ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Tipos de conocimientos desplegados por futuros profesores de Matemática al resolver problemas sobre funciones trigonométricas

Types of knowledge displayed by future Mathematics teachers when solving problems about trigonometric functions

Marco **Uribe***

ORCID iD 0000-0002-8799-8242

Paulina **Retamal** Oliva**

ORCID iD 0000-0002-7335-0656

Resumen

En este trabajo se analizan los conocimientos matemáticos puestos en juego por un grupo de futuros profesores de matemática frente a la realización de actividades evaluativas sobre funciones trigonométricas. Identificamos, a partir del análisis de las respuestas dadas, una tipología de conocimientos matemáticos generales y específicos. Para este propósito, se ha considerado la faceta epistémica, los elementos primarios y el conocimiento común del contenido del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Los resultados indican que los estudiantes despliegan conocimiento general de tipo: Algorítmico, Representativo e Interpretativo y conocimientos específicos asociados a campos de problemas abordados en tres tipos de preguntas.

Palabras clave: Funciones Trigonométricas. Enfoque Ontosemiótico. Conocimiento Matemático.

Abstract

In this work, we analyzed the mathematical knowledge put into play by a group of future mathematics teachers when carrying out evaluative activities on trigonometric functions. We identified from the analysis of the answers given, a typology of general and specific mathematical knowledge. To establish this typology, we considered the epistemic facet, the primary elements, and the common knowledge of the ontosemiotic approach content to mathematical knowledge and instruction. The results indicate that the students display general knowledge of the type: Algorithmic, Representative, and Interpretative and specific knowledge associated with problem fields addressed in three types of questions.

Keywords: Trigonometric Functions. Ontosemiotic Approach. Mathematical Knowledge.

* Doctor en Matemáticas por la Université de Bourgogne (IMB). Investigador asociado del departamento de matemáticas de la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), Concepción. Chile. E-mail: muribe@ucsc.cl.

** Magister en Didáctica de la Matemática por la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC). Docente colegio Margarita Naseau (CMN), Tomé. Chile. E-mail: pretamal@magister.ucsc.cl.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

1 Introducción

El proceso de enseñanza de la matemática en los niveles educativos del sistema escolar chileno es un tema de interés y discusión permanente por los actores educativos con el propósito de determinar estrategias que permitan mejorar los niveles de rendimiento de los estudiantes en las asignaturas de matemáticas. Algunos focos de este análisis se orientan hacia la formación del futuro profesor de matemática (FPM), las mejoras de los procesos curriculares, la enseñanza de contenidos matemáticos, entre otros.

Estos aspectos permiten desarrollar competencias e incrementar los niveles de dominio de los FPM tanto de aquellos conocimientos disciplinares, como didácticos, estos esfuerzos se ven reflejado, posteriormente, en la enseñanza, el aprendizaje y los resultados que obtengan sus futuros estudiantes (MONK, 1994). En esta línea, el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2012), con el fin de elevar el dominio disciplinario de los FPM, a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) elaboró un documento sobre estándares orientadores que permiten describir aspectos fundamentales e imprescindibles que cada profesor debe conocer, en el ámbito disciplinar y didáctico, para desarrollar capacidades y construir estrategias que promuevan el pensamiento crítico y autónomo de sus estudiantes al momento de ejercer su profesión (MINEDUC, 2012).

Son varios los investigadores que, en las últimas décadas, se han interesado en estudiar y describir aquellos conocimientos matemáticos que se observan en los profesores de matemática en las instituciones educativas, entre estos, el conocimiento didáctico (pedagógico) del contenido (RIVAS; GODINO; CASTRO 2012; SANTANA; DA PONTE; SERRAZINA, 2020; SHULMAN, 1987) y conocimiento especializado del contenido (BALL; ROWAN, 2004; CHANDIA *et al.*, 2018), otros han intentado caracterizar este tipo de conocimiento en la enseñanza, aplicando distintos marcos de referencia (BALL; LUBIENSKI; MEWBORN, 2001; ROWLAND; HUCKSTEP; THWAITE, 2005; ARANEDA; URIBE, 2020).

Además, es de interés establecer conexión entre los conocimientos disciplinares adquiridos por los FPM y las experiencias basadas en sus prácticas de aula (MENDOZA-HIGUERA *et al.*, 2018, OLFOS *et al.*, 2019), en particular, interesa conocer aquellos que emergen en los FPM cuando realizan tareas matemáticas. Godino *et al.* (2007) señalan que desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

> […] el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego y las

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

> variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa (GODINO *et al.*, 2007, p. 92).

Las experiencias de aulas nos permiten observar los tipos de conocimientos que los FPM ponen en juego al resolver problemas matemáticos, en particular los conocimientos trigonométricos. Un tema importante, y a nuestro juicio causal, es poder establecer la influencia de los textos universitarios con contenidos trigonométricos (VILLA-OCHOA; TAVERA, 2019) en la realización de tareas evaluativas. Las funciones trigonométricas son un contenido importante de la matemática, específicamente del álgebra y el cálculo; se estudian desde la enseñanza secundaria (15 a 17 años) hasta la universidad en carreras como Pedagogía en Matemática e Ingeniería y su importancia en el currículum se debe a la conexión de este tema con otras áreas de la matemática como son: aritmética, álgebra, geometría, entre otros (MARTIN; RUIZ; RICO, 2016).

El análisis de errores y dificultades en el estudio de las funciones trigonométricas es otra problemática interesante a investigar y cómo están, en muchos casos, evidenciados por la comprensión de algunos conceptos trigonométricos y representaciones básicas como ciclos trigonométricos, medir ángulos en radianes, entre otros (ESTEVES; GIUSTI-SOUZA; MASANOBO, 2016; DE KEE; MURA; DIONNE, 1996). Además, es de interés abordar cómo introducir de mejor manera los contenidos de trigonometría, algunos proponen iniciar con razones trigonométricas y finalizar con funciones trigonométricas, otros que es más natural introducir conceptos a partir del triángulo rectángulo que usar el círculo unitario (KENDAL; STACY, 1998; WEBER, 2008).

A partir de lo expuesto anteriormente, en este trabajo se analizan los conocimientos que emergen en los FPM cuando realizan actividades evaluativas sobre funciones trigonométricas, se indaga en sus respuestas y establecemos una tipología de conocimientos matemáticos generales y específicos. Esta indagación se realiza, considerando los elementos primarios y la faceta epistémica del Enfoque Ontosemiótico a través de la descomposición de unidades e identificación de entidades que los FPM ponen en juego (GODINO, 2002). Las observaciones indican que los estudiantes despliegan conocimiento general: algorítmico, representativo e interpretativo y conocimientos específicos asociados a campos de problemas abordados en las actividades.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

2 Fundamentación del Problema

Las funciones trigonométricas es un tema curricularmente importante (MINEDUC, 2015), puesto que ya aparecen en la enseñanza de la matemática en el cuarto nivel (15 a 17 años) del currículum de secundaria del sistema educativo chileno, y es una unidad fundamental en las asignaturas de álgebra, cálculo, análisis, geometría en carreras como Pedagogía en Matemática, Ingeniería Civil, Comercial y carreras del área de las Ciencias de la universidad. Saber qué tipos de conocimientos sobre las funciones trigonométricas adquieren los estudiantes y cómo éstos se ponen en juego al resolver tareas relacionadas con dicho contenido es el interés de esta investigación. Algunas premisas que hemos considerado en este trabajo son: en primer lugar, la comprensión que adquieren los FPM de los contenidos de trigonometría no siempre es la más adecuada, en segundo lugar, los estudiantes no logran procedimientos óptimos para abordar la resolución de los problemas planteados y, finalmente, el conocimiento que tienen los FPM es superficial, basado principalmente en conocer definiciones memorísticamente y desarrollar operaciones matemáticas simples como lo menciona Colín, Islas y Morales (2018).

Es frecuente que los FPM confundan las funciones trigonométricas con las razones trigonométricas (MONTIEL, 2013). En su estudio, Araya, Monge y Morales (2007) concluyen que los conocimientos desarrollados por los FPM en el aprendizaje de las funciones trigonométricas podrían no estar satisfaciendo los requerimientos mínimos como argumentaciones y explicaciones, para enseñar ciertos temas como aquellas de forma no mecánica. Por otro lado, indagar en cómo los libros de texto que aparecen en las referencias básicas de las asignaturas puedan ser utilizados en la formación de los FPM para desarrollar conocimiento trigonométrico es un tema de interés en aspectos didácticos, ya que éstos no son un recurso neutro en los procesos de producción de conocimiento matemático (VILLA-OCHOA; TAVERA, 2019). Además, establecer campos o áreas de problemas permitirá a los FPM desplegar ciertos tipos de conocimientos al desarrollar las tareas evaluativas sobre trigonometría.

En el contexto de los futuros profesores de enseñanza media, CPEIP y MINEDUC (2012) han definido los estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media del currículo chileno. Dado el contexto de nuestra investigación, hemos considerado aquellos estándares correspondientes al área de matemática relacionados con las funciones trigonométricas. Son 21 los estándares de matemáticas declarados en el documento, y aquellos que contienen de manera directa o indirecta a las funciones trigonométricas son los siguientes tres estándares: *Estándar 3:* es capaz de conducir el aprendizaje del concepto de función, sus propiedades y representaciones, presente en el área temática de sistemas numéricos y álgebra; *Estándar 13*: es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en temas referidos a medida de atributos de objetos geométricos y el uso de la trigonometría, y finalmente *Estándar 16*: comprende aspectos fundamentales de la geometría euclidiana y algunos modelos básicos de geometrías no euclidianas, ambas unidades están presente en el eje temático de Geometría (MINEDUC, 2012).

Por tanto, estamos interesados en describir qué tipos de conocimientos disciplinares y didácticos ponen en juego los FPM al responder a tareas evaluativas que contienen funciones trigonométricas. Establecemos que los FPM despliegan ciertos conocimientos generales, como: algorítmicos, representativos e interpretativos, además de conocimientos asociados a ciertos campos y subcampos de problemas que están presentes en las actividades evaluativas.

3 Marco Referencial

3.1 Conocimientos del Profesor de Matemática

El propósito de esta investigación es indagar sobre los conocimientos desplegados por FPM cuando dan respuestas a problemas sobre funciones trigonométricas. Se desea identificar y caracterizar los tipos de conocimientos disciplinarios y didácticos, que permitan establecer una tipología de conocimientos en la formación de los FPM de la carrera de matemática en los primeros años de estudios.

Godino (2009, p. 21) consideró las componentes del conocimiento del profesor como "un modelo poliédrico; cuyas representaciones muestran las diversas facetas a tener en cuenta en un proceso de estudio, indicando cuatro niveles de análisis sobre los cuales se puede fijar la atención". Las facetas del conocimiento del profesor son epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Las características de esta investigación se relacionan con la faceta epistémica del conocimiento definido por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), en el cual Godino (2009, p. 21) describe como: "Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos)".

El EOS, según Pino-Fan y Godino (2015), posee tres dimensiones: matemática, didáctica y metadidáctico-matemática, cada una con sus correspondientes subcategorías. Dentro de la dimensión en la que se basa esta investigación, es la dimensión matemática cuyas subcategorías son conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, siendo el primero el utilizado para el análisis de las respuestas de problemas de funciones trigonométricas dadas por los FPM en actividades evaluativas.

Pino-Fan y Godino (2015, p. 97) definen dicha subcategoría como: "aquel conocimiento, sobre un objeto matemático concreto (por ejemplo, la derivada), que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (o planes de estudio)". Por lo tanto, de las respuestas que entregan los FPM en problemas de funciones trigonométricas, se analizará la dimensión matemática del modelo del conocimiento didáctico matemático cuya subcategoría es el conocimiento común del contenido.

3.2 El Enfoque Ontosemiótico (EOS)

Como se ha descrito en la sección anterior, el horizonte didáctico que empleamos en esta investigación es el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática propuesto por Godino y sus colaboradores (GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2007). Según Fernandez, Godino y Cajaraville (2012) los supuestos básicos del EOS se relacionan con la antropología, la ontología y la semiótica.

Con respecto a atributos contextuales del EOS, Godino (2002, p. 7) define:

> El modelo ontológico propuesto se complementa y enriquece con la consideración de las cinco facetas o dimensiones duales, que junto con la noción de función semiótica como entidad relacional entre los distintos tipos de entidades, permite describir y relacionar una variedad de nociones cognitivas propuestas desde diversas teorías.

El enfoque proporciona una visión pragmático-antropológica sobre el conocimiento matemático, dividiendo el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en epistemológicas, cognitiva e instruccional (ALVARADO; BATANERO, 2008). Además, tres nociones teóricas primarias que permiten un análisis profundo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son: prácticas, objetos y funciones semióticas (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Los objetos matemáticos son entidades referenciales que están presentes en toda actividad matemática y que los FPM ponen en juego cuando realizan actividades evaluativas, según Godino y Batanero (1994) estos objetos matemáticos son manipulados, nombrados y descritos mediantes las prácticas asociadas que pueden ser personales e institucionales. Para el análisis de una situación-problema se consideran seis objetos primarios que, según Godino, Batanero y Font (2007, p. 6) son:

> 1) *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios)

> 2) *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual)
> 3) *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función)
> 4) *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos)
> 5) *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo)
> 6) *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Los objetos primarios se utilizarán en el análisis de las actividades evaluativas y permitirán establecer tipos de conocimientos generales y específicos que emergen en los FPM al responder problemas de funciones trigonométricas, de modo que se visualice cómo intervienen dichos objetos y procesos en las respuestas dadas por los FPM.

Los tipos de dimensiones duales del Enfoque Ontosemiótico son dualidad personal-institucional, elemental-sistémica, ejemplar-tipo, expresión-contenido. Godino, Batanero y Font (2007, p. 8) indican que en la dualidad personal e institucional:

> La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

En nuestro estudio, empleamos la dualidad personal-institucional puesto que se quiere analizar las respuestas de los FPM cuando resuelven problemas sobre funciones trigonométricas. Específicamente, la dualidad se visualiza en la respuesta que entrega el futuro profesor (personal) y la solución experta del problema (institucional).

4 Marco Metodológico

Como el propósito de esta investigación es comprender, profundizar y describir los tipos de conocimientos que FPM ponen en juego cuando responden a actividades evaluativas, se adopta una investigación de tipo cualitativo, pues se indaga desde la perspectiva de cada uno de los FPM en un ambiente natural que considera su realidad con su contexto en la forma de significados e interpretaciones, por tanto, estas tienden a ser transitorias y situacionales (HART *et al.*, 2009; HERNÁNDEZ; FERNÁNDEZ; BAPTISTA, 2010).

Los participantes de esta investigación son FPM de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática, que cursaron la asignatura de introducción al análisis, el año 2018, en una universidad del sur de Chile. Esta asignatura está inserta en el tercer semestre de formación y los contenidos curriculares son: sistemas de coordenadas y geometría analítica,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

funciones, funciones exponenciales y logarítmicas, y finaliza la actividad curricular con el contenido de funciones trigonométricas. Es importante señalar que el contenido de funciones trigonométricas es considerado en otras áreas del currículo formativo como: elementos de análisis real, geometría, estructuras algebraicas, didáctica del cálculo, entre otras.

Previo al curso introducción al análisis, el currículo formativo contempla asignaturas de aritmética y álgebra. Al finalizar el cuarto semestre de formación se contempla una evaluación formativa llamada Hito 1 cuyo propósito es levantar información significativa de aspectos disciplinarios y formativos de los FPM en relación con el perfil de egreso. Por tanto, indagar qué tipos de conocimientos disciplinarios y didácticos despliegan los estudiantes en su formación es de interés institucional.

La técnica utilizada para el levantamiento de información es el *análisis de contenido*, realizado por medio de una codificación de las actividades realizadas por los FPM que nos permite indagar sobre los tipos de conocimientos desplegados frente a la realización de actividades evaluativas de funciones trigonométricas, este análisis permite formular inferencias, identificando de manera sistemática y objetiva ciertas características específicas dentro de un discurso (LÓPEZ, 2002).

El tipo de instrumento que permitirá levantar información sobre los conocimientos desplegados por los FPM es un cuestionario con preguntas abiertas, con tipos de problemas planteados en evaluaciones parciales y globales de los FPM en la asignatura de introducción al análisis. Dichos problemas fueron extraídos después de un análisis previo de selección de campos y subcampos de problemas relacionados a funciones trigonométricas, estos problemas fueron seleccionados desde los textos bibliográficos utilizados en la asignatura, así como de los apuntes trabajados por profesores que dictaron la asignatura el primer semestre 2018 y semestres anteriores.

El proceso de validación del cuestionario se llevó a cabo por parte de docentes pertenecientes a las facultades de Educación y de Ingeniería de la universidad que impartieron la asignatura de introducción al análisis, este proceso consistió de reuniones entre dichos docentes que analizaron los cuestionarios, revisando la coherencia de los problemas propuestos con el programa de asignatura y estableciendo el peso de ponderación de los contenidos de funciones trigonométricas en el logro de los resultados de aprendizajes de la asignatura. En la Figura 1, presentamos la secuencia metodológica de las etapas implementadas para la obtención de una tipología de conocimientos generales y específicos que emergen de los FPM al realizar actividades evaluativas de funciones trigonométricas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Como se indicó previamente en el marco de esta investigación, se han seleccionados 20 FPM que corresponden a la totalidad de estudiantes que cursaron la asignatura de introducción al análisis el primer semestre del 2018. Estos estudiantes fueron informados de la investigación y aceptaron, voluntariamente, formar parte del estudio, se les indicó la reserva individual de la información y su uso para fines investigativos y pedagógicos. Por tanto, la investigación de este trabajo nos ha permitido indagar sobre los tipos de conocimientos disciplinares y didácticos que despliegan estos estudiantes frente a tareas evaluativas de funciones trigonométricas.

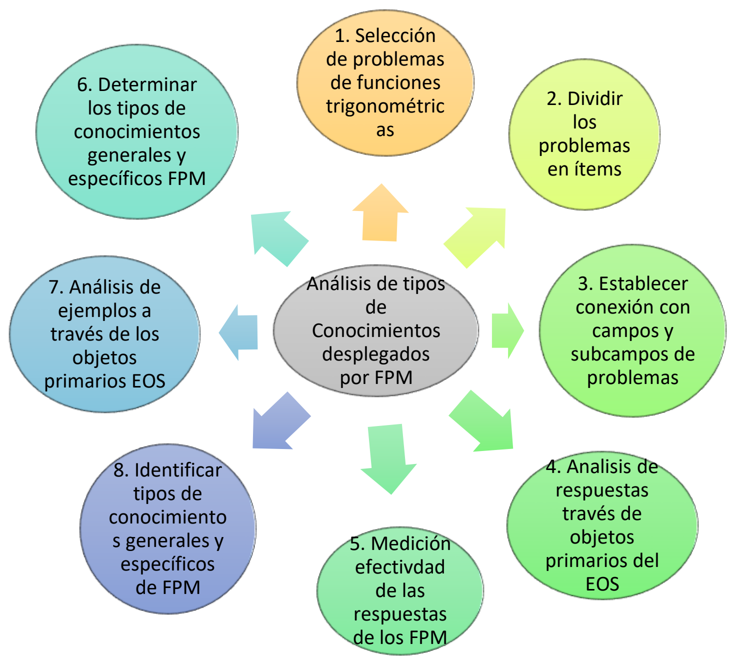


Figura 1 – Etapas de trabajo en análisis de tipos de conocimientos desplegados por FPM
Fuente: elaborado por el autor

Los problemas seleccionados para levantar información sobre los tipos de conocimientos disciplinares y didácticos se describen en el Cuadro 1, que constituye parte de los cuestionarios parciales y globales, estos problemas son identificados como Ítems 1, 2 y 3.

Ítem 1: Si $\sin(\alpha) = \frac{3}{7}$, $\tan(\alpha) < 0$ y $\cos(\beta) = -\frac{4}{5}$, $P(\beta) \notin II$ cuadrante, entonces:

a) Determine el valor de $\cos(\alpha)$ y $\sin(\beta)$
b) Calcule el valor de $\sin(2\alpha)$ y de $\cos(\alpha + \beta)$, indique en que cuadrante se encuentran los puntos $P(2\alpha)$ y $P(\alpha + \beta)$.

Ítem 2: Se definen las funciones coseno hiperbólico; seno hiperbólico y tangente hiperbólica como: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

a) Probar que: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
b) Determine los puntos de intersección de las funciones hiperbólicas seno y coseno con los ejes coordenados
c) Encontrar el dominio de la función tangente hiperbólica
d) Determinar si la función seno hiperbólico es inyectiva.

Ítem 3: En un circuito de corriente alterna la intensidad I medida en amperes debe satisfacer:

$I(t)$=10cos$(20\pi t)$ Donde t es medido en segundos

a) Encontrar la amplitud y el período en segundos
b) Cuántos ciclos (periodos) se completan en 1 segundo

c) Cuál es la máxima intensidad de la corriente

Cuadro 1 – Problemas de funciones trigonométricas
Fuente: elaborado por el autor

5 Análisis de Datos y Resultados

En esta sección, se muestran los resultados del análisis epistémico de los tipos de conocimientos generales y específicos que emergen de los FPM cuando resuelven problemas de funciones trigonométricas. Por la naturaleza cualitativa del estudio, los resultados no son generalizables ni absolutos, son una primera aproximación para describir los conocimientos que se observan en estudiantes del curso de introducción al análisis de una universidad del sur de Chile.

Iniciamos esta presentación de resultados con la descripción de los ítems, luego se determinan los tipos de conocimientos generales y específicos que despliegan los FPM al responder las actividades evaluativas. Presentamos, en cada ítem, un ejemplo de las respuestas dadas por los estudiantes y se realiza un análisis epistémico de las respuestas a partir de los objetos primarios del EOS.

- *Análisis epistémico ítem 1: un problema de cálculo de valores trigonométricos*

Este ítem 1 corresponde a un problema perteneciente a una evaluación parcial de la asignatura introducción al análisis del año 2018 y fue rendida por veinte FPM. El análisis de contenidos se realizó con base a las respuestas que han dado al problema en dicha evaluación.

Tipos de conocimientos generales en ítem I1

Al analizar las respuestas de los FPM podemos observar que despliegan conocimientos generales, es decir, conocimientos que pueden aparecen cuando los estudiantes desarrollan una actividad matemática. Los tipos de conocimientos generales, que denotamos por CG, son tres: algorítmico, representativo e interpretativo y estos son definidos como sigue:

CG1. *Conocimiento algorítmico:* este tipo de conocimiento se despliega cuando el FPM resuelve la actividad evaluativa haciendo uso de fórmulas, teoremas y/o operaciones numéricas y algebraicas.

CG2. *Conocimiento representativo*: este tipo de conocimiento se despliega cuando el FPM resuelve la actividad evaluativa con uno o más tipos de representaciones que permitan justificar alguna fórmula, teorema o que por medio de la representación (visualización del objeto matemático) resuelve el problema planteado, dentro de estas representaciones se pueden identificar: triángulos rectángulos, plano cartesiano, circunferencia unitaria, tabla de valores, entre otros.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

CG3. *Conocimiento interpretativo*: este tipo de conocimiento se despliega cuando el FPM explica o aclara el significado de uno o más elementos matemáticos en su desarrollo que le permita resolver el problema planteado.

Para la presentación de los resultados se ha analizado cada una de las respuestas dadas por los FPM a las actividades evaluativas y en función del desarrollo expuesto se ha establecido el tipo de conocimiento general de acuerdo a las definiciones dadas anteriormente.

La Tabla 1 presenta los resultados de los tipos de conocimientos generales desplegados en ítem I1a. De los veinte FPM que se enfrentaron a la actividad evaluativa, dieciséis desplegaron conocimientos generales.

Tabla 1 – Tipos de conocimientos generales en ítem I1a

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	4	20
CG2	Representativo	12	60
CG3	Interpretativo	0	0
	En blanco	4	20
	Total	20	100

Fuente: elaborado por el autor

De lo anterior se observa que el 60% de las respuestas de los FPM desprenden conocimientos de tipo representativos, hicieron uso de dos tipos de representaciones: la algebraica y la gráfica que le permitieron justificar sus procedimientos, dentro de las representaciones gráficas las que más se repitieron fueron el triángulo rectángulo, la circunferencia unitaria y el plano cartesiano, con el uso de estas representaciones resolvieron el problema planteado. El 20% desprendieron conocimiento de tipo algorítmico, hicieron uso de fórmulas de las razones trigonométricas y teorema de Pitágoras para resolver el problema planteado. Ningún FPM desplegó conocimiento general de tipo interpretativo en el ítem I1a.

La Tabla 2 presenta los resultados de los tipos de conocimientos generales desplegados en ítem I1b. De los veinte FPM que realizaron la actividad evaluativa, doce desplegaron algún tipo de conocimiento general.

Tabla 2 – Tipo de conocimientos generales en ítem I1b

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	5	25
CG2	Representativo	0	0
CG3	Interpretativo	7	35
	En blanco	8	40
	Total	20	100

Fuente: elaborado por el autor

De lo anterior se observa que el 35% de los FPM desprenden conocimientos de tipo interpretativo, esto quiere decir que ocuparon fórmulas para calcular $sen(2\alpha)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

a partir de esto, determinan en qué lugar del plano cartesiano están ubicados dichos puntos. El 25% de los FPM desprenden conocimiento general de tipo algorítmico, usando las fórmulas que le permiten resolver el problema directamente. Ningún FPM desplegó conocimiento general de tipo representativo.

En lo que sigue, se han establecidos los tipos de conocimientos específicos evidenciados por los FPM al resolver actividades evaluativas de funciones trigonométricas. Estos conocimientos están asociados a campos de problemas abordados en los tres tipos de preguntas propuestos en los ítems. Se analizaron los libros de textos de la bibliografía de la asignatura introducción al análisis, se revisaron las unidades de actividades preparadas por los profesores de la asignatura, se revisaron los ejemplos y ejercicios propuestos en las unidades de aprendizaje y con la información recopilada se establecieron los campos y subcampos de problemas asociados a las funciones trigonométricas (RETAMAL, 2020).

Los campos de problemas definidos son: CP1 *el problema de las medidas* (medida de ángulos y aproximaciones). CP2 *el problema de identidades trigonométricas* (Directas e indirectas, Pitagóricas). CP3 *el problema de ecuaciones trigonométricas*. CP4 *el problema de las representaciones trigonométricas* (traslación y reflexión, gráficos y tablas). CP5 *el problema de valores de funciones trigonométricas* (exacto y aproximado) y finalmente CP6 *el problema de los modelos y aplicaciones* (intra y extra matemático).

Tipos de conocimientos específicos en ítem I1

Como este ítem posee dos partes, en cada una se despliegan distintos tipos de conocimientos específicos, estos se denotan como CE (conocimiento específico) y se definen:

CE1. *Aplicación de Teorema de Pitágoras*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando el FPM usa el teorema de Pitágoras para responder a la actividad solicitada, y luego, usa las fórmulas de razones trigonométricas de seno y coseno.

CE2. *Uso del plano cartesiano.* Este tipo de conocimiento se despliega cuando los datos de la actividad evaluativa se representan en el plano cartesiano, y luego, usa las fórmulas de razones trigonométricas de seno y coseno.

CE3. *Uso de identidad fundamental*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando el FPM usa la identidad $sen^2\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ para encontrar el valor de seno y coseno.

CE4. *Uso de razones trigonométricas*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando el FPM sólo utiliza las razones trigonométricas de seno y coseno.

La Tabla 3 presenta los tipos de conocimientos específicos desplegados por los futuros profesores de matemática al responder el ítem I1a. De los veinte FPM que realizaron esta actividad evaluativa, dieciséis desplegaron conocimientos específicos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Tabla 3 – Tipos de conocimientos específicos en ítem I1a

Cód.	Descripción	Frec.	%
CE1	Aplicación de teorema de Pitágoras	6	37,5
CE2	Uso de plano cartesiano	6	37,5
CE3	Uso de identidad fundamental	1	6,2
CE4	Uso de razones trigonométricas	3	18,8
	Total	16	100

Fuente: elaborado por el autor

Se observa, de la Tabla 3, que los tipos de conocimientos más desplegados por los FPM son CE1 y CE2 ambos con el 37,5%. Además, del análisis de las respuestas podemos indicar que los FPM usan sólo un tipo de representación de los datos como el triángulo rectángulo o el plano cartesiano. Un solo FPM despliega conocimiento específico de tipo CE3, planteando una ecuación que le permite dar respuesta correcta a lo solicitado. Finalmente, el 18,8% despliegan conocimiento específico de tipo CE4, extrayendo datos del enunciado y usando directamente las fórmulas de razones trigonométricas.

A continuación se presentan los tipos de conocimientos específicos identificados en el ítem I1b.

CE1. *Uso de seno del ángulo doble*. Este conocimiento es desplegado cuando el FPM utiliza la identidad $sen(2\alpha)$ para responder al problema planteado.

CE2. *Evaluación para determinar el cuadrante de* $P(2\alpha)$. Este conocimiento es desplegado cuando el FPM realiza un desarrollo algebraico con base en los resultados obtenidos de $sen(2\alpha)$, indicando el cuadrante al que pertenece el punto.

CE3. Uso de *suma de coseno*. Este conocimiento es desplegado cuando el FPM utiliza el desarrollo de $cos(\alpha+\beta)$ para responder al problema planteado.

CE4. *Indicación del cuadrante para* $P(2\alpha)$. Este conocimiento es desplegado cuando el FPM sólo escribe el cuadrante (correcto) al que pertenece el punto indicado, sin justificación.

CE5. *Uso de calculadora*. Este conocimiento es desplegado cuando el FPM escribe el valor aproximado de $sen(2\alpha)\ y\ cos(\alpha+\beta)$, por lo que se infiere que ha utilizado una máquina de cómputo para dar respuesta.

CE6. *Indicación del cuadrante para* $P(\alpha+\beta)$. Este conocimiento es desplegado cuando el FPM sólo escribe el cuadrante (correcto) al que pertenece el punto indicado, sin justificación.

La Tabla 4 presenta los tipos de conocimientos desplegados en el ítem I1b. De los veinte FPM que realizaron la actividad evaluativa, doce desplegaron uno o más de un tipo de conocimientos específicos.

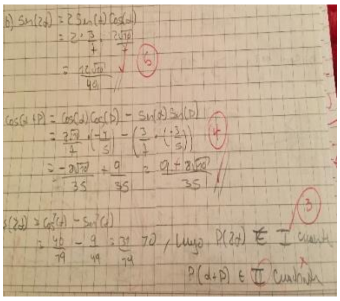
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Tabla 4 – Tipos de conocimientos específicos en ítem I1b

Cód.	Descripción	Frec.	%
CE1	Uso de seno del ángulo doble	9	75
CE2	Evaluación para determinar el cuadrante de $P(2\alpha)$	3	25
CE3	Uso de suma de cosenos	10	83,3
CE4	Indicación del cuadrante para $P(2\alpha)$	3	25
CE5	Uso de calculadora	1	8,3
CE6	Indicación del cuadrante para $P(\alpha+\beta)$	2	16,6

Fuente: elaborado por el autor

De la tabla anterior, se observa que el conocimiento específico más desplegado por los FPM es el CE3 y luego CE1 con el 75%, esto evidencia el uso adecuado de las fórmulas de $cos(\alpha+\beta)$ y $\mathrm{sen}(2\alpha)$ respectivamente. Observando las respuestas exhibidas por los FMP, podemos inferir que una de las dificultades de los FPM es determinar el cuadrante al que pertenece el punto, así como argumentar adecuadamente a partir de las fórmulas de ángulos dobles y sumas de ángulos. La transcripción de la respuesta de un FPM para el ítem I1b aparece en la Figura 2; éste despliega conocimiento general del tipo CG1 y CG3 y conocimiento específico CE1, CE2, CE3 y CE4.



$sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha) = 2\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7} = \frac{12\sqrt{10}}{49}$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$
$= \frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{8\sqrt{10}}{35} + \frac{9}{35} = \frac{9-8\sqrt{10}}{35}$
$\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$
$= \frac{40}{49} - \frac{9}{49} = \frac{31}{49} > 0$. Luego $\mathrm{P}(2\alpha) \in I\ cuadrante.$
$P(\alpha+\beta) \in II\ cuadrante.$

Figura 2 – Transcripción de respuesta de ítem I1b
Fuente: registro de la actividad EvP1

A partir de la transcripción presentada en la Figura 2, se analiza la respuesta del FPM, identificando las configuraciones epistémicas del enfoque ontosemiótico.

Situación-Problema: es la primera configuración epistémica desde donde emergen los distintos tipos de conocimientos asociados al ítem 1. En este caso, la situación-problema es sobre el cálculo de valores de funciones trigonométricas.

Lenguaje: el lenguaje utilizado para desarrollar el ítem es la segunda configuración epistémica que en este caso el tipo de lenguaje es seno, coseno, suma de ángulos, cuadrante de planos coordenados, puntos, entre otros, además notaciones y símbolos como, $\mathrm{P}(2\alpha)$, $P(\alpha+\beta)$, $sen(2\alpha)$ son también usados. Algunas expresiones del lenguaje cotidiano también son expresadas.

Conceptos y Definiciones: las situaciones problemas motivan los conceptos y las definiciones. En el desarrollo de la actividad evaluativa el FPM evidencia conocimientos de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

razones trigonométricas, suma de ángulos y el doble de un ángulo trigonométrico, además de nociones sobre la pertenencia del lado terminal de un ángulo en el plano.

Procedimientos: la situación-problema puede ser obtenida a través de ciertas razones trigonométricas como el cálculo del ángulo doble, el cálculo de sumas de ángulos, el uso de algunas identidades trigonométricas, el posicionamiento angular a través del signo de las razones trigonométricas y al cálculo de algunas expresiones algebraicas y numéricas.

Propiedades y Teoremas: las configuraciones de los procedimientos y las proposiciones permiten al FPM resolver la situación-problema planteada. En el caso del ítem 1, el FPM evidencia el uso de identidades trigonométricas como $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$ y la identidad $\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$.

Argumentos: el nexo entre todas las configuraciones epistémicas son los argumentos o los razonamientos que llevan a la solución de la situación-problema o que permiten demostrar las propiedades, en este caso el FPM usa el razonamiento deductivo de los valores trigonométricos solicitados, así como la deducción a través de los signos de los valores trigonométricos obtenidos para concluir el cuadrante en el cual se encuentran los puntos $\mathrm{P}(2\alpha)$ y $P(\alpha + \beta)$.

- *Análisis epistémico ítem 2: Problema de análisis de una función trigonométrica*

Este ítem corresponde a un problema de una actividad evaluativa parcial de la asignatura introducción al análisis del año 2018, esta fue rendida por veinte FPM, el análisis epistémico se realizó en base con las respuestas dadas por los FPM a la actividad evaluativa. Este ítem se describe como I2 y posee cuatro partes que se identifican como I2a, I2b, I2c e I2d.

Tipos de conocimientos generales en ítem I2

Las respuestas de los FPM despliegan tipos de conocimientos generales, es decir, aquellos que pueden aparecer cuando los estudiantes desarrollan una actividad matemática, los tipos de conocimientos generales identificados en este ítem son: conocimiento algorítmico, representativo e interpretativo. Se denotan como CG (conocimiento general).

A continuación, se presentan los resultados de los tipos de conocimientos generales desplegados en I2a. De los veinte FPM evaluados, solamente se observa que siete responden a la actividad planteada (Tabla 5).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Tabla 5 – Tipos de conocimientos generales en ítem I2a

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	7	35
CG2	Representativo	0	0
CG3	Interpretativo	0	0
	En blanco	13	65
	Total	20	100

Fuente: elaborado por el autor

De la tabla anterior se observa que el 35% de los FPM despliegan conocimiento general de tipo CG1. La Tabla 6 presenta los tipos de conocimientos generales que fueron desplegados por los FPM en el ítem I2b. De los veinte FPM que se enfrentaron a la actividad evaluativa, sólo cinco desplegaron conocimientos generales.

Tabla 6 – Tipos de conocimientos generales en ítem I2b

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	2	10
CG2	Representativo	1	5
CG3	Interpretativo	2	10
	En blanco	15	75
	Total	20	100

Fuente: elaborado por el autor

De lo anterior se observa el bajo porcentaje de estudiantes que respondieron a esta actividad evaluativa y que los conocimientos desplegados por los FPM son de tipo CG1 y CG3, sólo un 5% hicieron uso de representaciones para dar respuesta a la problemática planteada. La Tabla 7 presenta los tipos de conocimientos generales que fueron desplegados por los FPM en el ítem I2c. De los veinte FPM que se enfrentaron a la actividad evaluativa, solo nueve desplegaron conocimientos generales.

Tabla 7 – Tipos de conocimientos generales en ítem I2c

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	1	5
CG2	Representativo	0	0
CG3	Interpretativo	8	40
	En blanco	11	55
	Total	20	100

Fuente: elaborado por el autor

Se observa que los FPM despliegan conocimientos generales de tipo CG3 en un 40% de los casos, el bajo porcentaje puede radicar en que para determinar el dominio de la función se requiere, primeramente, analizar las restricciones que la función posee. No hubo despliegue de representaciones para resolver la problemática planteada. La Tabla 8 presenta los tipos de conocimientos generales que fueron desplegados por los FPM en el ítem I2d. De los veinte FPM que se enfrentaron a la actividad evaluativa, sólo siete desplegaron conocimientos generales

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Tabla 8 – Tipos de conocimientos generales en ítem I2d

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	2	10
CG2	Representativo	1	5
CG3	Interpretativo	4	20
	En blanco	13	65
	Total	20	100

Fuente: elaborado por el autor

De la tabla anterior se observa que los FPM despliegan conocimiento general de tipo CG3 y CG1 aunque sólo en un 30%. Un estudiante usó conocimiento representativo. Es alto el porcentaje de omisión de respuestas al problema planteado en este ítem.

Tipos de conocimientos específicos en el ítem I2

A continuación, se presentan los tipos de conocimientos específicos desplegados en este ítem, al igual que en el ítem anterior se denotará como CE los conocimientos específicos. En este caso se despliegan seis tipos de conocimientos específicos:

CE1. *Evaluar función hiperbólica*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando los FPM reemplazan el coseno y seno hiperbólico en la identidad $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

CE2. *Buscar intersecciones en el eje X*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando los FPM evalúan las funciones coseno y seno hiperbólico en $y = 0$ para encontrar la intersección de dichas funciones en el eje coordenado.

CE3. *Buscar intersecciones en el eje Y*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando los FPM evalúan las funciones coseno y seno hiperbólico en $x = 0$ para encontrar la intersección de dichas funciones en el eje coordenado.

CE4. *Uso de restricción de fórmula de tangente hiperbólica*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando los FPM determinan si $\frac{senh(x)}{\cosh(x)}$ posee alguna restricción real, específicamente en coseno hiperbólico.

CE5. *Uso de restricción en desarrollo de tangente hiperbólica*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando los FPM determinan si $\frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ posee alguna restricción real, específicamente en la expresión $e^x + e^{-x}$.

CE6. *Uso de la noción de inyectividad*. Este tipo de conocimiento se despliega cuando los FPM usan la definición de inyectividad en la función seno hiperbólico.

La Tabla 9 presenta los resultados de los tipos de conocimientos desplegados en ítem I2, de veinte FPM que rindieron la evaluación, sólo siete desplegaron algún tipo de conocimiento específico. Cabe destacar que, en algunos casos, los futuros profesores despliegan

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

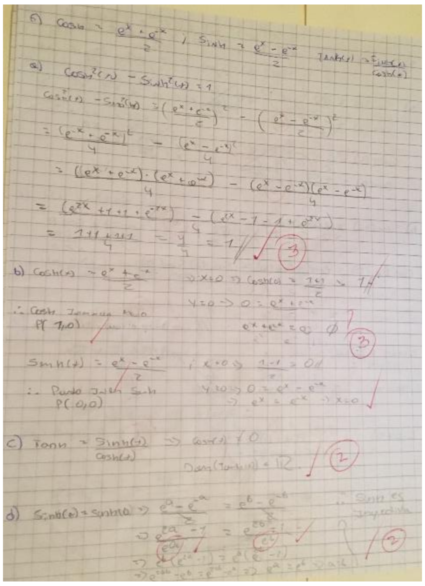
más de un tipo de conocimiento. Como siete es el número máximo de FPM que responden a la actividad evaluativa, se considera esta cantidad como máxima para realizar el análisis.

Tabla 9 – Tipos de conocimiento específicos en ítem I2

Cód.	Descripción	Frec.	%
CE1	Evaluar función hiperbólica	7	100
CE2	Buscar intersecciones en el eje X	4	57,1
CE3	Buscar intersecciones en el eje Y	4	57,1
CE4	Uso de restricción de fórmula de tangente hiperbólica	1	14,2
CE5	Uso de restricción en desarrollo de tangente hiperbólica	4	57,1
CE6	Uso de definición de inyectividad	3	42,8

Fuente: elaborado por el autor

De lo anterior se observa que la totalidad de las respuestas dadas por los FPM evidenciaron conocimiento específico del tipo CE1, es decir, que los FPM evaluaron coseno y seno hiperbólico con el objetivo de probar la igualdad presentada en la actividad evaluativa. Los otros tipos de conocimiento específicos desplegados por los FPM en las actividades evaluativas de este ítem son CE2, CE3 y CE5. A continuación, se presenta, en la Figura 3, la transcripción de la respuesta de un FPM que evidencia conocimientos generales de tipo CG1, CG3 y conocimientos específicos de tipo CE1, CE2, CE3, CE4 y CE6.



a) $\cosh^2 x - senh^2 x = 1$

$\cosh^2 x - senh^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$
$= \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{4} = \frac{(e^{2x}+1+1+e^{-2x})-(e^{2x}-1-1+e^{-2x})}{4} = \frac{1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

b) $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \to x = 0 \to \cosh(0) = \frac{1+1}{2} = 1$

$y = 0 \to 0 = e^x + e^{-x} = 0 \quad \emptyset \quad \therefore P(1,0)$

$senh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad x = 0 \to \frac{1-1}{2} = 0$

$y = 0 \to 0 = e^x - e^{-x} \quad \to e^x = e^{-x} \to x = 0 \ \therefore P(0,0)$

c) $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \to cosh \neq 0$

$Dom(Tanh(x)) = \mathbb{R}$

d) $\sinh(a) = \sinh(b) \to \frac{e^a-e^{-a}}{2} = \frac{e^b-e^{-b}}{2}$

$\to \frac{e^{2a}-1}{e^a} = \frac{e^{2b}-1}{e^b}$

$\to e^{b(e^{2a}-1)} = e^a(e^{2b}-1)$

$\to e^{2ab} - e^b = e^{2ab} - e^a$

$\to e^a = e^b \to a = b \quad \therefore \sinh(x)$ es inyectiva

Figura 3 – Transcripción de respuesta
Fuente: registro de la actividad EvP2

A partir de la transcripción presentada en la Figura 3, se analiza la respuesta del FPM, identificando las configuraciones epistémicas del enfoque ontosemiótico.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Situación-Problema: de esta configuración epistémica emergen distintos tipos de conocimientos generales y específicos asociados al ítem 2. En este caso, la situación-problema es un problema de análisis sobre funciones trigonométricas.

Lenguaje: el lenguaje utilizado para desarrollar el ítem 2 en la segunda configuración epistémica es lenguaje trigonométrico como seno, coseno, lenguaje hiperbólico y exponencial, sistemas de coordenadas, puntos y función. Notaciones y símbolos como $\cosh(x)$, $senh(x), Tanh(x)$, e^x entre otras, son también observadas. Algunas expresiones algebraicas y numéricas son expresadas.

Conceptos y Definiciones: las situaciones problemas motivan los conceptos y las definiciones. En el desarrollo de la actividad evaluativa el FPM evidencia conocimientos de funciones hiperbólicas, dominio y recorrido de funciones hiperbólicas, inyectividad y sistemas coordenados.

Procedimientos: la situación-problema puede ser obtenida a través de ciertos algoritmos y operaciones como cuadrado de binomio, suma de fracciones, división de fracciones, multiplicación de binomios, evaluación de funciones hiperbólicas, así como usar la inyectividad de funciones hiperbólicas.

Propiedades y Teoremas: las configuraciones de los procedimientos y las proposiciones permiten al FPM resolver la situación-problema planteada. En el caso del ítem 2, el FPM evidencia el uso de identidades trigonométricas hiperbólicas y la inyectividad de seno hiperbólico.

Argumentos: en este caso, el FPM usa el razonamiento deductivo como la definición de seno, coseno y tangente hiperbólica, y evaluación de estas. Se observan, también, argumentos de tipo algebraico deductivo como el uso de cuadrado de binomio, reemplazo de valores en las variables, determinación de dominios para concluir propiedades de inyectividad.

- *Análisis epistémico ítem 3: Problema de aplicación de función trigonométrica.*

Este ítem corresponde a un problema que pertenece a una actividad evaluativa (global) de cierre de la asignatura introducción al análisis del año 2018, esta actividad fue trabajada por diecinueve FPM, el análisis epistémico se realizó con base en las respuestas dadas por los FPM a la actividad evaluativa. Este ítem se identificará como I3 y posee tres partes que se identifican como I3a, I3b e I3c.

Tipos de conocimientos generales en el ítem I3

Las respuestas dadas por los FPM a este ítem, como en los casos anteriores, evidencian tipos de conocimientos generales que son identificados como: conocimiento algorítmico, representativo e interpretativo y se denotan como CG (conocimiento general).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

La Tabla 10 presenta los tipos de conocimientos generales desplegados en ítem I3a. De los 19 FPM que realizaron la actividad evaluativa solamente ocho desplegaron conocimientos generales.

Tabla 10 – Tipos de conocimientos generales en ítem I3a

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	4	21
CG2	Representativo	3	15,8
CG3	Interpretativo	1	5,3
	En blanco	11	57,9
	Total	19	100

Fuente: elaborado por el autor

En la Tabla 10, se observa que el tipo de conocimiento general más desplegado por los FPM es el tipo CG1, sigue el conocimiento representativo y un solo caso despliega conocimiento interpretativo. Es alto el porcentaje de omisión de respuesta al problema planteado en este ítem.

De los conocimientos generales desplegados en ítem I3b por los FPM, sólo tres desplegaron un tipo de conocimientos. La Tabla 11 presenta los tipos de conocimientos generales desplegados en ítem I3b

Tabla 11 – Tipos de conocimientos generales de ítem I3b

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	3	15,8
CG2	Representativo	0	0
CG3	Interpretativo	0	0
	En blanco	16	84,2
	Total	19	100

Fuente: elaborado por el autor

De la tabla anterior se observa que los FPM despliegan solamente conocimiento general de tipo CG1 en un 15,8%. Notar que dieciséis FPM, que equivale al 84,2%, no trabajó esta actividad.

De los tipos de conocimientos generales desplegados en ítem I3c, solamente tres FPM desplegaron conocimientos generales. La Tabla 12 presenta los tipos de conocimientos generales en ítem I3c

Tabla 12 – Tipos de conocimientos generales en ítem I3c

Cód.	Tipo de conocimiento	Frec.	%
CG1	Algorítmico	0	0
CG2	Representativo	1	5,3
CG3	Interpretativo	2	10,5
	En blanco	16	84,2
	Total	19	100

Fuente: elaborado por el autor

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

De la tabla anterior se observa que los FPM despliegan conocimientos generales de tipo CG2 y CG3, aproximadamente en un 16% del total de repuestas. No se observó despliegue de conocimiento algorítmico en las respuestas de los FPM. Es alto el porcentaje de omisión de respuesta al problema planteado en este ítem.

Tipos de conocimientos específicos en ítem I3

A continuación se presentan los tipos de conocimientos específicos desplegados en este ítem, al igual que en los ítems anteriores se denotará como CE.

CE1. *Definición de amplitud*. Este tipo de conocimiento es desplegado cuando el FPM calcula la amplitud de la función presente en la actividad evaluativa usando la fórmula de amplitud |A|.

CE2. *Definición de periodo*. Este tipo de conocimiento es desplegado cuando el FPM calcula el periodo de la función y desarrolla la actividad evaluativa usando la fórmula de periodo $T = \frac{2\pi}{b}$.

CE3. *Definición de frecuencia*. Este tipo de conocimiento es desplegado cuando el FPM determina los ciclos que se completan en un segundo usando la definición de frecuencia $Frecuencia = \frac{1}{T}$.

CE4. *Interpretación de la función coseno*. Este tipo de conocimiento es desplegado cuando el FPM determina la máxima intensidad de corriente analizando el máximo valor que puede tomar la función coseno.

En la Tabla 13 se muestran los resultados de los tipos de conocimientos específicos desplegados en el ítem I3, de diecinueve FPM que trabajaron la actividad evaluativa, solamente ocho desplegaron algún tipo de conocimiento. Cabe destacar que, en algunos casos, los futuros profesores despliegan más de un tipo de conocimiento. Como ocho FPM desplegaron conocimientos específicos, se considera esta cantidad como el máximo para realizar el análisis.

Tabla 13 – Tipos de conocimientos específicos en ítem I3

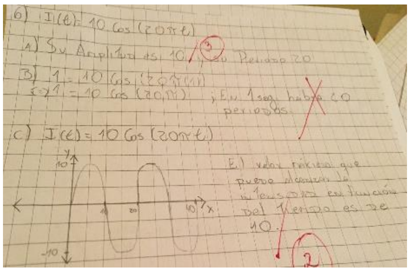
Cód.	Tipo de Conocimiento	Frec.	%
CE1	Definición de amplitud	8	88,8
CE2	Definición de periodo	1	11,1
CE3	Definición de frecuencia	1	11,1
CE4	Interpretación de la función coseno	3	33,3

Fuente: elaborado por el autor

De la tabla anterior se observa que el conocimiento específico más desplegado por los FPM en la actividad evaluativa correspondiente al ítem 3 es el CE1, este trata sobre el uso de la definición de amplitud para resolver la primera parte de la actividad; se observa, también, el conocimiento de tipo CE4. En menor porcentaje aparecen los conocimientos específicos CE3 y CE4. A continuación se presenta, en la Figura 4, la respuesta de un FPM a esta actividad

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

evaluativa, a través de la misma despliega conocimientos generales de tipo CG1 y CG2 y conocimientos específicos de tipo CE1 y CE4.



$I(t) = 10\cos(20\pi t)$

a) Su amplitud es 10 y su periodo 20

b) $1 = 10\cos\big(20\pi(1)\big) \rightarrow 1 = 10\cos(20\pi)$, en 1 seg habrá 20 periodos

c) $I(t) = 10\cos(20\pi t)$

El valor máximo que puede alcanzar la intensidad en función del tiempo es de 10

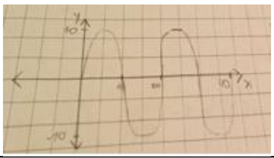


Figura 4 – Transcripción de respuesta
Fuente: registro de la actividad EvG1

El FPM responde la primera parte del ítem dando los valores de lo solicitado, sin justificación o cálculo (CE1: definición de amplitud); la segunda parte realiza una evaluación de la función trigonométrica entregada (CG1: algorítmico) en el ítem I3 reemplazando 1 en t para establecer la cantidad de periodos, y en la tercera parte, ayudándose del esbozo de la función trigonométrica determina la máxima intensidad de la corriente alterna (CG2: representativo y CE4: interpretación de la función coseno), considerando la transcripción anterior se analiza la respuesta del FPM, identificando las configuraciones epistémicas del enfoque ontosemiótico.

Situación-Problema: de esta configuración epistémica emergen distintos tipos de conocimientos generales y específicos asociados al ítem 3. En este caso la situación-problema es una aplicación de las funciones trigonométricas al análisis de corrientes eléctricas.

Lenguaje: el lenguaje utilizado para desarrollar el ítem 3 en la segunda configuración epistémica es lenguaje trigonométrico como coseno, amplitud, periodo, frecuencia. Se observa, también, lenguaje propio de las funciones y lenguaje propio de la contextualización como intensidad de corriente. Notaciones y símbolos como $\cos(20\pi t)$, $I(t)$ entre otras son también evidenciadas. Algunas expresiones algebraicas y numéricas son expresadas. Se observan, también, lenguaje cotidiano y lenguaje gráfico.

Conceptos y Definiciones: las situaciones-problemas motivan los conceptos y las definiciones. En este desarrollo el FPM evidencia conocimientos de funciones trigonométricas, evaluaciones, conceptos de optimización como valores máximos, además de nociones propias de la contextualización como amplitud, periodo e intensidad de corriente.

Procedimientos: la situación-problema puede ser obtenida a través de ciertos algoritmos y operaciones como evaluación de funciones trigonométricas, uso representativo de gráfico de la función para obtener la máxima intensidad.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

Propiedades y Teoremas: las configuraciones de los procedimientos y las proposiciones permiten al FPM resolver la situación-problema planteada. En el caso del ítem 3, el FPM evidencia el uso de nociones gráficas de funciones trigonométricas y sus evaluaciones.

Argumentos: en este caso, el FPM usa el razonamiento deductivo como la definición de amplitud, ciclo periodo y corriente alterna. Se observan, también, argumentos de tipo algebraico deductivo como evaluaciones de funciones trigonométricas, esbozo de gráficas de funciones para determinar la intensidad de corriente.

6 Discusiones y Conclusiones

El propósito de este trabajo fue indagar sobre tipos de conocimientos disciplinares y didácticos que ponen en juego los FPM que cursan la asignatura de introducción al análisis, de una universidad del sur de Chile, cuando realizan actividades evaluativas sobre funciones trigonométricas. La evidencia obtenida muestra que ellos despliegan conocimientos generales de tipo algorítmico, representativo e interpretativo, así como conocimientos específicos ligados a campos y sub campos de problemas obtenidos del análisis bibliográfico y de la revisión de los materiales de enseñanza de la asignatura.

En las actividades evaluativas analizadas de los FPM se observó que el conocimiento de tipo general *algorítmico* es desplegado principalmente por los FPM, siendo este conocimiento identificado en la resolución de cada una de las actividades desarrolladas por los FPM, por lo que se ha identificado el fenómeno de aritmetización trigonométrica (MONTIEL; JACOME, 2014) en el cual las situaciones-problemas fueron consideradas en un sentido aritmético, superponiéndose al geométrico y argumentativo. Producto de la naturaleza misma de la tarea matemática presentada a los FPM, el conocimiento general de tipo representativo fue evidenciado con mayor frecuencia en el ítem I1a y el conocimiento general interpretativo en el ítem I2c.

Las situaciones-problemas de *análisis de una función trigonométrica* y de *aplicación de función trigonométrica* presentadas en los ítems 2 y 3 generaron en los FPM un alto porcentaje de omisión (en blanco) en las respuestas a las actividades evaluativas, con un 65% en el primer caso, y un 74% en el segundo caso, mostrando que en el grupo analizado no se observó apropiación por parte de los FPM de algunos estándares orientadores declarados por el CPEIP y MINEDUC, en particular del estándar 13.

Aunque los problemas de los ítems 2 y 3 pueden ser resueltos correctamente bajo un contexto escolar de secundaria (15 a 17 años), el alto porcentaje de omisión de estos problemas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

pudieran estar evidenciando algunas falencias de tipo metodológico, ya que la actividad matemática presentada es una evaluación global de finalización de la asignatura de introducción al análisis. Visualizar estas falencias en los FPM permitirá indagar en las dificultades generadas en el proceso de instrucción que podrían estar impidiendo desarrollar las habilidades necesarias para abordar la resolución de problemas trigonométricos tal como es declarado en los estándares orientadores, además, conjeturamos que el alto porcentaje de omisión podría evidenciar dificultades en la comprensión o asociación de conceptos fundamentales (ESTEVES; GIUSTI-SOUZA; MASANOBO, 2016).

La configuración epistémica de *Situaciones-Problemas* considera las aplicaciones intra y extra matemáticos, así como tareas y ejercicios de los cuales observamos las actividades evaluativas contenidas en este trabajo y que hemos llamado ítem 1*: Problema de cálculo funciones trigonométricas* (actividad intra matemático), ítem 2: *Problema de análisis de funciones trigonométricas* (actividades de profundización conceptual), y finalmente ítem 3: *Problema de aplicación de funciones trigonométricas* (actividad extra matemático). Estas situaciones-problemas nos permiten determinar grados de apropiación de los conceptos trigonométricos (BALCAZA; CONTRERAS; FONT, 2017; MALASPINA; FONT, 2010) de los cuales emergen conocimientos generales y específicos.

La configuración epistémica de *Lenguaje* muestra que en las respuestas de los FPM existe conocimiento general de tipo aritmético en el uso de lenguaje y expresiones trigonométricas (razones seno, coseno y tangente, las funciones hiperbólicas, exponenciales, ángulos dobles y sumas de ángulos), y conocimiento general representativo a través de puntos, planos coordenados, gráficos, entre otros. Existe poco uso de lenguaje cotidiano en las respuestas de los FPM, lo que podría estar asociado a la falta o pérdida de los procesos geométricos en la reconstrucción de los procesos trigonométricos (VILLA-OCHOA; TAVERA, 2019). Además, esta falta de lenguaje apropiado en las respuestas dadas por los FPM a las actividades evaluativas podría dificultar la comprensión de las funciones trigonométricas (ESTEVES; GIUSTI-SOUZA; MASANOBO, 2016; GEA, 2014).

La configuración epistémica de *Conceptos y Definiciones* muestra que en las respuestas de los FPM se evidencian conocimientos sobre razones trigonométricas, suma de ángulos y el doble de un ángulo trigonométrico, nociones sobre la pertenencia del lado terminal de un ángulo en el plano, funciones hiperbólicas, dominio y recorrido de funciones hiperbólicas, inyectividad, sistemas coordenados conceptos de optimización como valores máximos, así como nociones propias de la contextualización de la aplicación presentada como amplitud, periodo e intensidad de corriente. El alto porcentaje de omisión en responder a las actividades

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

evaluativas por parte de los FPM al ítem 3 pone en evidencia que no siempre estos conceptos y definiciones son, por si solo, facilitadores de relaciones dinámicas (GEA, 2014; MONTIEL; JÁCOME, 2014) entre los elementos trigonométricos y la contextualización.

La configuración epistémica de *Procedimientos* muestra que en las respuestas de los FPM se evidencia, principalmente, conocimiento general aritmético y algebraico para resolver la situación-problema planteada. La utilización de esbozos de algoritmos y operaciones como uso de razones trigonométricas, el cálculo del ángulo doble, el cálculo de sumas de ángulos, el posicionamiento angular a través del signo de las razones trigonométricas, entre otras evidencia, por parte de los FPM, que la apropiación de ciertas herramientas clásicas trabajadas en la asignatura de introducción al análisis está centrada, principalmente, en lo procedimental y algorítmico que impiden trascender hacia lo interpretativo y argumentativo de los diferentes objetos trigonométricos (VILLA-OCHOA; TAVERA, 2019).

La configuración epistémica de *Propiedades y Teoremas* muestra que en las respuestas de los FPM se evidencia el uso de identidades trigonométricas fundamentales, identidades trigonométricas hiperbólicas y propiedades de razones trigonométricas como propiedades que permiten al FPM resolver la problemática planteada. Conocimiento general representativo emerge cuando se obtienen propiedades a partir del gráfico de la función. Aunque las principales propiedades y los teoremas básicos de trigonometría aparecen en los materiales de consulta de la asignatura, no se evidencia en las tareas evaluativas de los FPM énfasis en aspectos de significado y aspectos interpretativos (BATANERO *et al.*, 2015) más allá de énfasis de aspectos algorítmicos y procedimentales.

La configuración epistémica de *Argumentos* muestra que en las respuestas de los FPM se evidencian conocimientos generales de tipo algebraico deductivo a partir de ciertos conceptos y definiciones, como el uso de cuadrado de binomio, reemplazo de valores en las variables, determinación de dominios para concluir propiedades de inyectividad y el uso en varios procedimientos de la ejemplificación de la técnica a seguir. A este tipo de configuración se le denomina, en algunas ocasiones, formalista (FONT; GODINO, 2006).

Podemos indicar de la presente investigación dos importantes implicaciones: la primera, es un primer intento en caracterizar los tipos de conocimientos y razonamientos matemáticos que se evidencian en estudiantes de pedagogía, en los primeros años de formación profesional, al resolver actividades matemáticas, indicadores que pudieran estar presentes en la evaluación institucional Hito 1 que mide conocimientos disciplinarios y pedagógicos del perfil de egreso de los FPM. La segunda, nos permite analizar los conocimientos disciplinares y didácticos que despliegan los FPM al realizar actividades evaluativas y comprender los tipos de aprendizajes que están desarrollando los FPM en su formación universitaria.

Finalmente, indicamos que este trabajo de investigación es preliminar y el propósito es poder establecer una tipología de conocimientos que despliegan en un cierto nivel de formación. Otro aspecto importante a mencionar es de tipo metodológico y va orientado a identificar, establecer y definir la relación existente entre los textos de matemática declarados en el programa de la asignatura introducción al análisis y los tipos de conocimientos generales y específicos desplegados por los FPM al resolver actividades evaluativas de funciones trigonométricas, conjeturamos que esta relación puede ser causal.

Referencias

ALVARADO, H.; BATANERO, C. Significado del Teorema Central del Límite en textos Universitarios de Probabilidad y Estadística. **Estudios Pedagógicos**, Valdivia, v. 34, n. 2, p. 7-28, 2008.

ARANEDA, R.; URIBE, M. Reflexiones de Futuros Profesores en relación con Situaciones Contingentes en la Sala de Clases. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 32, n. 3, p. 178-208, 2020.

ARAYA, A.; MONGE, A.; MORALES, C. Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. **Actualidades Investigativas en Educación**. v. 7, 2007. Disponible en: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/9274/17732. Acceso: jueves 30 ag. de 2007.

BALCAZA, T.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Analisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 59, p. 1061-1081, dez. 2017.

BALL, D.; LUBIENSKI, L.; MEWBORN, D. Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teacher´s mathematical knowledge. *In:* RICHARDSON, V. (Ed.). **Handbook of research on teaching**. New York: MacMillan, 2001. p. 433-456.

BALL, D.; ROWAN, B. Introduction: Measuring instruction. **The elementary school Journal**, Chicago, v. 105, n. 1, p. 3-10, 2004.

BATANERO, C.; GEA, M.; DÍAZ-LEVICOY, D.; CAÑADAS, G. Objetos Matemáticos ligados a la regresión en los textos españoles de Bachillerato. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 27, n. 2, p. 9-25, 2015.

CHANDIA, E; HUENCHO, A.; RIVAS, H.; ORTÍZ, A. Conocimientos Desplegados por Estudiantes de Pedagogía en Educación Primaria al Diseñar una Tarea Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 393-614, ago. 2018.

MINEDUC. **Estándares Orientadores Para Carreras de Pedagogía en Educación Media**. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile, 2012.

MINEDUC. **Bases Curriculares de Educación Media**. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile, 2015.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

COLÍN, M.; ISLAS, C.; MORALES, F. **Diseño de una secuencia de aprendizaje de la trigonometría en el nivel medio superior**: Una experiencia en el Instituto Politécnico Nacional Debates en Evaluación y Currículum. Congreso Internacional de Educación Currículum. 2018. Disponible en: https://posgradoeducacionuatx.org/pdf2017/E133.pdf. Acceso: 03 ag. 2018.

DE KEE, S.; MURA, R.; DIONNE, J. La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, v. 16, n. 2, p. 19-27, 1996.

ESTEVES, M.; GIUSTI de SOUZA, V.; MASANOBO, P. A Transiçao das Razões para as Funções Trigonométricas. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 1927-1144, dez. 2016.

FERNANDEZ, F.; GODINO, J.; CAJARAVILLE, J. Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 39-63, abr. 2012.

FONT, V.; GODINO, J. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. **Educ. Mat. Pesqui.**, Sao Paulo, v. 8, n. 1, p. 67-98, 2006.

GEA, M. **La correlación y la regresión**: Análisis de libros de Textos y Conocimientos de los futuros profesores. 2014. Tesis (Doctorado en ciencias de la educación) – Universidad de Granada, Granada, 2014.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Lyon, v. 22, n. 2/3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Andujar, v. 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, J.; BATANERO, C. Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**. Lyon, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM Mathematics Education,** Karlsruhe, v. 39, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque Ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, abr. 2017.

HART, L.; SMITH, S.; SWARS, S.; SMITH, M. An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). **Journal of Mixed Methods Research,** Michigan, v. 3, n. 1, p. 26-41, 2009.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, P. **Metodología de la Investigación**. 5. ed. Ciudad: McGraw-Hill, 2010.

KENDAL, M.; STACY, K. Teaching trigonometry. Two methods of introducing trigonometry. **Australian Mathematics Teacher**, Adelaide, v. 54, n. 1, p. 34-39, 1998.

MALASPINA, U.; FONT, V. The role of intuition in the solving of optimization problems. **Educational Studies in Mathematics**. Charm, v. 75, n. 1, p. 107-130, 2010.

MARTIN, E.; RUIZ, J.; RICO, L. Significado escolar de las razones trigonométricas elementales**. Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 34, n. 3, p. 51-71, 2016.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a12

MENDOZA-HIGUERA, E.; CORDERO, F.; SOLIS, M.; GÓMEZ, K. El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objetivo a la Funcionalidad Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1219-1243, dez. 2018.

MONTIEL, G. **Desarrollo del pensamiento trigonométrico**. Ciudad de México. Subsecretaría de Educación Media Superior de la Secretaría de Educación Pública, 2013.

MONTIEL, G.; JÁCOME, G. Significado Trigonométrico en el Profesor. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1193-1216, dez. 2014.

MONK, D. Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement**. Economics of Education Review**, Cambridge, v. 13, n. 2, p. 125-145, 1994.

LÓPEZ, F. El análisis de contenido como método de investigación. **Revista de Educación,** Huelva, v. 4, p. 167-179, 2002.

OLFOS, R.; ZAKARYAN, D.; ESTRELLA, S.; MORALES, S. Vínculos y Brechas entre el Conocimiento Teórico y el Conocimiento Práctico Perceptual de una Futura Profesora en la Enseñanza de la Multiplicación de Expresiones Algebraicas. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 591-612, ago. 2019.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **PARADIGMA**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87-109, 2015.

RETAMAL, P. **Análisis de libro de textos, campos y subcampos de problema sobre funciones trigonométricas**. 2020, 116f. Disertación (Magister en Didáctica de la Matemática) – Facultad de Educación, Universidad Católica de la Ssma, Concepción, 2020.

RIVAS, M.; GODINO, J.; CASTRO, W. F. Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 559-588, ago. 2012.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THAWAITES, A. Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Charm, v. 8, n. 3, p. 255–281, 2005. DOI: doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5.

SANTANA, E; DA PONTE J.; SERRAZINA, M. Conhecimento Didáctico do Professor de Matemática à Luz de um Processo Formativo. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 66, p. 89-109, abr. 2020.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 57, n. 1, p.1-23, 1987. DOI: doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411.

VILLA-OCHOA, J.; TAVERA, F. La covariación en las tareas de los libros universitarios de precálculo: el caso de las razones trigonométricas. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1379-1399, dez. 2019.

WEBER, K. Teaching trigonometry functions; Lessons learned from research, **Mathematics Education Research Journal**. Melbourne, v. 17, n. 3, p. 91-112, 2008.

Submetido em 27 de Março de 2020.
Aprovado em 04 de Julho de 2021.