mathsf{N}s{:}\alpha.$$

O *p-entailment* associada a $\mathfrak{M}^*$ não respeita as propriedades de Reflexividade e Transitividade. A Reflexividade falha considerando uma situação em que α é aceito e rejeitado por um agente de uma dada sociedade[5].

Assuma que $\Gamma \models^p \delta$ para todo $\delta \in \Delta$ e assuma também que $\Delta \models^p \alpha$. Suponha que exista um agente $s \in SOC^*$ tal que $\mathsf{Y}s{:}\Gamma$, $\curlywedge s{:}\Delta$ e $\mathsf{N}s{:}\alpha$. Então, $\Gamma \not\models^p \alpha$, pois s aceita o conteúdo informacional das proposições de Γ e rejeita o conteúdo informacional das proposições de α.

Considerando as relações de consequência semântica *q*- e *p-entailment*, definimos a lógica $\mathbf{E}^4$ baseada em $\mathfrak{M}^*$ com quatro relações de consequência semântica, de acordo com [9, 10]:

$$\mathbf{E}^4 = \langle S, \models^t, \models^f, \models^q, \models^p \rangle.$$

De acordo com Shramko e Wansing ([9], p. 140) estas quatro relações de consequência podem ser representadas em um birreticulado tais como os valores-de-verdade de $\mathbf{4}$. Esta estrutura de relações de consequência semântica levam os autores a supor, sem entrar em muitos detalhes, que cada uma das relação de consequência parecem representar um valor-de-verdade de $\mathbf{4}$. Tal ideia, contudo, é problematizada pelos próprios autores, uma vez que as quatro relações de consequência não são independentes e podem ser reduzi-

[5] Originalmente o *p-entailment* é reflexivo, mas não transitivo, pois é baseado em um matriz semântica cujos valores-de-verdade pertencem ao conjuntos de valores aceitos ou ao conjunto de valores rejeitados ($\mathsf{Y} \cup \mathsf{N} = \mathcal{V}$).

das a apenas duas, de acordo com o seguinte resultado:

Proposição 3.1 ([9], pp. 137-8). *Dada a matriz simétrica* $\mathfrak{M}^*$*, se introduzirmos em sua estrutura as quatro relações de consequência semântica definidas anteriormente, temos que,* $\models^t\ =\ \models^f$ *e* $\models^q\ =\ \models^p$*. E ainda,* $\models^t$ *(ou* $\models^f$*)* $\neq\ \models^p$ *(ou* $\models^q$*).*

Demonstração. O resultado $\models^t\ =\ \models^f$ é demonstrado em [5, Proposição 4]. Em termos de uma sociedade de agentes, é definido para cada agente s um agente s^* tal que И$s^*{:}\varphi$ sse Y$s{:}\varphi$; Y$s^*{:}\varphi$ sse И$s{:}\varphi$; ⅄$s^*{:}\varphi$ sse N$s{:}\varphi$; e N$s^*{:}\varphi$ sse ⅄$s{:}\varphi$. Assuma que $\Gamma \models^t \psi$ e considere um agente s tal que N$s{:}\psi$. Então, ⅄$s^*{:}\psi$. Desta maneira, para todo $\gamma \in \Gamma$ ⅄$s^*{:}\gamma$ obtemos ⅄$s^*{:}\Gamma$, e assim, N$s{:}\Gamma$, desta forma, $\Gamma \models^f \psi$. A demonstração da recíproca é similar.

O resultado $\models^q\ =\ \models^p$ demonstrado em [9, Proposição 1] se verifica da seguinte maneira:

$\models^p \subseteq \models^q$. Suponha que $\Delta \not\models^q \alpha$. Por definição, existe um agente s tal que ⅄$s{:}\Delta$ e И$s{:}\alpha$. Queremos mostrar que $\Delta \not\models^p \alpha$, isto é, que existe um agente s' tal que Y$s'{:}\Delta$ e N$s'{:}\alpha$. Tome $s' = s^*$. Note que Y$s^*{:}\Delta$ e N$s^*{:}\alpha$. Logo, $\Delta \not\models^p \alpha$.

$\models^q \subseteq \models^p$. Suponha que $\Delta \not\models^p \alpha$. Por definição, existe um agente s tal que Y$s{:}\Delta$ e N$s{:}\alpha$. Queremos mostrar que $\Delta \not\models^q \alpha$, isto é, que existe um agente s', tal que ⅄$s'{:}\Delta$ e И$s'{:}\alpha$. Tome $s' = s^*$. Note que И$s^*{:}\Delta$ e ⅄$s^*{:}\alpha$. Logo, $\Delta \not\models^q \alpha$

A definição de $\models^q$ (ou, igualmente de $\models^p$) não coincide com $\models^t$ (ou, igualmente, com $\models^f$) quando estas estão associadas a $\mathfrak{M}^*$, pois a primeira não é tarskiana, pois não é reflexiva nem transitiva e a última é. □

Uma lógica que pretende lidar com o conteúdo informacional, mesmo havendo inconsistência ou parcialidade, não deveria eleger somente os enunciados "ditos serem verdadeiros" em detrimento dos enunciados "ditos serem falsos" como determinantes da noção de validade de uma inferência. Além do raciocínio que se baseia na aceitação, diferentes tipos de raciocínio podem emergir a partir de enunciados aceitos e rejeitados, como o raciocínio por hipóteses expresso pelo *q-entailment*, o raciocínio pragmático do *p-entailment* e o raciocínio baseado na preservação daquilo que não é rejeitado.

O primeiro passo dado para definir uma lógica que lida com conteúdos informacional foi mudar algumas definições na noção de consequência. Ao invés de situações epistêmicas, que coincidem com valores-de-verdade, como objetos primitivos que definem as inferências, damos lugar às atitudes cognitivas de aceitação e rejeição de um dado conteúdo informacional por agentes. Seguindo este caminho, adotamos a matriz simétrica que possibilita novas expressões do raciocínio lógico, incluindo aqueles que dão origem a noções de consequência não-tarskianas.

A matriz $\mathfrak{M}^*$ permite a definição de relações de consequência semântica não só em termos da preservação da aceitação ou rejeição do conteúdo informacional dos enunciados —característica das relações de consequência tarskianas—, mas também em termos da interação entre as atitudes cognitivas de aceitação e rejeição do conteúdo informacional dos enunciados.

Apresentamos, a seguir, uma lógica cuja relação de consequência semântica associada, o *B-entailment*, consegue efetivamente expressar os diversos tipos de raciocínio envolvendo conteúdos informacionais aceitos e rejeitados. Esta relação de consequência generaliza em uma única estrutura as relações de consequência $\vDash_t$, $\vDash_f$, $\vDash_q$ e $\vDash_p$.

4. A lógica $\mathbf{E}^B$

Dada a semântica baseada em uma sociedade de agentes que possuem atitudes cognitivas de aceitação ou rejeição de um dado conteúdo informacional dos enunciados consultados, adotaremos uma relação de consequência semântica, chamada *B-entailment*, para definir a lógica $\mathbf{E}^B$. A definição de *B-entailment* é capaz de cobrir todos aspectos relativos a aceitação e rejeição, incluindo, em particular, os raciocínios expressos pelas quatro noções de consequência já definidas anteriormente de forma a não confundir $\vDash^t$ com $\vDash^f$ e $\vDash^q$ com $\vDash^p$. Chamamos a lógica associada a um *B-entailment* de *B*-lógica.

Seja $\mathbf{E}^B$ a *B*-lógica

$$\mathbf{E}^B = \langle \mathcal{S}, \text{=}|\text{=} \rangle$$

tal que $\mathcal{S}$ é a mesma linguagem de $\mathbf{E}$ e $\text{=}|\text{=} \subseteq \wp(\mathcal{S})^4$ um *B-entailment* tal que, dado um conjunto de agentes SOC^* baseado na matriz $\mathfrak{M}^*$, para todo $\Gamma, \Delta, \Phi, \Psi \subseteq \mathcal{S}$,

$$\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi} \text{ sse não existe } s \in SOC^* \text{ tal que } \mathsf{Y}s{:}\Gamma \text{ e } \text{⅄}s{:}\Delta \text{ e } \mathsf{N}s{:}\Phi \text{ e } \text{И}s{:}\Psi.$$

isto é, uma inferência $\frac{\Psi}{\Gamma}|\frac{\Delta}{\Phi}$ de $\mathbf{E}^B$ é válida se, não existe um agente $s \in SOC^*$ tal que s aceita todas as sentenças de Γ, não-aceita todas as sentenças de Δ, rejeita todas as sentenças de Φ e não-rejeita todas as sentenças de Ψ.

Uma inferência na forma do *B-entailment* é inválida quando,

$$\frac{\Psi}{\Gamma}\not\Big|\frac{\Delta}{\Phi} \text{ sse existe } s \in SOC^* \text{ tal que } \mathsf{Y}s{:}\Gamma \text{ e } \text{⅄}s{:}\Delta \text{ e } \mathsf{N}s{:}\Phi \text{ e } \text{И}s{:}\Psi.$$

O *B-entailment* é capaz de expressar diferentes tipos de raciocínio em relação à aceitação e à rejeição tais como os dados pelas relações de consequência $\vDash_t$, $\vDash_f$, $\vDash_q$ e $\vDash_p$, como mostra a Tabela 4 a seguir. Seja $\Gamma, \Psi \subseteq S$ e $\varphi, \delta \in S$,

$\Gamma \vDash^t \delta$	sse	não existe um agente s tal que $\mathsf{Y}_s{:}\Gamma$ e $\text{⅄}_s{:}\delta$	sse	$\frac{}{\Gamma}\big|\frac{\delta}{}$
$\Psi \vDash^f \varphi$	sse	não existe um agente s tal que $\text{И}_s{:}\Psi$ e $\mathsf{N}_s{:}\varphi$	sse	$\frac{\Psi}{}\big|\frac{}{\varphi}$
$\Psi \vDash^q \delta$	sse	não existe um agente s tal que $\text{И}_s{:}\Psi$ e $\text{⅄}_s{:}\delta$	sse	$\frac{\Psi}{}\big|\frac{\delta}{}$
$\Gamma \vDash^p \varphi$	sse	não existe um agente s tal que $\mathsf{Y}_s{:}\Gamma$ e $\mathsf{N}_s{:}\varphi$	sse	$\frac{}{\Gamma}\big|\frac{}{\varphi}$

Tabela 4: Alguns tipos de raciocínio expressáveis com o uso do *B-entailment*.

Embora o *B-entailment* [6] não seja uma relação de consequência tarskiana, suas duas dimensões nos permitem observar propriedades relacionadas a Reflexividade, Monotonicidade e Transitividade.

[6] [3] define uma relação de consequência similar ao *B-entailment* denominada *biconsequence*.

Proposição 4.1. *Para todo* $\alpha \in \mathcal{S}$ *e* $\Gamma, \Delta, \Phi, \Psi,\ \Gamma', \Delta', \Phi', \Psi' \subseteq \mathcal{S}$*, o* B-entailment *respeita as seguintes propriedades:*

B-reflexividades

$$(t)\quad \frac{}{\alpha}\Big|\frac{\alpha}{}$$
$$(f)\quad \frac{\alpha}{}\Big|\frac{}{\alpha}$$

B-monotonicidade

$$\textit{Se } \frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}\textit{, então } \frac{\Psi,\Psi'}{\Gamma,\Gamma'}\Big|\frac{\Delta,\Delta'}{\Phi,\Phi'}$$

B-transitividades

$$(t)\quad \textit{Se } \frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi} \textit{ e } \frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}\textit{, então } \frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}$$
$$(f)\quad \textit{Se } \frac{\alpha,\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi} \textit{ e } \frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}\textit{, então } \frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}$$

Demonstração. B-reflexividade (t). Suponha que $\frac{}{\alpha}\nmid\frac{\alpha}{}$. Então existe um $s \in SOC^*$ tal que $\mathsf{Y}s{:}\alpha$ e $\text{⅄}s{:}\alpha$. Isto significa que $s(\alpha) \in \mathsf{Y} \cap \text{⅄} = \emptyset$, o que é um absurdo.

B-reflexividade (f). Suponha que $\frac{\alpha}{}\nmid\frac{}{\alpha}$. Então existe um $s \in SOC^*$ tal que $\text{И}s{:}\alpha$ e $\mathsf{N}s{:}\alpha$. Isto significa que $s(\alpha) \in \text{И} \cap \mathsf{N} = \emptyset$, o que é um absurdo.

B-monotonicidade. Suponha, por contraposição, que $\frac{\Psi',\Psi''}{\Gamma',\Gamma''}\nmid\frac{\Delta',\Delta''}{\Phi',\Phi''}$. Então, existe um $s \in SOC^*$ tal que $\mathsf{Y}s{:}\Gamma'$, $\mathsf{Y}s{:}\Gamma''$, $\text{⅄}s{:}\Delta'$, $\text{⅄}s{:}\Delta''$, $\mathsf{N}s{:}\Phi'$, $\mathsf{N}s{:}\Phi''$, $\text{И}s{:}\Psi'$ e $\text{И}s{:}\Psi''$. Note que s é tal que $\mathsf{Y}s{:}\Gamma'$, $\text{⅄}s{:}\Delta'$, $\mathsf{N}s{:}\Phi'$ e $\text{И}s{:}\Psi'$. Logo, $\frac{\Psi'}{\Gamma'}\nmid\frac{\Delta'}{\Phi'}$.

B-transitividade (t). Seja $\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}$ e $\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}$. Então, não existe um agente $s \in SOC^*$ tal que $\mathsf{Y}s{:}\Gamma$, $\mathsf{Y}s{:}\alpha$, $\text{⅄}s{:}\Delta$, $\mathsf{N}s{:}\Phi$, $\text{И}s{:}\Psi$. Também não existe um agente $s \in SOC^*$ tal que $\mathsf{Y}s{:}\Gamma$, $\text{⅄}s{:}\Delta$, $\text{⅄}s{:}\alpha$, $\mathsf{N}s{:}\Phi$, $\text{И}s{:}\Psi$. Logo, temos que não há $s \in SOC^*$, tal que $\mathsf{Y}s{:}\Gamma$, $\text{⅄}s{:}\Delta$, $\mathsf{N}s{:}\Phi$, $\text{И}s{:}\Psi$, e desta maneira $\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}$.

B-transitividade (f). A demonstração é semelhante a da B-transitividade (t). □

Os dois aspectos da Reflexividade válidos em $\mathbf{E}^B$ correspondem às formas de raciocínio das relações de consequência tarskiana $\models^t$ e $\models^f$. Por outro lado há outras formas não válidas do *B-entailment* que expressam outros aspectos da Reflexividade como $\frac{\quad}{\alpha}\Big|\frac{\quad}{\alpha}$ e $\frac{\alpha}{\quad}\Big|\frac{\alpha}{\quad}$.

Proposição 4.2. *1.* $\frac{\quad}{\alpha}\not\mid\frac{\quad}{\alpha}$

2. $\frac{\alpha}{\quad}\not\mid\frac{\alpha}{\quad}$

Demonstração. 1. Suponha que $s(\alpha) = \top$. Então, existe $s \in SOC^*$ tal que ⅄s:α e Иs:α. Logo, $\frac{\quad}{\alpha}\not\mid\frac{\quad}{\alpha}$.

2. Suponha, agora que $s(\alpha) = \bot$. Então, existe $s \in SOC^*$ tal que Ys:α e Ns:α. Logo, $\frac{\alpha}{\quad}\not\mid\frac{\alpha}{\quad}$. □

Os aspectos da Reflexividade não válidos coincidem com as formas do $\models^q$ e do $\models^p$ em que a Reflexividade também não é valida quando associadas à matriz $\mathfrak{B}^{\mathbf{E}}$. Além disso, quando $\frac{\quad}{\alpha}\Big|\frac{\quad}{\alpha}$ é válido, a semântica "perde" o valor-de-verdade $\top$ e quando $\frac{\alpha}{\quad}\Big|\frac{\alpha}{\quad}$ é válido, a semântica "perde" o valor-de-verdade $\bot$.

Vejamos agora alguns exemplos de inferências válidas e inválidas de $\mathbf{E}$ comparando-os com $\mathbf{E}^B$.

Introdução da Conjunção: $\alpha,\ \beta \models^4 \alpha \wedge \beta$

Neste caso, há oito maneiras de expressar a introdução da conjunção usando o *B-entailment*, mas somente $\frac{\quad}{\alpha,\ \beta}\Big|\frac{\alpha\wedge\beta}{\quad}$ e $\frac{\alpha,\ \beta}{\quad}\Big|\frac{\quad}{\alpha\wedge\beta}$ são válidas. Estas inferências expressam, respectivamente, raciocínios das relações de consequência padrão $\models^t$ e $\models^f$ (cf. Tabela 4).

Não são válidas em $\mathbf{E}^B$, por exemplo, as seguintes formas:

$\frac{\alpha,\ \beta}{\quad}\Big|\frac{\alpha\wedge\beta}{\quad}$. Considere um agente $s' \in SOC^*$ tal que ⅄s':α, Иs':α e Иs':β (isto é, $s'(\alpha) = \top$ e $s'(\beta) \in \{\top, \mathrm{t}\}$). A inferência é inválida pois Иs':α e Иs':β e ⅄s':$\alpha \wedge \beta$ (pela cláusula recursiva 2.7).

$\frac{\alpha}{\beta}\Big|\frac{\alpha\wedge\beta}{\quad}$. Considere um agente $s'' \in SOC^*$ tal que ⅄s'':α e Иs'':α (isto é, $s''(\alpha) = \bot$) e Ys'':β (isto é $s''(\beta) \in \{\top, \mathrm{t}\}$). A inferência é inválida pois Ys'':β, Иs'':α e ⅄s'':$\alpha \wedge \beta$ (pela cláusula 2.7).

Contramodelos para $\frac{\ }{\alpha,\beta}\nmid\frac{\ }{\alpha\wedge\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}\nmid\frac{\ }{\alpha\wedge\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}\nmid\frac{\ }{\alpha\wedge\beta}$ e $\frac{\beta}{\alpha}\nmid\frac{\alpha\wedge\beta}{\ }$ podem ser definidos de forma similar.

Princípio de explosão: $\alpha \wedge \neg\alpha \not\models^4 \beta$

O princípio de explosão é inválido em qualquer forma do B-*entailment*: $\frac{\ }{\alpha\wedge\neg\alpha}\nmid\frac{\beta}{\ }$, $\frac{\alpha\wedge\neg\alpha}{\ }\nmid\frac{\ }{\beta}$, $\frac{\alpha\wedge\neg\alpha}{\ }\nmid\frac{\beta}{\ }$ e $\frac{\ }{\alpha\wedge\neg\alpha}\nmid\frac{\ }{\beta}$. Mostraremos um contramodelo para $\frac{\ }{\alpha\wedge\neg\alpha}\mid\frac{\beta}{\ }$. Considere um agente s, tal que $\mathsf{Y}s{:}\alpha$, $\mathsf{N}s{:}\alpha$ (isto é, $s(\alpha) = \top$) e $\text{⅄}s{:}\beta$. Pela cláusula 2.1, $\mathsf{Y}s{:}\alpha$ e $\mathsf{Y}s{:}\neg\alpha$ e pela cláusula 2.5, $\mathsf{Y}s{:}\alpha \wedge \neg\alpha$. Assim, existe um agente s, tal que, $\mathsf{Y}s{:}\alpha \wedge \neg\alpha$ e $\text{⅄}s{:}\beta$. Logo, $\frac{\ }{\alpha\wedge\neg\alpha}\nmid\frac{\beta}{\ }$. Note que o princípio de explosão ser inválido tem a ver com o fato de $\mathbf{E}^B$ ser uma lógica relevante.

Princípio do terceiro excluído: $\beta \not\models^4 \neg\alpha \vee \alpha$

O princípio do terceiro excluído também é sempre inválido na forma do B-*entailment*: $\frac{\ }{\beta}\nmid\frac{\neg\alpha\vee\alpha}{\ }$, $\frac{\beta}{\ }\nmid\frac{\ }{\neg\alpha\vee\alpha}$, $\frac{\beta}{\ }\nmid\frac{\neg\alpha\vee\alpha}{\ }$ e $\frac{\ }{\beta}\nmid\frac{\ }{\neg\alpha\vee\alpha}$. Mostraremos um contramodelo para $\frac{\beta}{\ }\mid\frac{\neg\alpha\vee\alpha}{\ }$. Considere um agente s, tal que $\text{⅄}s{:}\alpha$ e $\text{И}s{:}\alpha$ (ou seja, $s(\alpha) = \bot$). Pela cláusula 2.3, $\text{⅄}s{:}\alpha$ e $\text{⅄}s{:}\neg\alpha$, e pela cláusula 2.6 $\text{⅄}s{:}\neg\alpha \vee \alpha$. Assim, existe um agente s, tal que, $\text{И}s{:}\beta$ e $\text{⅄}s{:}\neg\alpha \vee \alpha$. Logo, $\frac{\beta}{\ }\nmid\frac{\neg\alpha\vee\alpha}{\ }$. Note que o princípio do terceiro excluído ser inválido tem a ver com o fato de $\mathbf{E}^B$ ser uma lógica relevante.

A seguir propomos um cálculo de sequentes e demonstraremos os resultados de caracterização de $\mathbf{E}^B$.

Cálculo de sequentes para $\mathbf{E}^B$

Denominamos B-sequentes as expressões da forma $\frac{\Psi}{\Gamma}\mid\frac{\Delta}{\Phi}$ em que $\text{-}\mid\text{-}$ é um símbolo de sequente com quatro posições e $\Gamma, \Psi, \Delta, \Phi \subseteq \mathcal{S}$ são conjuntos finitos de fórmulas da linguagem. Seja $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, n \in \mathbb{N}$ e $\bigvee Cs{:}\Lambda$ a abreviatura para "o agente s apresenta a atitude cognitiva C em relação a λ_1 ou ... ou a λ_n". Para todo $s \in SOC^*$, o significado do B-sequente $\frac{\Psi}{\Gamma}\mid\frac{\Delta}{\Phi}$ é dado por:

$$\bigvee \mathsf{Y}s{:}\Gamma \text{ ou } \bigvee \text{⅄}s{:}\Delta \text{ ou } \bigvee \mathsf{N}s{:}\Phi \text{ ou } \bigvee \text{И}s{:}\Psi.$$

Para toda fórmula atômica $\alpha \in \mathcal{S}$ e quaisquer conjuntos finitos de fórmulas $\Gamma, \Delta, \Phi, \Psi, \Gamma', \Delta', \Phi', \Psi' \subseteq \mathcal{S}$, o sistema de B-sequentes para $\mathbf{E}^B$ possui as seguintes regras:

Regras Estruturais:

B-sequentes iniciais

$$\frac{}{\left.\frac{}{\alpha}\right|\frac{\alpha}{}}\ in_{\mathsf{t}} \qquad \frac{}{\left.\frac{\alpha}{}\right|\frac{}{\alpha}}\ in_{\mathsf{f}}$$

B-enfraquecimento

$$\frac{\left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi}}{\left.\frac{\Psi',\Psi}{\Gamma',\Gamma}\right|\frac{\Delta,\Delta'}{\Phi,\Phi'}}\ weak$$

B-cortes

$$\frac{\left.\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi} \qquad \left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}}{\left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi}}\ cut_{\mathsf{t}} \qquad \frac{\left.\frac{\alpha,\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi} \qquad \left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}}{\left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi}}\ cut_{\mathsf{f}}$$

Regras Lógicas:

Conjunção

$$\frac{\left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha} \qquad \left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi,\beta}}{\left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha\wedge\beta}} \Rightarrow_{\mathsf{f}} \wedge \qquad \frac{\left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi} \qquad \left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta,\beta}{\Phi}}{\left.\frac{\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta,\alpha\wedge\beta}{\Phi}} \Rightarrow_{\mathsf{t}} \wedge$$

$$\frac{\left.\frac{\alpha,\beta,\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi}}{\left.\frac{\alpha\wedge\beta,\Psi}{\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \wedge \Rightarrow_{\mathsf{f}} \qquad \frac{\left.\frac{\Psi}{\alpha,\beta,\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi}}{\left.\frac{\Psi}{\alpha\wedge\beta,\Gamma}\right|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \wedge \Rightarrow_{\mathsf{t}}$$

Disjunção

$$\dfrac{\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi} \qquad \frac{\Psi}{\beta,\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}{\frac{\Psi}{\alpha\vee\beta,\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \vee\Rightarrow_{\mathsf{t}} \qquad\qquad \dfrac{\frac{\alpha,\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi} \qquad \frac{\beta,\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}{\frac{\alpha\vee\beta,\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \vee\Rightarrow_{\mathsf{f}}$$

$$\dfrac{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta,\alpha,\beta}{\Phi}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta,\alpha\vee\beta}{\Phi}}\ \Rightarrow_{\mathsf{t}}\vee \qquad\qquad \dfrac{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha,\beta}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha\vee\beta}}\ \Rightarrow_{\mathsf{f}}\vee$$

Negação

$$\dfrac{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}}{\frac{\neg\alpha,\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \neg\Rightarrow_{\mathsf{f}} \qquad\qquad \dfrac{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}}{\frac{\Psi}{\neg\alpha,\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \neg\Rightarrow_{\mathsf{t}}$$

$$\dfrac{\frac{\alpha,\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta,\neg\alpha}{\Phi}}\ \Rightarrow_{\mathsf{t}}\neg \qquad\qquad \dfrac{\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi,\neg\alpha}}\ \Rightarrow_{\mathsf{f}}\neg$$

Tomemos dois exemplos de derivações usando o sistema de B-sequentes de $\mathbf{E}^B$, $\frac{}{\neg(\alpha\vee\beta)}\Big|\frac{\neg\alpha\wedge\neg\beta}{}$ e $\frac{(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma}{}\Big|\frac{}{(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\frac{\alpha}{}\big|\frac{}{\alpha}}\ in_{\mathsf{f}}}{\frac{\alpha}{}\big|\frac{}{\alpha,\beta}}\ weak}{\big|\frac{\neg\alpha}{\alpha,\beta}}\ \Rightarrow_{\mathsf{t}}\neg \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\frac{\beta}{}\big|\frac{}{\beta}}\ in_{\mathsf{f}}}{\frac{\beta}{}\big|\frac{}{\alpha,\beta}}\ weak}{\big|\frac{\neg\beta}{\alpha,\beta}}\ \Rightarrow_{\mathsf{t}}\neg}{\dfrac{\big|\frac{\neg\alpha\wedge\neg\beta}{\alpha,\beta}}{\big|\frac{\neg\alpha\wedge\neg\beta}{\alpha\vee\beta}}\ \Rightarrow_{\mathsf{f}}\vee}\ \Rightarrow_{\mathsf{t}}\wedge}{\frac{}{\neg(\alpha\vee\beta)}\big|\frac{\neg\alpha\wedge\neg\beta}{}}\ \neg\Rightarrow_{\mathsf{t}}$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$in_{\mathtt{f}}$}
\UnaryInfC{$\frac{\alpha}{}\big|\frac{}{\alpha}$}
\RightLabel{$weak$}
\UnaryInfC{$\frac{\alpha,\beta}{}\big|\frac{}{\alpha}$}
\RightLabel{$\wedge\Rightarrow_{\mathtt{f}}$}
\UnaryInfC{$\frac{\alpha\wedge\beta}{}\big|\frac{}{\alpha}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$in_{\mathtt{f}}$}
\UnaryInfC{$\frac{\gamma}{}\big|\frac{}{\gamma}$}
\RightLabel{$\vee\Rightarrow_{\mathtt{f}}$}
\BinaryInfC{$\frac{(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma}{}\big|\frac{}{\alpha,\gamma}$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathtt{f}}\vee$}
\UnaryInfC{$\frac{(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma}{}\big|\frac{}{\alpha\vee\gamma}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$in_{\mathtt{f}}$}
\UnaryInfC{$\frac{\beta}{}\big|\frac{}{\beta}$}
\RightLabel{$weak$}
\UnaryInfC{$\frac{\alpha,\beta}{}\big|\frac{}{\beta}$}
\RightLabel{$\wedge\Rightarrow_{\mathtt{f}}$}
\UnaryInfC{$\frac{\alpha\wedge\beta}{}\big|\frac{}{\beta}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$in_{\mathtt{f}}$}
\UnaryInfC{$\frac{\gamma}{}\big|\frac{}{\gamma}$}
\RightLabel{$\vee\Rightarrow_{\mathtt{f}}$}
\BinaryInfC{$\frac{(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma}{}\big|\frac{}{\beta,\gamma}$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathtt{f}}\vee$}
\UnaryInfC{$\frac{(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma}{}\big|\frac{}{\beta\vee\gamma}$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathtt{t}}\wedge$}
\BinaryInfC{$\frac{(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma}{}\big|\frac{}{(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)}$}
\end{prooftree}
$$

Escrevemos $\dfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Phi}{\Delta}}$, para denotar que o B-sequente $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Phi}{\Delta}$ tem uma derivação usando as regras apresentadas.

Teorema 4.1 (Correção). *Todo B-sequente derivável é válido em $\mathbf{E}^B$.*

Demonstração. Indução no número de regras de B-sequentes aplicadas.

Caso Base: O B-sequente é da forma $\dfrac{}{\frac{}{\alpha}\big|\frac{\alpha}{}}\, in_{\mathtt{t}}$ ou $\dfrac{}{\frac{\alpha}{}\big|\frac{}{\alpha}}\, in_{\mathtt{f}}$.
Por um lado, $\frac{}{\alpha}\big|\frac{\alpha}{}$ significa que não existe um agente $s \in SOC$ tal que $\mathsf{Y}s{:}\alpha$ e ⅄$s{:}\alpha$. Logo, $\frac{}{\alpha}\big|\frac{\alpha}{}$ é válido. Por outro lado, $\frac{\alpha}{}\big|\frac{}{\alpha}$ significa que não existe um agente $s \in SOC$ tal que И$s{:}\alpha$ e $\mathsf{N}s{:}\alpha$. Logo, $\frac{\alpha}{}\big|\frac{}{\alpha}$ é válido.

Hipótese Indutiva: Para todo B-sequente $\dfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}$ cuja derivação tenha até k aplicações de regras, temos que $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido.

Passo indutivo: Suponha um B-sequente derivado por $k+1$ aplicações de regras.

Caso $[weak]$. O B-sequente é da forma $\dfrac{\dfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}}{\frac{\Psi',\Psi}{\Gamma',\Gamma}\big|\frac{\Delta,\Delta'}{\Phi,\Phi'}}\, weak$. Por hipótese indutiva $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido e, por B-monotonicidade, $\frac{\Psi',\Psi}{\Gamma',\Gamma}\big|\frac{\Delta,\Delta}{\Phi,\Phi'}$ é válido.

Caso $[cut_{\mathtt{t}}]$. O B-sequente é da forma $\dfrac{\dfrac{*'}{\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}} \quad \dfrac{*''}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}\, cut_{\mathtt{t}}$. Por hipótese indutiva $\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ e $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}$ são válidos, e por B-transitividade(t), temos que

$\frac{\Psi}{\Gamma}\Big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido. O caso $[cut_{\mathsf{f}}]$ é similar.

Caso$[\Rightarrow_{\mathsf{t}} \wedge]$ O B-sequente é da forma $\dfrac{\dfrac{*'}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}} \quad \dfrac{*''}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\beta}{\Phi}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha\wedge\beta}{\Phi}} \Rightarrow_{\mathsf{t}} \wedge$. Dada a hipótese indutiva temos que $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}$ e $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\beta}{\Phi}$ são válidos, o que significa que não existe um agente s tal que $\mathsf{\lambda} s{:}\alpha$ e $\mathsf{\lambda} s{:}\beta$, desta forma, pela cláusula recursiva 2.7, não existe um agente s tal que $\mathsf{\lambda} s{:}\alpha \wedge \beta$. Logo, $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha\wedge\beta}{\Phi}$ é válido.

Caso$[\Rightarrow_{\mathsf{f}} \vee]$ O B-sequente é da forma $\dfrac{\dfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha,\beta}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha\vee\beta}} \Rightarrow_{\mathsf{f}} \vee$. Dada a hipótese indutiva temos que $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha,\beta}$ é válido, o que significa que não existe um agente s tal que $\mathsf{N}s{:}\alpha$ ou $\mathsf{N}s{:}\beta$, desta forma, pela cláusula recursiva 2.10, não existe um agente s tal que $\mathsf{N}s{:}\alpha \vee \beta$. Logo, $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha\vee\beta}$ é válido.

Caso$[\neg \Rightarrow_{\mathsf{t}}]$ O B-sequente é da forma $\dfrac{\dfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}}}{\frac{\Psi}{\neg\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}} \neg \Rightarrow_{\mathsf{t}}$. Dada a hipótese indutiva temos que $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}$ é válido. Isto significa que não existe um agente s tal que $\mathsf{N}s{:}\alpha$, desta forma, pela cláusula recursiva 2.1, não existe um agente s tal que $\mathsf{Y}s{:}\neg\alpha$. Logo, $\frac{\Psi}{\neg\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido.

Os outros casos são demonstrados de forma similar. □

Dada uma derivação arbitrária de B-sequentes $\dfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}$. Chamamos de **$B$-sequente anterior** todos B-sequentes da derivação que geram $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$.

Para o resultado de completude demonstraremos primeiro que se dado um B-sequente é válido, todos os B-sequentes anteriores de derivação são válidos.

Teorema 4.2 (Teorema de inversão). *Seja I uma regra de derivação distinta do B-enfraquecimento. Se a conclusão da aplicação de I é um B-sequente válido, então todos os B-sequentes anteriores à aplicação de I são válidos.*

Demonstração. Indução no número de aplicações de regras exceto B-enfraquecimento.

Caso Base: O B-sequente $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é derivado das regras in_{t} ou in_{f}, logo não há B-sequentes anteriores a $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ pela aplicação de uma regra que não seja o B-enfraquecimento.

Hipótese Indutiva: Todos os B-sequentes anteriores de um dado B-sequente válido $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$, cuja derivação tenha até k aplicações de regras exceto o enfraquecimento, são válidos.

Passo indutivo: Seja $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ um B-sequente válido cuja derivação tenha $k+1$ aplicações de regras exceto o B-enfraquecimento.

Caso $[cut_{\mathrm{t}}]$. O B-sequente válido possui uma derivação da forma

$$\cfrac{\cfrac{*'}{\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}} \qquad \cfrac{*''}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ cut_{\mathrm{t}}$$

. Como $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido, não existe um agente s tal que Y$s{:}\Gamma$ e ⅄$s{:}\Delta$ e N$s{:}\Phi$ e И$s{:}\Psi$. Por B-monotonicidade, temos que não existe um agente s tal que Y$s{:}\alpha,\Gamma$ e ⅄$s{:}\Delta$ e N$s{:}\Phi$ e И$s{:}\Psi$. Da mesma forma, não existe um agente s tal que Y$s{:}\Gamma$ e ⅄$s{:}\Delta,\alpha$ e N$s{:}\Phi$ e И$s{:}\Psi$. Logo, $\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ e $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}$ são válidos e, por hipótese indutiva, todos seus os B-sequentes anteriores são válidos. O caso $[cut_{\mathrm{f}}]$ é similar.

Caso$[\Rightarrow_{\mathrm{t}} \wedge]$ O B-sequente válido possui uma derivação da forma

$$\cfrac{\cfrac{*'}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}} \qquad \cfrac{*''}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\beta}{\Phi}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha\wedge\beta}{\Phi}}\ \Rightarrow_{\mathrm{t}} \wedge$$

. Dado que $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha\wedge\beta}{\Phi}$ é válido, não existe um agente s tal que Y$s{:}\Gamma$ e ⅄$s{:}\Delta,\alpha\wedge\beta$ e N$s{:}\Phi$ e И$s{:}\Psi$. Pela cláusula recursiva 2.7, temos que não existe um agente s tal que ⅄$s{:}\alpha\wedge\beta$ uma vez que não existe um agente s tal que ⅄$s{:}\alpha$ e ⅄$s{:}\beta$. Desta forma, não existe um agente s, tal que Y$s{:}\Gamma$ e ⅄$s{:}\Delta,\alpha$ e N$s{:}\Phi$ e И$s{:}\Psi$, nem existe um agente s tal que Y$s{:}\Gamma$ e ⅄$s{:}\Delta,\beta$ e N$s{:}\Phi$ e И$s{:}\Psi$. Logo, $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\alpha}{\Phi}$ e $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta,\beta}{\Phi}$ são válidos e, por hipótese indutiva, todos seus os B-sequentes anteriores são válidos.

Caso$[\Rightarrow_{\mathrm{f}} \vee]$ O B-sequente válido possui uma derivação da forma

$$\cfrac{\cfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha,\beta}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha\vee\beta}}\ \Rightarrow_{\mathrm{f}} \vee$$

. Dado que $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha\vee\beta}$ é válido, não existe um agente s, tal que Y$s{:}\Gamma$ e ⅄$s{:}\Delta$ e N$s{:}\Phi,\alpha\vee\beta$ e И$s{:}\Psi$. Pela cláusula recursiva 2.10, não existe um agente s tal que $\mathsf{N}s{:}\alpha \vee \beta$ se $\mathsf{N}s{:}\alpha$ ou $\mathsf{N}s{:}\beta$, logo $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha,\beta}$ é válido, e por hipótese indutiva todos seus sequentes anteriores são válidos.

Caso$[\neg \Rightarrow_{\mathrm{t}}]$ O B-sequente válido possui uma derivação da forma

$$\cfrac{\cfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}}}{\frac{\Psi}{\neg\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \neg\Rightarrow_{\mathrm{t}}$$

. Dado que $\frac{\Psi}{\neg\alpha,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido, não existe um agente s, tal que $\mathsf{Y}s{:}\neg\alpha, \Gamma$ e $\text{⅄}s{:}\Delta$ e $\mathsf{N}s{:}\Phi$ e $\text{И}s{:}\Psi$. Pela cláusula recursiva 2.1, não existe um s tal que $\mathsf{Y}s{:}\neg\alpha$ se $\mathsf{N}s{:}\alpha$. Desta forma $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}$ é válido.

Os outros casos possuem demonstrações similares. □

Teorema 4.3 (Completude). *Se* $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ *é um B-sequente válido em* $\mathbf{E}^{B}$*, então existe uma derivação de* $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$.

Demonstração. Indução no número de conectivos do B-sequente $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$.

Caso Base: $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ não possui conectivos lógicos. Neste caso, todas fórmulas são variáveis proposicionais. Dado que $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido, deve haver alguma variável proposicional α tal que $\alpha \in \Gamma \cap \Delta$, (ou $\alpha \in \Phi \cap \Psi$). Assim, $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ pode ser derivado por $\cfrac{}{\frac{}{\alpha}\big|\frac{\alpha}{}}\ in_{\mathrm{t}}$ (ou $\cfrac{}{\frac{\alpha}{}\big|\frac{}{\alpha}}\ in_{\mathrm{f}}$) e, eventualmente, aplicações da regra de B-enfraquecimento.

Hipótese Indutiva: Seja $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ um B-sequente válido que possui até $m \in \mathbb{N}$ ocorrências de conectivos lógicos. Então, existe uma *-derivação de $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ livre de regras de B-cortes.

O passo indutivo, $m+1$, é obtido por casos de acordo com o conectivo mais externo das fórmulas do B-sequente.

Primeiro, suponha que existe uma fórmula da forma $\neg\alpha \in \Gamma$. Seja Γ' o conjunto de fórmulas obtido de Γ ao remover todas ocorrências de $\neg\alpha$,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{*}{\frac{\Psi}{\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}}}{\frac{\Psi}{\neg\alpha,\Gamma'}\big|\frac{\Phi}{\Delta}}\ \neg_{\mathrm{f}}\Rightarrow}{\overline{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}}$$

podemos derivar $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ por: (derivação acima), onde a linha dupla indica uma série de aplicações da regra de B-enfraquecimento.

Pelo teorema de inversão $\frac{\Psi}{\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi,\alpha}$ é válido, e, como este possui no máximo m conectivos lógicos, pela hipótese indutiva implica que existe uma derivação sem o uso de regras de B-cortes. Com a aplicação da regra $[\neg \Rightarrow_{\mathrm{f}}]$, temos $\frac{\Psi}{\neg\alpha,\Gamma'}\big|\frac{\Phi}{\Delta}$ cuja derivação é livre de regras do corte. As demonstrações para os casos em que uma fórmula da forma $\neg\alpha$ ocorrem em Δ, Φ e Ψ são similares a este primeiro caso.

Em segundo lugar, considere uma fórmula da forma $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$. Seja Γ' o conjunto de fórmulas obtido de Γ ao remover todas ocorrências de $\alpha \wedge \beta$. Podemos derivar $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ por:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{\frac{\Psi}{\alpha,\beta,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}}{\frac{\Psi}{\alpha\wedge\beta,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \wedge\Rightarrow_{\mathrm{t}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}$$

. Pelo teorema de inversão $\frac{\Psi}{\alpha,\beta,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ é válido e como possui no máximo m conectivos lógicos, pela hipótese indutiva, existe uma derivação livre de B-cortes. Com a aplicação da regra $[\wedge \Rightarrow_{\mathrm{t}}]$, temos $\frac{\Psi}{\alpha\wedge\beta,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$. As demonstrações para os casos da forma $\alpha \wedge \beta \in \Psi$, $\alpha \vee \beta \in \Phi$ e $\alpha \vee \beta \in \Delta$ são similares a este segundo caso.

Em terceiro lugar, considere uma fórmula da forma $\alpha \vee \beta \in \Gamma$. Seja Γ' o conjunto de fórmulas obtido de Γ ao remover todas ocorrências de $\alpha\vee\beta$, podemos inferir $\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ por:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{*'}{\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}} \qquad \dfrac{*''}{\frac{\Psi}{\beta,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}}{\frac{\Psi}{\alpha\vee\beta,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}\ \vee\Rightarrow_{\mathrm{t}}}{\frac{\Psi}{\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}}$$

. Pelo teorema de inversão $\frac{\Psi}{\alpha,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ e $\frac{\Psi}{\beta,\Gamma'}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ são válidos e como a soma de seus conectivos é menor que m, pela hipótese de indução, existe uma derivação livre de B-cortes. Com a aplicação da regra $[\vee \Rightarrow_{\mathrm{t}}]$, temos $\frac{\Psi}{\alpha\vee\beta,\Gamma}\big|\frac{\Delta}{\Phi}$ cuja derivação é livre de regras de B-cortes. As demonstrações para os casos da forma $\alpha \vee \beta \in \Psi$, $\alpha \wedge \beta \in \Phi$ e $\alpha \wedge \beta \in \Delta$ são similares a este terceiro caso. $\square$

A lógica $\mathbf{E}^B$ inspirada no *First Degree Entailment* possui associada um B*-entailment*, uma relação de consequência que possui quatro posições que possibilita o raciocínio com informações incompletas ou inconsistentes. Ao adotar o B*-entailment* como relação de consequência semântica na lógica

$\mathbf{E}^B$, definimos uma lógica que expressa as diferentes formas de raciocínio em termos da aceitação (ou não) e rejeição (ou não) dos enunciados, sem que a verdade seja, de alguma forma, privilegiada sobre a falsidade em suas inferências. Este privilégio ocorre na lógica original de Dunn-Belnap $\mathbf{E}$, cuja relação de consequência tarskiana é definida apenas em termos da preservação dos valores-de-verdade que contêm a verdade. Acreditamos, com isto, que esta nova definição de relação de consequência seja mais adequada para um formalismo que pretende lidar com conteúdos informacionais inconsistentes e parciais.

Referências

[1] Arieli, O.; Avron, A. "The value of the four values", *Artificial Intelligence*, v. 102, n. 1, p. 97–141, 1998.

[2] Belnap, N. "How a computer should think", In: RYLE, G. (Ed.). *Contemporary Aspects of Philosophy*. Stockfield: Oriel Press, 1977. p. 30–56.

[3] Bochman, A. "Biconsequence relations: A four-valued formalism of reasoning with inconsistency and incompleteness", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 39, p. 131–143, 1998.

[4] Dunn, J. M. "Intuitive semantics for first-degree entailment and 'coupled trees' ", *Philosophical Studies*, v. 29, p. 149–168, 1976.

[5] Dunn, J. M. "Partiality and its dual", *Studia Logica*, 66(1): 5–40, 2000.

[6] Fitting, M. "Bilattices are nice things", In: Bolander, T.; Hendricks, V.; Pedersen, S. A. (Ed.). *Self-Reference*. Coli Publications, 2006.

[7] Frankowski, S. "Formalization of a plausible inference", *Bulletin of the Section of Logic*, v. 33, p. 41–52, 2004.

[8] Malinowski, G. "q-consequence operation", *Reports on Mathematical Logic*, v. 24, n. 1, p. 49–59, 1990.

[9] Shramko, Y.; Wansing, H. "Entailment relations and/as truth values", *Bulletin of the Section of Logic*, v. 36, p. 131–143, 2007.

[10] Shramko, Y.; Wansing, H. *Truth and Falsehood: An Inquiry into Generalized Logical Values*. Springer, 2011.