ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

Evaluación y desarrollo del enfoque intuitivo a la comprensión de probabilidades: alcances producidos por estudiantes de secundaria

Evaluation and development of the intuitive approach for understanding probabilities: Scopes produced by high school students

Hugo **Alvarado** Martínez*

ORCID iD 0000-0002-3729-3631

María Lidia **Retamal** Pérez**

ORCID iD 0000-0002-6696-0077

Christian **Peake*****

ORCID iD 0000-0002-7127-6501

Resumen

Se evalúa la asignación de valores a situaciones de incertidumbre desde las intuiciones probabilísticas en 41 estudiantes de secundaria (16-17 años) por medio de un cuestionario de once ítems cerrados. A continuación, se implementa un ciclo formativo de veinte horas cronológicas de probabilidades y sus representaciones en la vida cotidiana, y analizan los cambios producidos en las argumentaciones en dos ítems por los estudiantes. Los resultados indican mayor variabilidad en las intuiciones postest de los estudiantes en situaciones de contexto habitual y mejora significativa en conocimientos con argumentos probabilísticos. En consecuencia, se promueve una enseñanza de probabilidad, a temprana edad, de las intuiciones a la confrontación con el conocimiento formal y que tenga en consideración la experimentación, variadas argumentaciones, y las conexiones entre los significados de la probabilidad.

Palabras clave: Enseñanza. Probabilidad. Intuiciones. Razonamiento probabilístico. Educación secundaria.

Abstract

The assignment of values to situations of uncertainty is evaluated from probabilistic intuitions with 41 high school students (16-17 years old) through a questionnaire of eleven closed items. Then, we implemented a 20-hour formative cycle of probabilities and their representations in daily life and the analyzed the changes produced in the arguments written in two items by the students. The results indicate greater variability in the students' post-test intuitions of habitual context and significant improvement in knowledge with probabilistic arguments. Consequently, probability teaching is promoted at an early age, from intuitions to confrontation with formal

* Doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (UGR). Profesor asociado, Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), Concepción, Chile. E-mail: alvaradomartinez@ucsc.cl.

** Magister en Estadística de la Universidad de Concepción (UdeC). Profesora asociada, Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), Concepción, Chile. E-mail: lretamal@ucsc.cl.

*** PhD en Psicología, Universidad de La Laguna (ULL). Profesor Asociado, Facultad de Educación, Universidad Diego Portales (UDP), Santiago, Chile. E-mail: christian.peake@mail.udp.cl.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

knowledge and that considers experimentation, varied arguments, and the connections between the meanings of probability.

Keywords: Teaching. Probability. Intuitions. Probabilistic reasoning. Secondary education.

1 Introducción

Es alentador constatar que el currículo de matemática ha introducido la enseñanza de la probabilidad a través de todos los niveles en la institución escolar, acorde a las tendencias internacionales que responden a las demandas de la actual sociedad, debido al papel importante en el ámbito científico, y se encuentra, habitualmente, en múltiples situaciones sociales de interés en los medios de comunicación. Convenimos que una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones aleatorias, es capaz de modelarlas y cuida que sus creencias y concepciones no estén en contradicción con el razonamiento (LANDÍN; SÁNCHEZ, 2010). En particular, se promueve en los centros escolares desarrollar las habilidades de argumentar y modelar, entendiendo que argumentar es formular opiniones fundamentadas, verbalizando sus intuiciones y concluyendo correctamente, así como detectar afirmaciones erróneas o generalizaciones desmedidas (MINEDUC, 2015, 2019).

Las orientaciones en educación estadística indican que un aprendizaje significativo se favorece otorgando la oportunidad de nuevas experiencias de situaciones probabilísticas asociadas a los diversos significados de probabilidad (BATANERO, 2005), teniendo presente el aprendizaje desde las creencias e intuiciones propias de los estudiantes (BATANERO, 2015). No obstante, las investigaciones sobre la probabilidad y su enseñanza exponen dos preocupaciones que comentamos brevemente:

a. conceptos fundamentales de probabilidad, incluido los supuestamente elementales, se usan incorrectamente o no se comprenden (BATANERO; HENRY; PARZYSZ, 2005). Esto conlleva el interés en analizar las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico, y cómo las personas realizan juicios y toman decisiones cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre. En particular, estudios con profesores en ejercicio y futuros profesores de matemática, abordan la comprensión de la probabilidad intuitiva de las paradojas, los sesgos relacionados a la probabilidad condicional y la incorporación de los significados de la probabilidad (BATANERO *et al.*, 2012; BATANERO; CONTRERAS; DÍAZ, 2014; CONTRERAS *et al.*, 2010; CONTRERAS *et al.*, 2014; GÓMEZ; CONTRERAS; BATANERO, 2015; SANABRIA; NÚÑEZ, 2017). Existen experiencias de talleres con profesores de matemática, que han permitido iniciar la reflexión en relación a la práctica

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

docente sobre la enseñanza de probabilidad en la escuela y de los desafíos de apropiarse de nuevos conocimientos presentes en el currículo de estadística (BASTÍAS; ALVARADO; RETAMAL, 2017; CID; RETAMAL; ALVARADO, 2017; CONTRERAS *et al.*, 2011). Sin embargo, aunque la investigación sobre la enseñanza de probabilidad va en aumento, creemos necesario y oportuno disponer de programas de intervención con resoluciones diversas en el aula de probabilidad.

b. la cultura estocástica requiere no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los estudiantes a interesarse por mejorar su conocimiento, incluso finalizado su aprendizaje en la escuela o universidad (GAL, 2005). Esta falta de predisposición hacia el aprendizaje estocástico en adolescentes de secundaria puede situarse en que comúnmente han trabajado ejercicios de libros de texto escolares con aplicaciones de la probabilidad clásica, también llamada regla de Laplace, en contextos limitados a los juegos de azar, y no han tenido experiencias de desarrollar la probabilidad frecuencial y su conexión con la ley de los grandes números, siendo uno de los factores la falta de recursos tecnológicos en las instituciones escolares. Más aún, los estudiantes de secundaria no han sido confrontados a una enseñanza de probabilidades que valore e integre, creativamente, las intuiciones probabilísticas. Coincidimos que esta falta de atención restringe el impacto que puede tener el significado intuitivo de la probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico (ALVARADO *et al.*, 2018), y que se manifiesta en la docencia universitaria, los estudiantes de ingreso no llegan bien preparados en cuanto a la apropiación de conocimientos básicos de probabilidades. Así, no están dadas las condiciones para promover las conexiones entre los significados de la probabilidad.

Por lo anterior, consideramos importante situar la atención en las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza en estudiantes y profesores de matemática debido a que no es la esperada (ESTRADA; BATANERO, 2015; ESTRADA; BATANERO; DÍAZ, 2018; VÁSQUEZ; ALVARADO; RUZ, 2019). Estudios con profesores en formación y activo establecen que el profesor de matemática valora la utilidad y relevancia de la probabilidad en la vida personal y profesional, pero sugieren la necesidad de indagar en una estrategia didáctica que propicie la mejora de la actitud en esta materia (ALVARADO; ANDAUR; ESTRADA, 2018). Experiencias de aprendizaje con estudiantes de secundaria señalan que el uso de ambientes de aprendizaje activo – uso de la calculadora gráfica y recursos de juegos cooperativos y torneos – provocan un efecto positivo en las actitudes hacia la probabilidad y su aprendizaje (TAN; HARJI; LAU, 2011; VELOO; CHAIRHANY, 2013).

Nuestra preocupación proviene de la falta de estudios, orientado a adolescentes de la educación secundaria, acerca del impacto del enfoque intuitivo en la comprensión de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

probabilidad y la necesidad de diseñar un proceso de experimentación y confrontación de intuiciones probabilísticas y conexiones con los significados de probabilidad. Coincidimos que mediante la simulación podemos argumentar y rebatir las percepciones planteadas (BATANERO, 2015). En nuestro estudio, pretendemos guiar un acercamiento a la comprensión gradual de la probabilidad por medio de tres representaciones diferenciadas para promover una actitud positiva hacia el aprendizaje de la probabilidad.

El propósito del estudio ha sido evaluar y desarrollar el razonamiento probabilístico en estudiantes de educación secundaria, mediante la argumentación que hacen cuando realizan un ciclo formativo de probabilidades, al incorporar elementos mediacionales en el proceso inicial de aprendizaje estocástico. Intentamos indagar en ¿Cómo los estudiantes de secundaria asignan valores a situaciones de incertidumbre desde sus intuiciones probabilísticas? y ¿Qué argumentos utilizan los estudiantes de secundaria respecto a sus intuiciones, heurísticas y conceptos probabilísticos después de un ciclo formativo?

2 Marco de Referencia

2.1 Currículo de probabilidad en la institución educativa

Las bases curriculares de Matemática, a nivel internacional, proponen una trayectoria de enseñanza de probabilidad y estadística desde la primaria, contemplando el desarrollo de las intuiciones probabilísticas con actividades de asignación cualitativa (imposible, probable y seguro) y cuantitativa (fracciones y porcentaje). Esto ha llevado a constantes procesos de cambios significativos en los contenidos curriculares de Matemática 2015 y 2019 de Chile. Han experimentado un proceso transitorio, desde un aumento de contenidos de probabilidad y estadística (MINEDUC, 2015) hacia una propuesta de ajustes curriculares aplicado al ámbito científico-social contextualizado (MINEDUC, 2019), separando los contenidos en un ciclo común grados 9 y 10 (edades 14 y 15 años) y un ciclo electivo grados 11 y 12 (edades 16 y 17 años).

El actual currículo (MINEDUC, 2019) propone la siguiente progresión de objetivos de aprendizajes de probabilidad: realizar, registrar y representar experimentos aleatorios en los grados 2, 3 y 4 (edades entre 7 y 9 años). En los grados 5, 6 y 7 estimar probabilidades y comparar tanto las probabilidades de distintos eventos sin calculadora y frecuencias relativas de un evento con la probabilidad teórica usando diagrama de árbol, tablas o gráficos, y en el grado 8 calcular la probabilidad de un evento compuesto.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

La progresión continúa en educación secundaria, grados 9 y 10 (edades 14 y 15 años), con los objetivos pretendidos de calcular probabilidades mediante el desarrollo de las reglas de las probabilidades, las reglas aditiva y multiplicativa, además de utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas. Otro objetivo es comprender las probabilidades, mostrando que comprenden el concepto de azar a través de la experimentación del aparato de Galton y con paseos aleatorios sencillo, de manera manual y/o con *software* educativo, así como mostrar que comprenden las variables aleatorias discretas y el rol de la probabilidad en la sociedad revisando informaciones de los medios de comunicación y explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.

En el ciclo electivo grados 11 y 12 de la educación secundaria de Chile, denominado probabilidades y estadística descriptiva e inferencial, no son menores los objetivos de aprendizaje relacionados con la probabilidad. Las preguntas que orientan la unidad de probabilidad son ¿cómo se modelan las situaciones de incerteza? ¿cómo las distribuciones de probabilidades de sucesos permiten tomar decisiones? Específicamente, se espera que los estudiantes sean capaces de: a) modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal, b) resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos, c) construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas y d) buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

En la Educación Superior se intenta introducir el razonamiento con modelos estocásticos, como la distribución binomial y normal, y mostrar su utilidad en situaciones reales con un enfoque formal. Sin embargo, no está contemplado el desarrollo de las ideas informales y creencias sobre probabilidades y la trascendencia que pueden tener las intuiciones correctas e incorrectas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Reflexionamos que el exceso de contenidos de probabilidad en el sistema escolar dificulta el aprendizaje de los estudiantes e impide profundizar en el alcance potencial de las ideas fundamentales en la ciencia y la vida cotidiana. El currículo no concede evidencia de la articulación de las ideas informales y creencias sobre las probabilidades que tienen los estudiantes con el razonamiento formal de probabilidad.

Otro de los factores que inciden en la enseñanza de probabilidades es la débil formación de los profesores en esta rama de la matemática, habiéndose detectado dificultades de comprensión de la probabilidad intuitiva (BATANERO *et al.*, 2012) y del significado de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

probabilidad (GÓMEZ; CONTRERAS; BATANERO, 2015). Para Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018) el diseño de un proceso de estudio es adecuado, con mayor idoneidad epistémica, si están representados y articulados los significados de probabilidad informal, subjetivo, frecuencial y clásico en los niveles educativos de primaria y secundaria.

Con la intención de proporcionar orientaciones de diseño de enseñanza de la probabilidad, consideramos relevante indagar en el tema sobre conexiones entre la probabilidad intuitiva, frecuencial y axiomática, con una participación activa de los actores, los estudiantes de educación secundaria de los grados 11 y 12.

2.2 Razonamiento probabilístico y su desarrollo

Watson (2006) señala que la alfabetización estadística es un punto de encuentro de la estadística y la probabilidad del mundo actual. Convenimos con Gal (2005) que la alfabetización probabilística tiende a mantenerse incluida en las definiciones de alfabetización estadística, y pensamos que ensombrece su magnitud y beneficio en la formación de ciudadanos críticos. Siguiendo los estudios de alfabetización estadística (GARFIELD; BEN-ZVI, 2008; WATSON, 2006; WILD; PFANNKUCH, 1999), concebimos en un proceso idóneo de enseñanza de probabilidad acentuar la asociación entre la apropiación de ideas principales de probabilidades y el desarrollo del razonamiento probabilístico.

En relación a las ideas fundamentales de probabilidad, Sánchez; Valdez (2017) afirman que la articulación de los significados de probabilidad requiere razonar con las ideas fundamentales de *aleatoriedad*, *variabilidad* e *independencia*, indicadas por Gal (2005). Estos autores señalan que, matemáticamente, la articulación es provista por la ley de los grandes números, pues su formulación incluye estas tres ideas. La aleatoriedad está referida a los resultados de experimentos aleatorios y la variabilidad en probabilidad se entiende como las diferencias entre las frecuencias relativas y la probabilidad de los eventos.

La independencia es una idea probabilística importante y difícil, es un proceso subjetivo y que no siempre es adquirido intuitivamente por niños y adultos (TRURAN; TRURAN, 1999). La independencia tiene lugar cuando el resultado de un suceso no altera las probabilidades de otros sucesos del mismo experimento, y su definición utiliza la regla de la multiplicación. Tendremos presentes estos conceptos importantes junto con las ideas de probabilidad condicional y probabilidad del modelo binomial.

A partir del énfasis de estas ideas importantes emergen las cuestiones ¿cómo desarrollar a temprana edad las intuiciones probabilísticas? y ¿cómo favorecer el razonamiento en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

situaciones aleatorias con argumentación probabilística? Nisbett y Ross (1980) afirman que un correcto razonamiento intuitivo sobre conceptos abstractos, tales como la probabilidad binomial contextualizados en múltiples problemas reales de modelación, se promueve siempre que reconozcamos la situación como aleatoria. Kahneman, Slovic y Tversky (1982) sugieren poner atención a las heurísticas y sesgos de razonamiento, pues son resistentes a la enseñanza evidenciada en distintos niveles educativos.

Pensamos que faltan estudios que pongan en juego la capacidad para distinguir las creencias intuitivas de las convicciones con sustento en adolescentes de secundaria. En términos de Fischbein (1987), plantea como un serio error no considerar la confianza que tienen los estudiantes en sus intuiciones, sugiriendo que hay que tomar conciencia en que se poseen intuiciones correctas y útiles, y que deben lograr ser capaces de controlar nuestras intuiciones de forma de llegar a comprender (asimilar) de manera adecuada las estructuras formales propias del razonamiento lógico. Tversky y Kahneman (1980) en su estudio sobre razonamiento probabilístico clasificaron tres tipos de heurísticas: representatividad, disponibilidad, y ajuste-anclaje.

En nuestra investigación, analizamos la heurística de la disponibilidad que surge de una situación cuando una persona estima la frecuencia o probabilidad por la facilidad con las asociaciones que trae a la mente y no por acontecimientos objetivos, provocando sesgos y llevando a la creencia que los sucesos más frecuentes o las emociones más recientes corroboran las suposiciones en todos los casos, o que se pueden aplicar a cualquier situación. En particular, tendremos en cuenta las adaptaciones mediacionales propuestas en un taller de probabilidades, proporcionando oportunidades a estudiantes de educación secundaria para que analicen sus esquemas intuitivos y conocimientos básicos y, así, detectar las dificultades de razonamiento presentes en contextos aleatorios (FISCHBEIN; SCHNARCH, 1997).

3 Metodología

A continuación, se describe la población objetivo, diseño de una trayectoria didáctica de un ciclo formativo en probabilidades y la elaboración de un conjunto de ítems sobre probabilidad.

3.1 Participantes

La investigación fue desarrollada con 41 estudiantes de educación secundaria de los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

grados 11 y 12, de edades 16 y 17 años, de los cuales treinta (73,2%) son mujeres. La pertenencia del grupo alcanzaba diez establecimientos educacionales (ver Tabla 1), algunos clasificados con índice de vulnerabilidad escolar bajo.

En el proceso de selección de estudiantes se extendió una invitación a los establecimientos educaciones de una región del sur de Chile. La preselección establecía completar un cuestionario online sobre probabilidades en la vida cotidiana. Los estudiantes aceptados son considerados destacados en su institución con habilidades en matemática; en escala de 1,0 a 7,0 del establecimiento obtenían una calificación promedio de 6,3 y desviación estándar 0,54. Su participación fue libre y por propia elección de un taller de probabilidades, fuera del horario de clase escolar, los días sábados por la mañana durante un mes, como un programa de enriquecimiento, paralelo y complementario a la educación formal.

La muestra fue intencional, buscando la heterogeneidad en términos de Cook y Campbell (1979). En este tipo de muestreo, se define una clase de estudiantes, tiempos y se incluye en el diseño, un rango amplio de estas clases. El grupo de estudiantes no han recibido educación formal en Azar y Probabilidad, pero están en condiciones de explorar y desarrollar razonamiento probabilístico en un taller con horas de aula y laboratorio de computación.

Tabla 1 – Número de estudiantes de secundaria según grado escolar

	Grado 11	**Grado 12**	**Estudiantes (%)**
Municipal	7	0	7 (17,07)
Particular Subvencionado	11	11	22 (53,66)
Particular Pagado	5	7	12 (29,27)
	23 (56,10)	18 (43,90)	41

Fuente: elaborado por el autor

3.2 Trayectoria didáctica

3.2.1 Bases para una propuesta didáctica

El plan de intervención de un ciclo formativo, en adelante taller, consideró un acercamiento global a la comprensión de las ideas importantes de probabilidad por medio de los siguientes elementos.

Aproximaciones a la noción de la probabilidad. Diferenciamos tres nociones en este nivel educativo.

• *Significado intuitivo* de la probabilidad: los estudiantes deben ser capaces de diferenciar las situaciones aleatorias de las deterministas, es decir, que aprendan las características de un suceso aleatorio. Los conceptos que surgen son aleatoriedad y variabilidad,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

suceso seguro, posible e imposible, posibilidad y grado de creencia. En el significado intuitivo, estas expresiones permiten comparar y ordenar según valor otorgado, y no hay formalismo matemático.

• *Significado clásico* de la probabilidad: se define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de todos los casos posibles, siempre que todos sean equiprobables. Los conceptos que emergen son juego de azar, casos favorables y casos posibles, probabilidad como cociente.

• *Significado frecuencial* de la probabilidad: en este caso, se obtiene una estimación experimental de la probabilidad. Su valor teórico sería el límite de la frecuencia relativa de aparición del suceso al realizar la experiencia un número infinito de veces en las mismas condiciones. Un aspecto importante, en este enfoque, es comprender la diferencia entre probabilidad (valor teórico constante que nunca alcanzamos) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). Hacemos notar que los resultados de una experiencia son impredecibles, pero se puede predecir el comportamiento general de un gran número de resultados. Los conceptos que emergen son frecuencia, experimento aleatorio, infinito, ensayo y ensayos repetidos.

Representaciones diferenciadas. El estudio de la probabilidad en la escuela está en una etapa de replantearse un cambio en los métodos de enseñanza que se utilizan, producto de que sus alumnos usan comúnmente el lenguaje de la tecnología. Siguiendo la descripción de configuraciones epistémicas de un proceso de estudio (ALVARADO, 2007), las actividades que se planearon en el taller condujeron a la apropiación progresiva de los significados de la probabilidad mediante tres tipos de representaciones para argumentar los experimentos aleatorios.

• Representación manipulativa: el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas, ...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparece la noción de experimento aleatorio y se argumenta mediante ejemplos y contraejemplos. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.

• Representación algebraica: se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra, los procedimientos serían analíticos.

• Representación computacional: Se amplía la variedad de gráficas dinámicas. Además del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación, permite trabajar el cálculo de probabilidades y dedicar tiempo a la interpretación de gráficas elaboradas. No posibilita el lenguaje algebraico ni la demostración deductiva. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos, contraejemplos y la generalización. Aparecen conceptos tales como la ley de los grandes números y experimento de probabilidad binomial.

3.2.2 Descripción del taller

El diseño de la secuencia de aprendizaje del taller consideró cinco sesiones, cada una de cuatro horas cronológicas, con planteamiento de situaciones cotidianas, manipulación de generadores aleatorios típicos y uso de la simulación. Cada sesión comprendía dos horas con actividades propuestas a los estudiantes en el aula y dos horas de laboratorio de computación, destacando la simulación vía la planilla Excel. El taller estaba conformado por tres docentes universitarios, con más de quince años en la formación de estudiantes y profesores; dos de ellos orientaban las actividades principalmente de aula y uno coordinaba las actividades prácticas de laboratorio. Los principales temas que se abordaron fueron las intuiciones sobre el azar, significados de la probabilidad, probabilidad condicional, ley de los grandes números y modelo de probabilidad binomial, tópicos que están presentes en los programas de estudio de Matemática de Educación secundaria. Los objetivos pretendidos, tanto en el aula como en el laboratorio de computación, fueron los siguientes: reflexionar sobre la utilidad de la probabilidad en el análisis de las situaciones aleatorias – valorar el uso sistemático y didáctico de las intuiciones y heurísticas en las prácticas de la enseñanza de la probabilidad – explorar la ley de los grandes números por medio de la repetición de experimentos aleatorios y sus aplicaciones en la asignación de probabilidades – resolver problemas de la vida cotidiana donde emergen los significados de la probabilidad y el uso del modelo de probabilidad binomial.

Previo a la implementación del taller, se les pidió a los estudiantes completar un cuestionario online de once ítems, con el propósito de evaluar su percepción sobre probabilidades en situaciones cotidianas, y nueve ítems de conocimientos de probabilidades, sin uso de la calculadora, todo en un tiempo de sesenta minutos. Como consecuencia, de las dificultades declaradas en el cuestionario de entrada, se llevó a cabo una primera experiencia de un ciclo formativo con los participantes. En las sesiones del taller, los estudiantes desarrollaron diversas actividades con lápiz y papel en el aula y trabajaron las simulaciones de experimentos aleatorios en el laboratorio, obteniendo argumentaciones iniciales y finales escritas. Entendemos por recursos didácticos a todos aquellos instrumentos que facilitan la comunicación hacia la exploración, aplicación y argumentación de conceptos importantes para la enseñanza de la probabilidad.

Una de las actividades de representación computacional, desarrollada en el laboratorio

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

por los estudiantes, fue la siguiente: *en un establecimiento educacional de Concepción se seleccionan 2000 estudiantes y cada uno lanza dos dados de seis caras. Estime qué porcentaje de los estudiantes obtendrían un resultado mayor que 6*. Por ejemplo, uno de los estudiantes aplicó la ley de los grandes números; primero experimentó la simulación de 100 lanzamientos en Excel, obteniendo 68 casos cuya suma de los dos dados es superior a 6, alcanzando una frecuencia relativa de 0,68 (ver Tabla 2). Continúo realizando más simulaciones, encontrando 57,7% de los 2000 estudiantes que deberían cumplir con la condición.

Tabla 2 – Simulación del lanzamiento de dos dados

Lanzamientos	D1+D2 > 6	Porcentajes
100	68	0,68
1000	585	0,585
2000	1154	0,577
5000	2905	0,581

Fuente: elaborado por el autor

Luego, en base a la gráfica (ver Figura 1) comunica que, para un número grande de simulaciones 2000 y 5000, la estimación del porcentaje de estudiantes que obtendrían resultados de la suma de dos dados mayor a 6 es cercana al valor teórico de probabilidad 21 de 36 casos posibles, es decir, 0,58333.

Figura 1 – Experimento del lanzamiento de dos dados
Fuente: elaborado por el autor

El taller asumió como propósito otorgar una enseñanza, en el sentido de Cabrera (2011), promotora de desafíos cognitivos que responden a las características cognitivas de los estudiantes. El rol del profesor-investigador consistió en promover la discusión en pleno del curso y la exposición de las diversas representaciones y respuestas de los alumnos. La metodología de esta parte de la investigación se encuadra en los métodos cualitativos y, más particularmente, en la observación participante, puesto que el investigador convive con los individuos que estudia y refleja sus actividades e interacciones en notas de campo que toma durante o inmediatamente después de los hechos (GOETZ; LECOMPTE, 1988).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

3.3 Elaboración de instrumentos de medida

Un set de ítems se elaboró sobre probabilidades, adaptando algunos ítems de evaluación de nociones estadísticas y probabilísticas elemental (KONOLD; GARFIELD, 1993), razonamiento proporcional y combinatorio en las probabilidades elementales (CAÑIZARES, 1997) e ítems de probabilidad intuitiva (ALVARADO *et al*., 2018; TAPIA; ALVARADO, 2019). En este estudio, presentamos el cuestionario compuesto de trece ítems, once de ellos cerrados y dos ítems abiertos. Los primeros once ítems evaluaban el grado de creencia de probabilidades, en escala ordinal de 10 en 10 dentro de un rango de 0 a 100. El Cuadro 1 precisa los once ítems del cuestionario aplicado y su objetivo de evaluación:

Ítem	Objetivo de evaluación
1. Visitar un hospital seleccionar un bebé y que sea de sexo masculino	Autopercepción del contexto
2. Llegar a los 80 años de edad en Chile	Autopercepción del contexto
3. Ser un joven chileno donante de órganos	Autopercepción del contexto
4. Que los estudiantes de último año de tu colegio obtengan sobre 500 puntos en la Prueba de Matemática de ingreso a la Universidad	Autopercepción del contexto
5. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero	Relación de causalidad
6. En un grupo de 23 personas, ¿qué tan probable es que hallan dos personas que cumplan años el mismo día y mes?	Paradoja del cumpleaños
7. Una familia se proyecta tener tres hijos. ¿Qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?	Confusión entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional
8. Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes.	Razonamiento combinatorio, Heurística de disponibilidad
9. Si se lanza una moneda tres veces, ¿qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron caras?	Confusión entre probabilidad condicional y probabilidad clásica de Laplace
10. En una encuesta de opinión el 25% está de acuerdo de enviar tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a cuatro estudiantes de tu colegio, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas?	Modelar experimentos binomiales
11. En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?	Aplicar la ley de los grandes números

Cuadro 1 – Cuestionario de probabilidades y objetivo de cada ítem
Fuente: Adaptado de Alvarado *et al*. (2018) y Tapia *et al*. (2019)

3.4 Respuestas esperadas a los ítems cerrados

Los ítems 1, 2, 3 y 4 ponen en juego las intuiciones de los estudiantes de secundaria como grado de creencia personal en el propio contexto de la vida real, vivenciando la confrontación de su razonamiento probabilístico con las ideas intuitivas. El ítem 1 puede ser relacionado con el experimento del lanzamiento de una moneda, obteniendo una asignación de 50 en encontrar un bebé varón. El Instituto Nacional de Estadística registró un 50,83% de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

nacimientos varones, y por lo tanto se espera resultados entre 50 y 60 cada 100 nacimientos. En cambio, se espera una asignación al menos de 70 en el ítem 2 ya que la esperanza de vida en Chile tiene media de 80,5 años. El ítem 3 de autopercepción de los donantes del país es baja, la Sociedad Chilena de Trasplante ha indicado que 30% de los jóvenes se declara donante de órganos. Por lo tanto, se espera un valor inferior a 30. El ítem 4 propone explorar la percepción que tienen estos estudiantes sobre el puntaje que obtendrían la promoción de egresados de su colegio en la prueba de selectividad en matemática. En base a resultados del Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE, 2015) se espera una asignación baja de a lo más 50.

El ítem 5 se relaciona con el razonamiento causal y proviene de estudios de Pollatsek *et al.* (1987) y Tversky y Kahneman (1974). La expectativa es que los estudiantes utilicen un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de que en Chile es muy valorada la profesión de ingeniero, se espera una asignación alta sobre el valor de escala 70. El ítem 6 es un enunciado conocido como la paradoja del cumpleaños, establece que en un grupo de *n* personas, la probabilidad de encontrar a otra persona que cumpla años el mismo día y mismo mes es: $1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$ En este caso, la probabilidad en un grupo de 23 personas corresponde a un 50,7%. Así, se espera una asignación baja inferior a 20.

Los ítems 7, 8, 9, 10 y 11 implican soluciones mediante conocimientos de probabilidades. El ítem 7 comprende la independencia de eventos que se define mediante la probabilidad conjunta. Al definir los sucesos A_i : el hijo i-ésimo es hombre, con i = 1, 2, 3 se determina la probabilidad que en una familia con tres hijos los dos primeros sean varones y el tercero mujer, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3^c) = ½ \times ½ \times ½ = 1/8$, esto es, 12,5%. Para este ítem se espera una asignación de a lo más 20.

El ítem 8 evalúa la heurística de la disponibilidad a través de un razonamiento combinatorio, dada la situación que un profesor con diez estudiantes dice obtener más grupos distintos de dos estudiantes que de ocho estudiantes. Se espera una asignación baja, de valor a lo más 10, en correspondencia con los resultados de Tversky; Kahneman (1974) y Salcedo y Mosquera (2008). En efecto, por medio de elementos de combinatoria, con diez estudiantes se obtienen 45 grupos, sean de dos o de ocho estudiantes. En el enunciado del ítem 9 hay que tener presente que la probabilidad condicional de obtener sello en el tercer lanzamiento dado que los dos primeros fueron caras es simplemente la probabilidad de obtener sello en el tercer lanzamiento, esto por la independencia de eventos. Se espera una asignación de 50.

La solución del ítem 10, si la opinión de estar de acuerdo es de un 25% la probabilidad

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

de que uno de los cuatro estudiantes esté de acuerdo con el envío de tareas para el hogar corresponde a un 42,1875%, obtenido por la probabilidad del modelo binomial. Para este ítem se espera una asignación de 40 a 50. Por último, el ítem 11 comprende la ley de los grandes números (LGN), al lanzar tres monedas la probabilidad que todas sean caras se obtiene por $1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$. La LGN señala que aproximadamente un 12,5% del total de personas obtendrán tres caras después de lanzar las monedas. Se espera una asignación de valor a los más de 20.

4 Resultados y discusión

Los resultados son presentados en apartados distintos, en acuerdo con los temas expresados en los ítems.

4.1 Estimando valores de probabilidad como grado de creencia personal

4.1.1 Resultados de los ítems cerrados 1 al 11 según variabilidad

La Figura 2 presenta la distribución de las respuestas de los primeros once ítems cerrados dada por 41 estudiantes participantes al finalizar el taller (respuestas postest), acerca de su grado de creencias en situaciones de contexto cotidiano (ítem 1, 2, 3 y 4), de sus razonamientos de causalidad (ítem 5), la paradoja del cumpleaños (ítem 6) y de conocimientos básicos de probabilidad (ítems 7 al 11).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

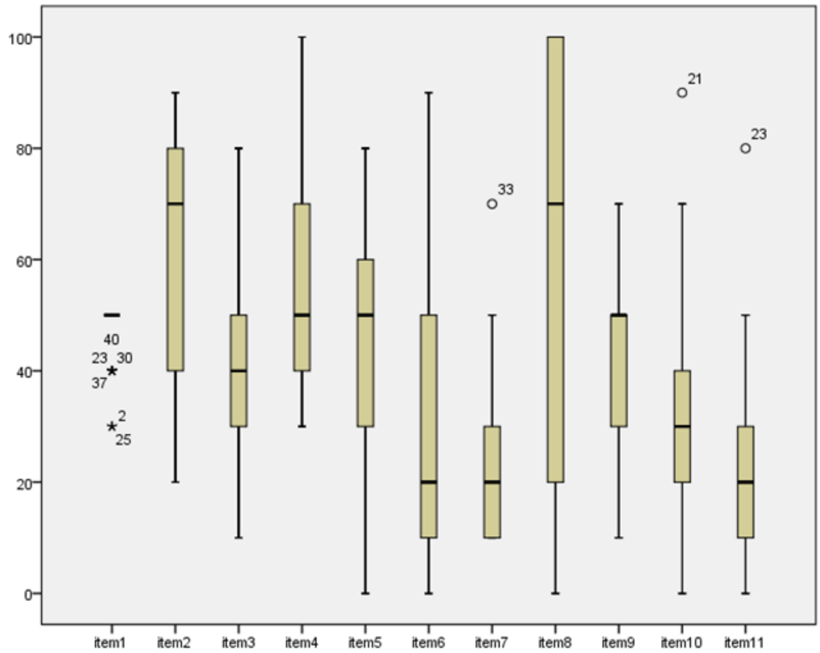


Figura 2 – Distribución de respuestas postest a 11 ítems según escala de apreciación (n = 41). Respuestas esperadas: ítem 1 = 50 a 60; ítem 2 = sobre 70; ítem 3 = bajo 30; ítem 4 = bajo 50; ítem 5 = sobre 70; ítem 6 = bajo 20; ítem 7 = bajo 20; ítem 8 = bajo 10; ítem 9 = 50; ítem 10 = 40 a 50; ítem 11 = bajo 20
Fuente: elaborado por el autor

El gráfico de cajas compara la distribución de cada ítem, presentando una alta y variada dispersión en las asignaciones de probabilidades a los 11 ítems, siendo los ítems 2, 6 y 8 los de mayor variabilidad en relación al centro de los datos, con rangos intercuartil de 40, 45 y 80 respectivamente de las respuestas de los estudiantes. El ítem 8 (heurística de disponibilidad) muestra que al menos las tres cuartas partes de los estudiantes tienen una concepción errada, pues asignan un valor entre 20 y 100 de obtener más grupos mientras menor es la selección de subgrupos del conjunto. En cambio, el ítem 2 (autopercepción del contexto) e ítem 6 (paradoja del cumpleaños) la mitad de los estudiantes presentaron valores alejados de los esperados. Respecto a los ítems de mayor rango o recorrido destacan el ítem 8, ítem 6, ítem 10 (modelo binomial), ítem 5 (relación de causalidad) e ítem 11 (LGN) con valores de al menos 80.

Hacemos notar que el ítem 1 (autopercepción del contexto) la mayoría de los estudiantes respondieron según la respuesta esperada de obtener 50 nacimientos hombres de 100 en un hospital, es decir, asignaron ½ al pensar que el espacio muestral es equiprobable (hombre y mujer). 71,9% de los estudiantes de primaria (edades 12 y 13 años) asignaron un valor de 50 de probabilidad de elegir un bebé en el hospital y que sea varón (TAPIA; ALVARADO, 2019) y 72,9% en el caso de profesores de matemática (BASTÍAS; ALVARADO; RETAMAL, 2017). Según Tversky y Kahneman (1974) ante este tipo de preguntas de respuestas sencillas existe un sesgo predecible, en donde las personas obvian los datos estadísticos reales.

En el ítem 5, que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero, 8,7% de los estudiantes

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

de secundaria asignaron valores sobre 70 en la asignación intuitiva de probabilidad, resultados similares obtenidos con estudiantes universitarios 12,8%, profesores de matemática 10,2% y estudiantes de primaria 20,1% (ALVARADO *et al.*, 2018; BASTÍAS; ALVARADO; RETAMAL, 2017; TAPIA; ALVARADO, 2019). Estos resultados no coinciden con lo que señala Pollatsek *et al.* (1987), que indican que la mayoría de los encuestados encontraban altamente probable esta situación. Así, a pesar de contar con un taller formativo, los estudiantes de este nivel educativo escasamente utilizan un razonamiento causal al estimar la probabilidad bajo la condición que el padre es ingeniero.

4.1.2 Resultados de los ítems 7, 8, 9, 10 y 11

En lo que sigue, se realiza un análisis descriptivo de los ítems que involucran conocimientos básicos: probabilidad conjunta (ítem 7), razonamiento combinatorio (ítem 8), probabilidad condicional (ítem 9), modelo de probabilidad binomial (ítem 10) y ley de los grandes números (ítem 11). Éstos fueron seleccionados para comparar las asignaciones de valores estimados en dos momentos del taller, al inicio (respuestas pretest) y al final (respuestas postest), respondidos por 41 estudiantes.

Veamos la Figura 3.

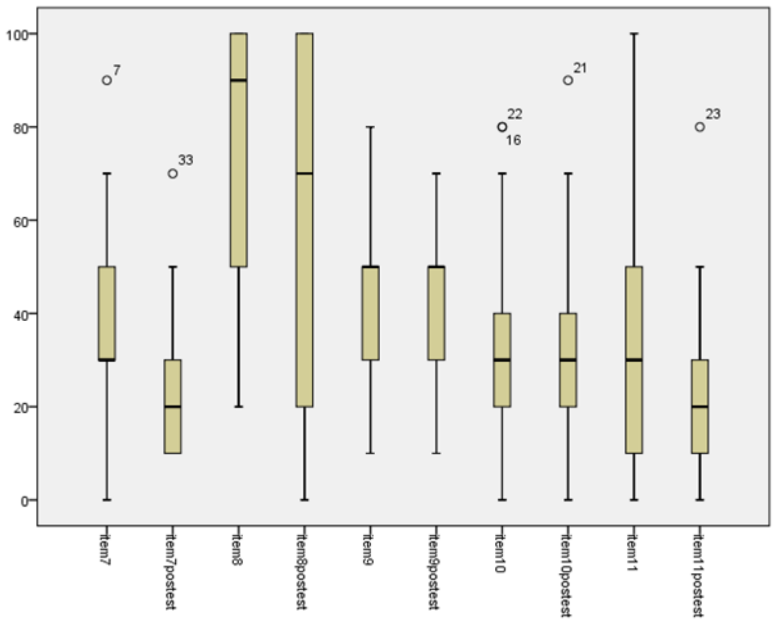


Figura 3 – Distribución de respuestas pretest y postest a cinco ítems (n = 41). Respuestas esperadas: ítem 7 = bajo 20; ítem 8 = bajo 10; ítem 9 = 50; ítem 10 = 40 a 50; ítem 11 = bajo 20
Fuente: elaborado por el autor

La Figura 3 presenta, a diferencia del ítem 8, una baja dispersión en las asignaciones de probabilidades en los ítems 7, 9, 10 y 11, todos con rangos intercuartil de tan sólo 20 en las

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

respuestas de los estudiantes al finalizar el taller (ver Tabla 3). Por otro lado, las respuestas pretest de los estudiantes al inicio del taller registraron dispersiones mayores con rangos intercuartil entre 20 y 50 en los cinco ítems.

Tabla 3 – Estadísticos de las respuestas pretest y postest a los ítems de conocimientos

	Item7		**Item8**		**Item9**		**Item10**		**Item11**	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
(respuesta esperada)	(bajo 20)		(bajo 10)		(50)		(40 a 50)		(bajo 20)	
Cuartil 1	25	10	50	20	30	30	15	20	10	10
Mediana	30	20	90	70	50	50	30	30	30	20
Cuartil 3	50	30	100	100	50	50	45	40	50	30
Rango Intercuartil	25	20	50	80	20	20	30	20	40	20

Fuente: elaborado por el autor

La mitad de los participantes logró respuestas postest según lo esperado en cuanto a conocimientos de probabilidad conjunta (ítem 7) siendo mejores que las respuestas al inicio del taller. Cabe destacar, experiencias con estudiantes universitarios en este ítem, 22,4% señalaron valores bajo 20 y de 20,7% para el caso de alumnos de primaria. En nuestro caso, después de realizar el taller, fue mayor alcanzando el 50% de respuestas esperadas.

Posibles respuestas erróneas se deben a la confusión entre la probabilidad condicional y conjunta (FOX; LEVAV, 2004), dificultad de los estudiantes en los enunciados de problemas de probabilidad condicional (POLLATSEK *et al.*, 1987) o emergencia del sesgo de equiprobabilidad como primera respuesta intuitiva de ½ al calcular sólo la probabilidad de que ocurra el tercer suceso, ser mujer (ALVARADO *et al.*, 2018).

De igual manera ocurre con la ley de los grandes números (ítem 11), obteniendo respuestas esperadas de 50% del grupo de estudiantes participantes al taller, y son mayores a las obtenidas al inicio del taller, y mejor comparado con alumnos de primaria que fue 17,7%. Al parecer hay dificultades en la conexión probabilidad experimental y teórica por medio del significado frecuencial de la probabilidad (PARRAGUEZ *et al.*, 2017).

4.2 Resultados de dos ítems de conocimientos de probabilidad

A continuación, se analiza un ítem de opción múltiple (ítem 12) de nueve presentados en el cuestionario a 41 estudiantes que participaron del taller, y un ítem abierto desarrollado en una de las sesiones del taller (ítem 21).

Ítem 12. Se tiene una urna con 3 bolas; una bola con letra A, una con letra B y otra con letra C. Imagina que sacas una bola al azar y anota su letra. Regresa la bola a la urna. Se repite 300 veces el experimento. ¿cuantas veces crees que saldrá cada bola?

a) 120, 70, 110 b) 80, 100, 120 c) 90, 110, 100 d) 100, 100, 100 e) 50, 130, 120.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

El propósito de esta situación-problema es considerar en la solución la ley de los grandes números, la cual plantea que a medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio la frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a su probabilidad teórica. La probabilidad de sacar una bola al azar y tenga la letra A es 1/3. Si el experimento se repite 300 veces la LGN sostiene que, aproximadamente, surgirán cien veces la bola con letra A, cien veces la bola con letra B y cien con la letra C. La respuesta correcta es (d).

De las respuestas de 41 estudiantes, 85,4% contestó correctamente este ítem seleccionando la alternativa (d), 4,9% contestó incorrectamente y 9,7% fue en blanco. Pensamos que la oportunidad de realizar simulaciones en el laboratorio de computación contribuyó a este resultado. De ellos, la mitad argumentaron que la solución se debe a la LGN, uno de los estudiantes contestó:

> *Cada bola saldrá la misma cantidad de veces por la ley de los grandes números, cada bola tiene la misma probabilidad de salir que las otras P(A)=1/3, P(B)=1/3, P(C)=1/3* (Respuesta de un estudiante, 2018).

Otras de las argumentaciones con opción d) fue dada como valor esperado de la multiplicación entre la probabilidad de obtener una bola con cierta letra y el total de veces que se repite el experimento, uno de los estudiantes señaló lo siguiente:

> *Dado que cada bolita tiene la misma probabilidad de ser seleccionada y es de 1/3, al ser 300 veces que se saca una bola, multiplico 1/3 por 300 obteniendo como producto 100 en cada caso, mi respuesta es la d)* (Respuesta de un estudiante, 2018).

Es probable que quienes descartaron la alternativa correcta (14,6%), se debió a que los individuos consideran que un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto período, o también que no relacionan el problema con la ley de los grandes números (TVERSKY; KAHNEMAN, 1974). Argumentos que podrían evaluarse en futuras experiencias vía entrevistas personal con estudiantes.

Ítem 21. Se muestran los resultados de una encuesta realizada a sesenta personas, sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética (ver Tabla 4). Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, determine la probabilidad de que: a) sea mujer, b) sea hombre y prefiera mermelada no dietética, c) prefiera una mermelada no dietética, sabiendo que es mujer.

Tabla 4 – Encuesta de preferencias sobre mermeladas

	Mermelada no dietética	Mermelada dietética
Mujer	6	24
Hombre	18	12

Fuente: Prueba Selección Universitaria, proceso de admisión 2018

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

Este ítem de respuesta abierta, presentado como tablas de doble entrada con variables dicotómicas (mujer o hombre; mermelada dietética o no dietética), es una adaptación de una pregunta de la Prueba de Selección Universitaria (PSU 2017) en Chile. El inciso a) tiene por propósito aplicar la probabilidad clásica de Laplace a través de una tabla de doble entrada 2×2. Se tienen treinta casos favorables (mujer) de sesenta casos posibles, por lo tanto, la probabilidad es 30/60 = 0,5. En el inciso b) se espera que los estudiantes apliquen la probabilidad de la intersección de sucesos (probabilidad conjunta), en este caso que sea hombre y que prefiera la mermelada no dietética (son dieciocho preferencias) de un total de sesenta. La probabilidad es dada por 18/60 = 0,3. El inciso c) propone la aplicación de la probabilidad condicional, el espacio muestral reducido de los sesenta son treinta mujeres, y de ellas, seis prefieren una mermelada no dietética, por lo tanto, la solución es 6/30 = 0,2.

Tabla 5 – Respuestas al ítem 21, $n = 41$

Categoría de respuesta	Frecuencia	%
Respuesta correcta (a)	37	90,2
Respuesta incorrecta (a)	4	9,8
Respuesta correcta (b)	18	43,9
Respuesta incorrecta (b)	23	56,1
Respuesta correcta (c)	25	61,0
Respuesta incorrecta (c)	15	36,6
En blanco	1	2,4

Fuente: elaborado por el autor

La Tabla 5 muestra los resultados a las tres preguntas del problema. Se observa, en la pregunta (a), que los estudiantes de secundaria reconocen a través de la tabla de doble entrada la probabilidad clásica de Laplace, 90,2% de aciertos, aunque sólo 5 (13,5%) formularon su respuesta denotando el evento M: seleccionar una mujer y asignando P(M) = 30/60. Los pocos errores detectados se basaron en confundir los casos favorables por los casos posibles obteniendo 60/30, o asignar un valor de 1/60 pensando que cada uno de las sesenta personas tiene igual probabilidad de ser seleccionada.

La pregunta (b) fue respondida con acierto de 43,9% mediante la probabilidad conjunta, de ellos 4 (22,2%) utilizó en su respuesta la expresión simbólica de la forma $P(H \cap D^C) = 18/60$, denotando los eventos H: seleccionar un hombre y D: preferencia mermelada dietética. Llama la atención los siguientes errores detectados en las respuestas, de las 23 respuestas incorrectas 10 (43,5%) contestó 18/30 asimilando la probabilidad condicional de seleccionar una persona que prefiera mermelada no dietética dado que es hombre $P(D^C/H)$ (FOX; LEVAV, 2004). Además, 5 (21,7%) obtuvo 18/24 considerando la probabilidad de seleccionar un hombre dado que prefiere mermelada no dietética $P(H/D^C)$, error detectado por Estrada y Díaz (2007) denominado falacia de la condicional traspuesta.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

Las respuestas acertadas en la pregunta c) fue de 61% reconociendo como solución el uso de la probabilidad condicional, de los cuales 9 (36%) responden mediante la formulación de eventos, $P(D^C/M) = 6/30$. Hubo confusión con la probabilidad conjunta, 7 (46,7%) estudiantes obtuvieron como probabilidad 6/60; error también señalado por Huerta y Arnau (2017) en problemas de probabilidad con representación de tablas 2×2.

Contreras *et al*. (2010) en su estudio con futuros profesores de educación primaria obtuvieron soluciones correctas de 60,4% en la aplicación de la probabilidad clásica de Laplace, 40,3% en la probabilidad conjunta y 41,8% en la probabilidad condicional, siendo mejores los resultados de los estudiantes de educación secundaria que participaron del taller.

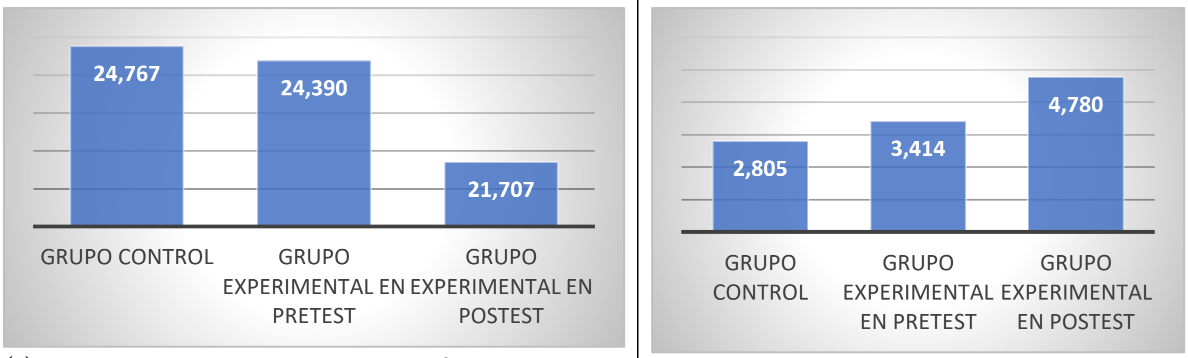
4.3 Efectividad del taller en intuiciones y conocimientos de probabilidad

Con el fin de estudiar si existe mejora de las intuiciones probabilísticas en estudiantes de secundaria después de participar del taller, se calculó una medida de intuiciones a partir de los errores cometidos en los ítems, mediante la siguiente regla: puntuación directa del estudiante – resultado correcto esperado. Se obtuvo, así, un valor de error en la intuición de cada sujeto en los once ítems, a partir de las cuales se calculó una medida global de intuición probabilística a partir del promedio en los errores calculados. Este cómputo se llevó a cabo en el grupo experimental (41 estudiantes participantes del taller) en las medidas pretest y postest y en un grupo control. Este último grupo, que no participó del taller, fue invitado a contestar el cuestionario online de intuiciones y conocimientos de probabilidad bajo las mismas condiciones que el grupo experimental, en cuanto a tiempo de aplicación del cuestionario, número de estudiantes y nivel educativo.

En la Figura 4(a) se muestran los datos descriptivos, observando que el grupo experimental realiza menos error que el grupo control, y a su vez el grupo experimental postest presenta menos error que el grupo experimental pretest, dando cuenta que hubo progreso de las intuiciones después de realizar el taller.

Además, se calculó una variable de conocimientos de probabilidad a partir de la suma de los aciertos en nueve ítems con argumentos de su respuesta. La Figura 4(b) revela que el grupo experimental puntúa más alto en el pretest y en el postest que el grupo control. Además, el grupo experimental postest incrementó la puntuación en relación al grupo experimental pretest, indicando que aumentaron los conocimientos sobre probabilidades al término del taller.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23



(a) Promedio de error en intuiciones probabilísticas

(b) Promedio aciertos conocimientos probabilísticos

Figura 4 – Efectividad del Taller en intuiciones y conocimientos de probabilidad
Fuente: elaborado por el autor

Para determinar si fue efectivo el taller sobre las intuiciones de los estudiantes, se realizaron pruebas estadísticas utilizando el *software* SPSS v21. En primer lugar, se llevó a cabo una comparación de medias entre la medida pretest del grupo experimental y la medida del grupo control, así como entre las puntuaciones en la medida postest y el grupo control. Estas dos comparaciones se llevaron a cabo por medio de dos análisis t de student para muestras independientes. Además, se llevó a cabo un análisis t de student para muestras relacionadas con la intención de comparar el rendimiento en el test de intuiciones probabilísticas entre las medidas pretest y postest en el grupo experimental. La comparación de promedios entre las medidas de intuiciones grupo experimental pretest y grupo control resultó no significativa, $p = 0{,}737$, pero resultó significativa en el postest, $p = 0{,}016$. De igual forma, resultó significativo $p = 0{,}023$ la comparación de promedios en medidas pretest y postest del grupo experimental (ver Tabla 6). Así, podemos señalar que la efectividad del taller es considerada significativa en intuiciones probabilísticas.

Tabla 6 – Comparaciones de medias sobre intuiciones probabilísticas

Comparación de Grupos	gl	t	*p*	D	LI 95%IC	LS 95%IC
G experimental (pretest) G control	80	-0,337	,737	0,03	-2,602	1,848
G experimental (postest) G control	80	-2,458	,016	0,26	-5,536	-0,583
G experimental (pretest) G experimental (postest)	40	2,369	,023	0,35	0,507	4,976

Notas: G: grupo; gl: grados de libertad; t: estadístico t de student; *p*: probabilidad asociada; d: tamaño del efecto; LI 95%: límite inferior del intervalo de confianza al 95%; LS 95%: límite superior del intervalo de confianza al 95%.

Fuente: elaborado por el autor

Por último, se llevaron a cabo tres análisis de regresión simple para estudiar la relación entre las intuiciones probabilísticas y los conocimientos de probabilidad. El análisis de regresión simple permite estudiar la relación de una variable predictora sobre una

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

variablecriterio. En este caso, el objetivo de estos tres análisis fue estudiar si las intuiciones (en pretest, en postest, y en el grupo control) estaban relacionadas con los conocimientos. Una relación significativa implica que, en la medida que se registró más puntos en la escala de intuiciones, también lo hace en la escala de conocimientos. En el primer análisis se introdujo la variable intuiciones probabilísticas en pretest como predictor y la variable conocimientos de probabilidad en pretest como variable criterio, mientras que en el segundo análisis se realizó lo mismo con las puntuaciones en la medida postest.

Estos dos análisis se llevaron a cabo con el grupo experimental. En tercer lugar, se realizó un análisis de regresión simple con los participantes del grupo control, con sus puntuaciones en intuiciones como variable predictora y en conocimientos como variable criterio. Los resultados mostraron que la relación entre intuiciones y conocimientos en el grupo experimental en pretest resultó no significativa, p = 0,317, pero resultó significativa en el postest, p = 0,002. Mientras que la relación entre intuiciones y conocimientos en el grupo control resultó no significativa, p = 0,809. Por lo tanto, afirmamos que existe relación significativa entre las intuiciones y conocimientos de probabilidades de los estudiantes al finalizar el taller formativo.

5 Conclusiones y alcances

Este estudio analiza la importancia del enfoque intuitivo en la comprensión de conocimientos básicos de probabilidad y su alcance en explorar y desarrollar el razonamiento probabilístico en adolescentes de la educación secundaria, al reunir elementos mediacionales en un ciclo formativo integrador mediante contextos retadores concretos, uso de dispositivos tecnológicos y manipulativos, exploración de las aproximaciones a la noción de probabilidad y argumentaciones de la ocurrencia de sucesos aleatorios por distintas representaciones. En primer lugar, hemos valorado las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad, comparando las respuestas entregadas a un cuestionario de once ítems antes y después del taller, y analizamos los cambios producidos por los estudiantes en las resoluciones de dos ítems.

Los resultados revelan alta dispersión en las asignaciones de probabilidades a los once ítems (Figura 2), siendo el ítem 8 (heurística de disponibilidad) el de mayor variabilidad, rango intercuartil 80, en relación al centro de los datos. 75% de los estudiantes asignaron valores entre 20 y 100 de obtener más grupos mientras menor es la selección de subgrupos del conjunto, exhibiendo una concepción errada. Llama la atención en los estudiantes de secundaria, frente a una enseñanza de probabilidad que consideramos pertinente, la resistencia a utilizar el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

razonamiento causal – *que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero* – (ítem 5), con asignaciones de valores similares en estudiantes de otros niveles educativos (ALVARADO *et al*., 2018; TAPIA; ALVARADO, 2019) y contrario a los encontrados por Pollatsek *et al*., (1987). Además, se obtuvo en situaciones con espacio muestral equiprobable mejores respuestas esperadas comparadas con investigaciones relacionadas – *obtener 50 nacimientos hombres de 100 en un hospital* – (ítem 1).

En cuanto a los ítems 7 al 11 que pueden ser pensados y resueltos por medio de conocimientos básicos de probabilidades, a partir del análisis gráfico los resultados muestran la existencia de intuiciones correctas e incorrectas de los estudiantes participantes del ciclo formativo (Figura 3). No obstante, la mitad de los estudiantes de educación secundaria alcanzó respuestas según lo esperado en situaciones de donde surgen la probabilidad conjunta (ítem 7), probabilidad condicional (ítem 9) y ley de los grandes números (ítem 11), y son mejores que las adquiridas al inicio del taller y también de investigaciones relacionadas con estudiantes universitarios (ALVARADO *et al*., 2018). Hacemos notar cierta dificultad en modelar situaciones de experimentos binomiales, sólo una cuarta parte de los estudiantes lograron respuestas esperadas (ítem 10), lo que nos hace repensar en dedicar más tiempo al estudio de problemas de probabilidad binomial.

Durante el ciclo formativo de probabilidad se analizaron dos ítems con resolución obteniendo buenos resultados de aciertos, 85,4% contestó correctamente empleando la ley de los grandes números (ítem 12), 90,2% la probabilidad clásica de Laplace, 43,9% la probabilidad conjunta y 61% usando la probabilidad condicional (ítem 21). Estos resultados han sido mejores comparados con Contreras *et al*. (2010), y creemos que contribuyó como respuesta al cambio la experimentación de simulaciones aleatorias con tecnologías, la implementación de distintas representaciones de resolución, dedicación a la argumentación para comprobar sus intuiciones con el conocimiento de probabilidad, y profesores guías con experiencia docente y dominio del tema.

El cambio efectivo en el aprendizaje de conocimientos con argumentos probabilísticos requiere más investigaciones sobre las dificultades de comprensión encontradas en la ejecución del taller, en aplicaciones de probabilidad clásica de Laplace (CONTRERAS *et al.*, 2010), probabilidad condicional (ESTRADA; DÍAZ, 2007; FOX; LEVAV, 2004; HUERTA *et al.*, 2016), ley de los grandes números (TVERSKY; KAHNEMAN, 1974) y las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad (ALVARADO *et al*., 2018; SALCEDO; MOSQUERA, 2008).

En cuanto a las implicaciones para la enseñanza, actualmente son escasas las instituciones superiores que ofrecen nuevas experiencias de aprendizaje de probabilidad y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

estadística para la formación extracurricular de los adolescentes. La realización del ciclo formativo en probabilidades, con 41 estudiantes que es el número medio de un grupo curso de establecimientos municipalizados, ha constituido una oportunidad para comprobar sus intuiciones correctas y útiles, sobre todo para aquellos jóvenes provenientes de distintos sectores sociales que presentan un alto potencial académico, ya que les permiten seguir fortaleciendo sus habilidades intelectuales a través de oportunidades educativas de calidad.

Convenimos que el insuficiente cuidado al desarrollo de las intuiciones en la comprensión de la probabilidad en la institución escolar niega el rol fundamental del significado intuitivo de probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico (ALVARADO *et al*., 2018; SHARMA, 2015). En base a los resultados obtenidos, es posible generar un cambio de paradigma en el tratamiento del pensamiento estocástico con orientación en la intuición probabilística a temprana edad, en adolescentes futuros ciudadanos y profesionales. En palabras de Fischbein y Schnarch (1997, p. 104): "ésta no se desarrolla espontáneamente es necesario entrenar desde los primeros niveles la base intuitiva relativa al pensamiento probabilístico".

Para originar una actitud positiva hacia el aprendizaje de la probabilidad, proyectamos en el taller un acercamiento a la comprensión gradual de los conceptos de probabilidades por medio de representaciones diferenciadas y resoluciones con distintos argumentos. En la aplicación de probabilidad condicional los estudiantes razonaron en la solución por medio de diagrama de árbol, tablas de doble entrada y diagrama de Venn. El interés de los estudiantes durante la innovación metodológica de enseñanza se justificó en la participación y compromiso con las actividades pretendidas del taller, experimentando con dispositivos aleatorios y argumentación en las respuestas a los ítems. El estudio puede servir de orientación para los profesores de matemática, aumentando su actitud hacia la probabilidad y su enseñanza al momento de elaborar estrategias didácticas apoyadas por recursos computacionales.

A través de esta experiencia de investigación y desarrollo, la enseñanza de probabilidad estuvo centrada en situaciones cotidianas de los estudiantes, enfatizando el razonamiento y, poniendo en evidencia la influencia de las propias creencias e intuiciones en el aprendizaje. Es inevitable revisar y actualizar los programas y los planes de estudio escolar para brindar un marco institucional que apoye esta experiencia, y realizar más intervenciones con otros estudiantes sobre cómo desarrollar el pensamiento estocástico crítico, como también con profesores que poseen conocimientos previos de probabilidad.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

Agradecimientos

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco del Proyecto CIEDE 04-2017, Centro de Investigación en Educación y Desarrollo, Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Referencias

ALVARADO, H. **Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería.** 2007. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, 2007.

ALVARADO, H.; ANDAUR, G.; ESTRADA, A. Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de chile. **Paradigma**, Maracay, v. 39, n. 2, p. 36-64, dic. 2018.

ALVARADO, H.; ESTRELLA, S.; RETAMAL, L.; GALINDO, M. Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 21, n. 2, p. 131-156, jul. 2018.

BASTIAS, H.; ALVARADO, H.; RETAMAL, L. Explorando el significado intuitivo de la probabilidad en profesores de matemáticas. *In*: CONTRERAS, J. M.; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. R.; GEA, M. M.; GIACOMONE, B.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M. (Eds.). **Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. Granada: Universidad de Granada, 2017. p. 1-10.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 8, n. 3, p. 247-264, nov. 2005.

BATANERO, C. Understanding randomness: challenges for research and teaching. *In:* KRAINER, K.; VONDROVÁ, N. (Eds.). **Ninth congress of european society for research in mathematics education**. Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education and CERME, 2015. p. 34 49.

BATANERO, C.: CONTRERAS, J. M.; CAÑADAS, C.; GEA, M. Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas: Un ejemplo de probabilidad. **Novedades educativas**, Buenos Aires, v. 261, p. 78-84, 2012.

BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ, C. Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. **Revista Digital: Matemática, Educación e Internet**, Cartago, v. 12, n. 2, mar. 2014.

BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. The nature of chance and probability. *In:* GRAHAM, A. J. (Ed.). **Exploring probability in school**: challenges for teaching and learning. New York: Springer, 2005. p. 16-42.

BELTRÁN-PELLICER, P.; GODINO, J. D.; GIACOMONE, B. Elaboración de Indicadores Específicos de Idoneidad Didáctica en Probabilidad: Aplicación para la Reflexión sobre la Práctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 526-548, ago. 2018.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

CABRERA, P. ¿Qué debe saber y saber hacer un profesor de estudiantes con talento académico? **Estudios pedagógicos**, Valdivia v. 37, n. 2, p. 43-59, 2011.

CAÑIZARES, M. J. **Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias**. 1997. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, 1997.

CID, N.; RETAMAL, L.; ALVARADO, H. Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática. *In*: CONTRERAS, J. M.; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. R.; GEA, M. M.; GIACOMONE, B.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M. (Eds.). **Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. Granada: Universidad de Granada, 2017. p. 1-10.

CONTRERAS, J. M.; BATANERO, C.; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. La paradoja del niño o niña: aplicaciones para la clase de probabilidad. **Revista digital Matemática, Educación e Internet**, Cartago, v. 14, n. 1, p. 1-13, feb. 2014.

CONTRERAS, J. M.; DÍAZ, C.; BATANERO, C.; ORTIZ, J. J. Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. **Educaçao Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 181-198, 2011.

CONTRERAS, J. M.; ESTRADA, A.; DÍAZ, C.; BATANERO, C. Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. *In:* MORENO, M. M.; ESTRADA, A.; CARRILLO, J.; SIERRA, T. A. (Eds.). **Investigación en educación matemática XIV.** Lleida: SEIEM, 2010. p. 271-280.

COOK, T.; CAMPBELL, D. **Quasi-experimentation design and analysis issues for fields settings**. Chicago: Rand Mcnally, 1979.

DEMRE. Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional. **Modelos de resolución de pruebas**. Santiago: Consejo de Rectores Universidades Chilenas, 2015.

ESTRADA, A.; BATANERO, C. Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. *In:* FERNÁNDEZ, C. (Ed.). **Actas del XIX simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática**. Alicante: SEIEM, 2015. p. 239-248.

ESTRADA, A.; BATANERO, C.; DÍAZ, C. Exploring Teachers’ Attitudes Towards Probability and Its Teaching. *In:* BATANERO, C.; CHERNOFF, E. (Eds.). **Teaching and learning stochastics**: advances in probability education research. Berlin: Springer, 2018. p. 313-332.

ESTRADA, A.; DÍAZ, C. Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. **UNO**, Barcelona, v. 44, p. 44-58, 2007.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics**: An educational approach. Netherlands: Springer Science & Business Media, 1987. v. 5.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic intuitively based misconceptions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 28, n. 1, p. 96–105, jan. 1997.

FOX, C. R.; LEVAV, J. Partition-edit-count: naive extensional reasoning in judgment of conditional probability. **Journal of experimental psychology**: General, Washington, DC: APA, v. 133, n. 4, p. 626-642, dec. 2004.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. *In:* JONES, G. (Ed.). **Exploring probability in school**: challenges for teaching and learning. New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. p. 43-71.

GARFIELD, J.; BEN-ZVI, D. **Developing students' statistical reasoning**: connecting research and teaching practice. New York: Springer, 2008.

GOETZ, J. P.; LECOMPTE, M. D. **Etnografía y diseño cualitativo en educación**. Morata: Madrid, 1988.

GÓMEZ, E.; CONTRERAS, J. M.; BATANERO, C. Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. *In:* FERNÁNDEZ, C.; MOLINA, M.; PLANAS, N. (Eds.). **Investigación en educación matemática XIX**. Alicante: SEIEM, 2015. p. 69-72.

HUERTA, M. P.; ARNAU, J. La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Barcelona, v. 11, p. 87-106, feb. 2017.

HUERTA, M. P.; EDO, P.; AMORÓS, R.; ARNAU, J. Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México v. 19, n. 3, p. 335-362, nov. 2016.

KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. **Judgment under uncertainty**: Heuristics and biases. New York: Cambridge University Press, 1982.

KONOLD, C.; GARFIELD, J. Inconsistencies in students' reasoning about probability. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA: NCTM, v. 5, p. 392-414, nov. 1993.

LANDÍN, P.; SÁNCHEZ, E. Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo v. 12, n. 3, p. 598-618, 2010.

MINEDUC. Ministerio de Educación de Chile. **Nuevas Bases Curriculares y Programas de Estudio 7° básico a 2° año de Educación Media**. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2015.

MINEDUC. Ministerio de Educación de Chile. **Bases Curriculares 3º y 4º medio**. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2019.

NISBETT, R.; ROSS, L. **Human inference**: Strategies and shortcomings of social judgments. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1980.

PARRAGUEZ, R.; GEA, M.; DÍAZ, D.; BATANERO, C. ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? **Revista Digital Matemática, Educación e Internet**, Cartago, v. 17, n. 2, p. 1-15, abr. 2017.

POLLATSEK, A.; WELL, A. D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P.; COBB, G. Understanding conditional probabilities. **Organizational Behavior and Human Decision Processes**, Amsterdam: Elsevier, v. 40, p. 255-269, 1987.

SALCEDO, A.; MOSQUERA, J. Sesgo de la disponibilidad en estudiantes universitarios. **Investigación y Postgrado**, Caracas, v. 23, n. 2, p. 411-432, ago. 2008.

SANABRIA, G.; NÚÑEZ, F. La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. **Revista Digital Matemática, Educación e Internet**, Cartago, v. 17, n. 2, ago. 2017.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a23

SÁNCHEZ, E.; VALDEZ, J. Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Barcelona, v. 11, p. 127-143, 2017.

SHARMA, S. Teaching probability: A socio-constructivist perspective. **Teaching Statistics**, Hoboken, NJ, v. 37, n. 3, p. 78-84, feb. 2015.

TAN, C. K.; HARJI, M. B.; LAU, S. H. Fostering positive attitude in probability learning using graphing calculator. **Computers & Education**, Amsterdam: Elsevier, v. 57, n. 3, p. 2011-2024, nov. 2011.

TAPIA, S.; ALVARADO, H. Indagando en la asignación de probabilidades en situaciones de incertidumbre por estudiantes de educación básica. *In*: CONTRERAS, J. M.; GEA, M.; LÓPEZ-MARTÍN, M.; MOLINA-PORTILLO, E. (Eds.). **Actas del tercer congreso internacional virtual de educación estadística**. Granada: Universidad de Granada, 2019. p. 1-10.

TRURAN, K.; TRURAN, J. Are dice independent? Some responses from children and adults. *In:* ZASLAVSKY, O. (Ed.). **Proceedings of the 23rd conference of the international group for the psychology of mathematics instruction**. Haifa: Israeli Institute of Technology, 1999. p. 289–296.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgement under uncertainity: Heurístics and biases. **Science**, Washington DC, v. 185, n. 4157, p. 1124-1131, sep. 1974.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Causal schemas in judgments under uncertainty. *In:* FISHBEIN, E. (Ed.). **Progress in social psychology**. Hillsdale: Erlbaum, 1980. p. 49-72.

VÁSQUEZ, C.; ALVARADO, H.; RUZ, F. Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. **Revista Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 31, n. 3, p. 177-202, dic. 2019.

VELOO, A.; CHAIRHANY, S. Fostering students' attitudes and achievement in probability using teams-games-tournaments. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, Amsterdam: Elsevier, v. 93, p. 59-64, oct. 2013.

WATSON, J. Assessing the development of important concepts in statistics and probability. *In:* BURRILL, G. F.; ELLIOTT, P. C. (Eds.). **Thinking and reasoning with data and chance**: sixty-eight yearbook. Reston: NCTM, 2006. p. 61-75.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review**, Wiley Online Library, Malden, v. 67, n. 3, p. 223-248, may. 1999.

Submetido em 23 de Fevereiro de 2021.
Aprovado em 22 de Julho de 2021.