


Representaciones Semióticas de la Multiplicación y División en Libros de Texto de Educación Primaria

Semiotic Representations of Multiplication and Division in Elementary School Textbooks

Judit Chico*

 ORCID iD 0000-0001-8408-6128

Miguel Ángel Montes**

 ORCID iD 0000-0003-3181-0797

Resumen

En este artículo presentamos una propuesta para explorar los significados relativos a la multiplicación y división que se construyen en libros de texto de matemáticas de Educación Primaria. Para ello, realizamos un análisis multimodal de las tareas centradas en la multiplicación y división de dos propuestas editoriales con amplia difusión en España. El análisis realizado permite desarrollar una caracterización de las tareas en base a los significados potenciales de la multiplicación y división que se derivan del uso y coexistencia de los diferentes tipos de representaciones simbólicas, gráficas y verbales que se presentan y se demandan en las tareas. Los resultados apuntan un dominio de las representaciones simbólicas y un bajo uso de representaciones verbales en las tareas de multiplicación y división de las dos propuestas editoriales.

Palabras clave: Multiplicación. División. Libro de texto. Representaciones semióticas. Construcción de significados.

Abstract

In this report, we present a proposal to explore the meanings related to multiplication and division that are built in Elementary School mathematics textbooks. We carried out a multimodal analysis of the tasks focused on multiplication and division in two textbooks widely distributed in Spain. This analysis allows us to develop a characterisation of the introduction of multiplicative thinking in textbooks based on the potential meanings of multiplication and division derived from the use and coexistence of the different types of symbolic, graphic, and verbal representations that are presented and demanded in the tasks. The results point to a dominance of symbolic representations and a low use of verbal representations in the multiplication and division tasks of the two textbooks analysed.

Keywords: Multiplication. Division. Textbooks. Semiotic representations. Meaning making.

1 Introducción

* Doctora en Didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesora visitante, Universitat de les Illes Balears (UIB), Palma, España. judit.chico@uib.cat.

** Doctor por la Universidad de Huelva, Universidad de Huelva (UHU). Profesor Titular de Universidad, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Miguel.montes@ddcc.uhu.es

En las últimas décadas, los libros de texto de matemáticas han atraído, cada vez más, el interés de la comunidad investigadora contemplando su análisis desde múltiples perspectivas (FAN; ZHU; MIAO, 2013; FONT; GODINO, 2006; MONJE; SECKEL; BREDA, 2018). Aunque el uso de tecnología y contenidos digitales han tenido un impacto en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los libros de texto, todavía, desempeñan un papel central en la enseñanza y aprendizaje de todas las asignaturas escolares, especialmente de las matemáticas (HADAR, 2017). Los libros son aplicaciones potenciales del currículum que median entre la intención – lo previsto en los planes de estudios – y la aplicación – lo implementado en las aulas – (CHARALAMBOUS *et al.*, 2010; HOUANG; SCHMIDT, 2008). Por tanto, pueden influir significativamente en lo que se enseña, seleccionando y secuenciando unos contenidos en detrimento de otros y, en cómo se enseña, concretando visualizaciones, verbalizaciones y contextos de esos contenidos (FAN; ZHU; MIAO, 2013; CASTILLO; BURGOS, 2022). Diversas investigaciones (HADAR, 2017; HOUANG; SCHMIDT, 2008; BADILLO; FONT; AZCÁRATE, 2005) defienden que el libro condiciona fuertemente las experiencias de aprendizaje matemático que tienen estudiantes y maestros en el aula.

Por otro lado, existen estudios en el área que defienden la autonomía de los profesores, sugiriendo una menor influencia de los libros de texto en la instrucción y, por lo tanto, en el aprendizaje de los estudiantes (FREEMAN; PORTER, 1989; KILPATRICK, 2003). En este enfoque, el profesor es visto como un desarrollador de los planes de estudios que decide qué y cómo enseñar matemáticas según el contexto del aula, pudiendo seguir las indicaciones y contenidos del libro. La divergencia de estos dos enfoques se soluciona considerando que los libros proporcionan oportunidades para aprender matemáticas que pueden ser aprovechadas (CHARALAMBOUS *et al.*, 2010; HADAR, 2017). Nos situamos en esta línea intermedia donde el análisis de los libros de texto se fija en la intención, considerando que el libro ofrece oportunidades de aprendizaje posibles, pero no determinantes en lo que, finalmente, se enseña o se aprende en el aula.

Uno de los principios básicos en el diseño de actividades de matemáticas para el aula es proporcionar y relacionar diversas representaciones semióticas de un contenido concreto (PREDIGER, 2019; MOSCHKOVICH, 2013). La restricción a un contenido ayuda a estudiar, en detalle, las representaciones semióticas específicas para ese contenido y los diferentes significados matemáticos que se derivan de su uso. En este estudio, nos centramos en los significados relativos a la multiplicación y la división que se construyen en libros de texto de Educación Primaria. La introducción de estas operaciones supone un salto cualitativo respecto del pensamiento aditivo, donde las cantidades a sumar o restar representan el mismo tipo de

elemento, mientras que en la multiplicación y división son dos cantidades con significado distinto (ANGHILERI, 2000). Por ello, nos interesa abordar ¿qué significados relativos a la multiplicación y división se construyen en libros de texto de segundo de Educación Primaria? En este curso se introducen la multiplicación y la división y, por tanto, es un momento crítico en la construcción de significados de estas dos operaciones, que son la base del pensamiento proporcional y las fracciones (IVARS; FERNÁNDEZ, 2016). Concretamente, nos centramos en el objetivo de caracterizar tareas de multiplicación y división en libros de texto de segundo de Educación Primaria atendiendo al uso, demanda y coexistencia de representaciones semióticas. Para ello, realizamos un análisis multimodal del contenido (LEMKE, 1998; O'HALLORAN, 2005) examinando las representaciones semióticas de las tareas de libros de texto con contenidos asociados a la multiplicación y división.

2 Referentes teóricos

En esta sección, presentamos nuestra perspectiva teórica sobre las representaciones semióticas y la construcción de significados en textos matemáticos escritos. Acabamos con una síntesis del pensamiento multiplicativo centrada en los significados matemáticos subyacentes a ciertas representaciones gráficas, verbales y simbólicas de la multiplicación y la división.

2.1 Representaciones semióticas

El carácter multisemiótico de los discursos matemáticos orales y escritos es reconocido desde diversas perspectivas teóricas de la educación matemática (DUVAL, 2006; FONT; GODINO, 2006; O'HALLORAN, 1999, 2005; PREDIGER; WESSEL, 2013). Este estudio se enmarca en la semiótica social (LEMKE, 1998; O'HALLORAN, 1999, 2005; PREDIGER; WESSEL, 2013) que estudia el uso y la interacción de recursos semióticos convencionalizados socialmente para la construcción de significados en una determinada cultura, como la comunidad matemática. Desde esta perspectiva, O'Halloran (1999, 2005) distingue recursos de tres sistemas semióticos que coexisten en textos escritos y discursos orales para construir significados matemáticos, a saber, el lingüístico (lenguas), el simbólico (notaciones numéricas y algebraicas) y el visual (diagramas, tablas, gráficos, etc.). Los recursos semióticos permiten representar objetos físicos, ideas y pensamientos internos del ser humano, es decir, construir y expresar significados en una cultura determinada (LEMKE, 1998). En este estudio, usamos el término representaciones semióticas para referirnos a los recursos concretos de uno de los tres

sistemas semióticos (lingüístico, simbólico y visual) que se usan para construir significados matemáticos asociados a los conceptos que representan en determinados contextos.

Las representaciones semióticas no solo sirven para comunicar conceptos matemáticos, también para razonar y comprender propiedades y fundamentos del concepto representado (DUVAL 2006; PREDIGER; WESSEL, 2013). El significado que se evoca con una representación varía según la naturaleza y estructura inherente de la representación semiótica que se usa (DUVAL, 2006; O'HALLORAN, 2005). Para la comprensión conceptual profunda de un concepto matemático es condición el conocimiento de una amplia gama de representaciones semióticas que permitan construir diversos significados relativos a ese concepto. Pero no es suficiente con dominar una variedad de representaciones, es necesario su uso e interpretación articulada para poder generar significados que van más allá de la suma de los significados aislados de cada una (LEMKE, 1998, O'HALLORAN, 2005). En los textos escritos, y por tanto estáticos y sinópticos, el uso de representaciones semióticas para la construcción de significados es deliberada, es decir, se decide previamente como se orquestan las representaciones según los significados que se quieran comunicar en consonancia con la comunidad a la que se dirige y la finalidad del texto (LEMKE, 1998; O'HALLORAN, 2005).

Cabe esperar que, en las tareas de los libros de texto de matemáticas, se presenten o demanden diversas representaciones de un mismo concepto para fomentar la comprensión conceptual profunda del concepto mediante la articulación de las diversas representaciones. La coexistencia de representaciones puede generar oportunidades para que alumnos y maestros se involucren en una actividad de interpretar, realizar, relacionar o transformar representaciones. El tipo de representaciones y las formas de coexistencia influyen en el potencial de significados asociados a un contenido que se puede construir y, por tanto, en las oportunidades de enseñanza y aprendizaje de ese contenido que se pueden generar en el aula.

En textos matemáticos escritos, sobre todo en los primeros cursos de primaria, se combinan, habitualmente, representaciones verbales, gráficas o simbólicas para dar informaciones parciales que requieren una interpretación conjunta para acceder al significado completo. Esta forma de coexistencia puede generar oportunidades para enseñar y aprender ciertas representaciones semióticas disponibles en la cultura, pero no necesariamente implica una extensión semántica de significados asociados al concepto representado. En cambio, cuando se presentan diversas representaciones de un mismo concepto, se pueden generar oportunidades para enseñar y aprender a articular y transformar diversas representaciones semióticas para acceder a la sinergia de significados de ese concepto (CAVIEDES; DE GAMBOA; BADILLO, 2020). Para ello, será necesario relacionar las diversas representaciones

mediante la identificación de los elementos relevantes de la multiplicación y la división en las diversas representaciones (RENKL *et al.*, 2013).

2.2 Pensamiento multiplicativo

El pensamiento multiplicativo implica la capacidad de coordinar unidades agrupadas a un nivel más abstracto que el pensamiento aditivo, así como de identificar los diferentes significados del multiplicador y del multiplicando (ANGHILERI, 2000; DOWNTON; SULLIVAN, 2017). La introducción y aprendizaje de la multiplicación se considera un elemento clave para el futuro aprendizaje matemático de los alumnos, porque el concepto de unidad compuesta por unidades simples es fundamental para comprender temas como las fracciones, la proporcionalidad y el cálculo de porcentajes (DOWNTON; SULLIVAN, 2017; PÖHLER; PREDIGER, 2015; IVARS; FERNÁNDEZ, 2016).

Una forma común de introducir la multiplicación es como una suma repetida o como el conteo de múltiplos, sin embargo, equiparar la multiplicación con la adición repetida es limitante porque las estrategias aditivas no son viables más allá de los números naturales. Al respecto, diversos estudios defienden el uso de ciertas representaciones semióticas para enseñar la multiplicación y la división, por el potencial de significados que encapsulan. Por ejemplo, respecto a las representaciones gráficas, diversas investigaciones (ANGHILERI, 2000; BARMBY *et al.*, 2009; JACOB; MULLIGAN, 2014) ponen de relieve el potencial de la matriz rectangular para desarrollar el pensamiento multiplicativo por su capacidad para mostrar la propiedad conmutativa y distributiva y, las tres cantidades involucradas en una multiplicación. Este hecho facilita el cálculo del producto o de cualquiera de los factores, muestra la relación entre la multiplicación y la división y fomenta la comprensión de la multiplicación y la división como operaciones binarias. En contraposición, el diagrama de grupos y la línea numérica muestran la multiplicación como una operación unitaria, fomentando el significado de adición de grupos iguales y el método de cálculo de suma repetida, que se vuelve ineficiente para la multiplicación de números racionales (BARMBY *et al.*, 2009). Por otro lado, a pesar de la utilidad de la matriz rectangular en cuanto al potencial de significados que encapsula, algunos alumnos de primaria no la reconocen como una representación de la multiplicación. Al respecto, Barmby *et al.* (2009) sugieren conectar representaciones más familiares como el diagrama de grupos con la matriz rectangular y esta, a su vez, con métodos de cálculo y representaciones simbólicas formales de la multiplicación. Otros estudios (por ejemplo, PREDIGER, 2019), a partir de resultados obtenidos en investigaciones empíricas, defienden el uso de ciertas

representaciones verbales para concretar y facilitar el acceso a significados de representaciones semióticas técnicas con un grado alto de abstracción.

Las representaciones verbales pueden expresarse en diversos registros lingüísticos: informal, escolar y técnico, siendo clave para la construcción de significados tanto el registro escogido como la relación entre ellos (MOSCHKOVICH, 2013; PLANAS *et al.*, 2019; PREDIGER, 2019). Dentro del registro escolar, varios estudios (PÖHLER; PREDIGER, 2015; PREDIGER; WESSEL, 2013; PREDIGER, 2019) identifican expresiones verbales que concretan o extienden semánticamente los significados matemáticos subyacentes a una representación gráfica, simbólica o verbal técnica. Por ejemplo, expresiones verbales técnicas como tres por cuatro o tres multiplicado por cuatro o, expresiones simbólicas como 3×4 , aúnan una multitud de significados potenciales que requieren ser concretados (CHICO, 2018). Las representaciones verbales relacionadas con el significado, como tres veces cuatro, tres grupos de cuatro o tres cuatros, juegan un papel clave para concretar esos significados. La primera expresión evoca la idea de repetición, la segunda resalta la idea de adición de grupos iguales y la tercera hace hincapié en la unidad multiplicativa.

Al respecto, en este estudio consideramos las expresiones en lengua escrita usadas para construir significados matemáticos relativos a conceptos o relaciones asociadas a la multiplicación y división. Distinguimos entre representaciones verbales escritas con lengua i) técnica, i.e., expresiones lingüísticas que usaría un matemático en un contexto profesional, como siete multiplicado por tres o seis dividido entre dos; ii) relacionada con el significado, i.e., expresiones específicas para producir significados matemáticos relacionados con el pensamiento multiplicativo, como siete grupos de tres o repartir seis libretas entre dos estudiantes; iii) informal, i.e., expresiones verbales que no son ni técnicas ni relacionadas con el significado como tres cajas de seis pinceles cada una o seis caramelos a poner en dos bolsas.

3 Métodos

Presentamos un estudio de alcance descriptivo (HERNÁNDEZ; FERNÁNDEZ; BAPTISTA, 2010) que profundiza en el uso y coexistencia de diversas representaciones semióticas en tareas de multiplicación y división en dos libros de texto de Educación Primaria dentro del contexto español. Para ello, realizamos un análisis multimodal del contenido (LEMKE, 1998; O'HALLORAN, 2005) de los libros y cuadernillos de ejercicios de segundo de Educación Primaria de las colecciones Cifras, de Vicens Vives, y Piensa Infinito, de SM, editoriales usadas ampliamente en España. Tomamos como unidades de análisis las tareas con

contenidos de multiplicación y división, contabilizando como una tarea cada uno de los apartados de una misma actividad ya que pueden ser de distinta naturaleza y presentar o demandar diferentes representaciones.


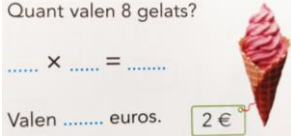
En la primera fase del análisis se examinaron los libros y cuadernillos de cada editorial para describir algunas características generales: título del libro, número de libros de la colección, editorial, temas tratados y temas centrados en la multiplicación y la división. En la segunda fase, se codificaron las tareas con contenidos relativos a la multiplicación y división atendiendo al: i) contenido central, multiplicación, división o ambas; ii) tipo de representación semiótica, simbólica, verbal o gráfica, que se presenta y se demanda. En caso de que la tarea no demande ninguna representación, o no se especifique la representación solicitada, se codifica como *otras* y, en el caso que demande únicamente un número, se codifica como *numérica*. De cada sistema semiótico se codificaron las siguientes representaciones:

- a) Representación simbólica: suma (S), multiplicación (M) y división (D).
- b) Representación verbal: informal (I), relacionada con el significado (R) y técnica (T).
- c) Representación gráfica: diagrama de grupos iguales (DG), matriz rectangular (MR), línea numérica (LN), unidad multiplicativa (UM) y cantidad total (CT).

Basándonos en los estudios de Sutherland, Winter y Harries (2001) y Kosko y Singh (2018) sobre representaciones gráficas de la multiplicación y la división usadas en libros de texto de diversos países, consideramos, *a priori*, cinco representaciones gráficas: diagrama de grupos iguales, línea numérica, matriz rectangular, modelo de barras y diagrama de árbol. En los datos encontramos las tres primeras y dos más que emergieron del análisis, la cantidad total y la unidad multiplicativa. La cantidad total es la imagen de todos los objetos a repartir, agrupar o resultantes de una multiplicación sin estar dispuestos en forma de matriz rectangular ni agrupados (primera tarea del Cuadro 1). La unidad multiplicativa corresponde a la imagen de un grupo representativo del diagrama de grupos iguales donde se perciben los elementos que lo forman o al ensamblaje de la imagen de un objeto con su precio (segunda tarea del Cuadro 1).

Por la naturaleza multisemiótica de los textos matemáticos escritos, es habitual que coexistan, en una misma tarea, diversas representaciones. En cuanto a la codificación, en caso de identificar: (i) varias representaciones del mismo sistema semiótico, se separan los códigos de cada una con un guion (-); (ii) varias representaciones de distintos sistemas semióticos, se codifica cada tipo por separado, exceptuando aquellos casos en los que dos o más representaciones se ensamblan para formar una unidad semiótica de información completa (representaciones sintéticas en CAÑADAS; FIGUEIRAS, 2011). Como excepciones consideramos dos casos que surgen del análisis: un enunciado verbal que incluye números y la

imagen de un objeto con su precio. Por consenso entre los tres autores, el primer caso se codifica como una representación verbal y el segundo como una representación gráfica que corresponde al tipo unidad multiplicativa (segunda tarea del Cuadro 1). A continuación, en el Cuadro 1 mostramos, a modo de ejemplo, la codificación de dos tareas.

Tareas	Codificación	
 <p data-bbox="236 663 762 689">Fuente: Libro de la propuesta editorial 1 (p. 173)</p>	Representaciones presentadas: Verbal: relacionada con el significado Simbólica: división Gráfica: cantidad total	Representaciones demandadas: Numérica Contenido central: División
 <p data-bbox="236 837 815 864">Fuente: Cuadernillo de la propuesta editorial 1 (p. 25)</p>	Representaciones presentadas: Verbal: informal Simbólica: multiplicación Gráfica: unidad multiplicativa	Representaciones demandadas: Simbólica: multiplicación Contenido central: Multiplicación

Cuadro 1 - Codificación de dos tareas analizadas
 Fuente: elaborado por los autores

En la tercera fase del análisis recontamos las tareas donde aparece cada código y, mediante tablas de doble entrada, relacionamos las dimensiones: i) contenido central y tipo de representación presentadas; ii) número de representaciones presentadas y demandadas en las tareas. En el primer caso, la lectura e interpretación de la tabla nos permite medir y describir el uso de los diversos tipos de representaciones semióticas y extraer conclusiones respecto a la construcción de significados en las tareas de multiplicación y de división. Para una mejor visualización de los datos que facilite su interpretación, realizamos dos gráficos estadísticos. El primero muestra los porcentajes de tareas con representaciones de cada sistema semiótico respecto del total de tareas de multiplicación y del total de tareas de división. Esto nos permite comparar el uso de las representaciones de los diversos sistemas semióticos para construir significados de la multiplicación, con el uso para construir significados de la división. El segundo gráfico, muestra los porcentajes de tareas de multiplicación y división con cada tipo de representación semiótica respecto del total de tareas analizadas en cada propuesta editorial. Este segundo gráfico nos permite visualizar los tipos de representaciones más usados y la coexistencia de representaciones del mismo sistema semiótico, así como extraer conclusiones sobre los significados matemáticos relativos al pensamiento multiplicativo que se potencia en cada propuesta editorial.

Respecto a la relación entre las representaciones presentadas y demandadas en cada tarea, realizamos, también, una tabla de doble entrada donde el tipo y la cantidad de representaciones presentadas en las tareas se disponen en las columnas, y el tipo y la cantidad

de representaciones demandadas en las filas. Esta tabla nos permite extraer conclusiones en torno a la coexistencia de representaciones semióticas y, las oportunidades que ofrece cada propuesta editorial para realizar, conocer y transformar representaciones semióticas de la multiplicación y la división.

4 Análisis y resultados

Presentamos el análisis y caracterización de cada propuesta editorial en base a: i) las características generales del libro; ii) la presencia de representaciones de los diferentes sistemas semióticos en tareas de multiplicación y en tareas de división; iii) los tipos de representaciones semióticas y su frecuencia en las tareas, así como los significados potenciales que se derivan; iv) la coexistencia de representaciones semióticas en las tareas, en relación con representaciones y las transformaciones entre representaciones que se requieren.

4.1 Análisis y caracterización de la propuesta editorial 1

De las doce unidades que tienen los tres libros y los tres cuadernillos de ejercicios de la propuesta editorial 1, la unidad siete se centra en la multiplicación y la doce en la división, incluyendo algunas tareas de multiplicación en las unidades intermedias. En total se analizan 414 tareas, encontrando un mayor número de tareas centradas en la multiplicación, 371, que, en la división, 43. Cabe destacar que, además de la lejanía entre las dos unidades, no hay tareas que incorporen contenidos de multiplicación y división de forma conjunta. Así, aunque se introducen las dos operaciones, la propuesta se centra en la multiplicación e introduce brevemente la división, sin incorporar tareas donde se relacionen como operaciones inversas.

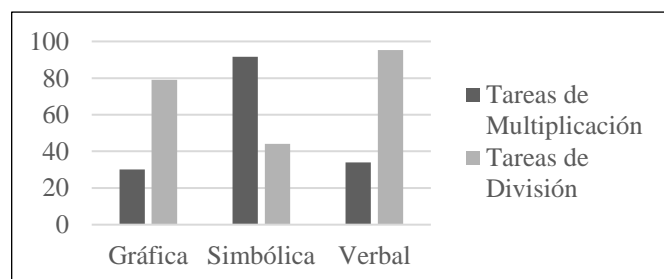


Figura 1 - Uso de Representaciones en tareas de la propuesta editorial 1
Fuente: elaborada por los autores

Además, existen diferencias significativas respecto al uso de representaciones según el contenido central de las tareas, mientras que en las tareas de multiplicación predomina fuertemente la presencia de representaciones simbólicas, en las de división predominan la

verbal y gráfica (Figura 1). Esto apunta a una mayor formalización en la presentación de significados relacionados con la multiplicación.

Veamos los tipos de representaciones de los diferentes sistemas semióticos y la frecuencia con la que se presentan en las tareas de la propuesta editorial 1 (Figura 2). Lo primero que destacamos es el uso predominante de las representaciones simbólicas, presentes en el 87% de las tareas, sobre las representaciones verbales (36%) y gráficas (35%). Concretamente, para la multiplicación las representaciones simbólicas usadas son las convencionales para la suma repetida y la multiplicación, siendo esta última la representación más frecuente en las tareas de esta propuesta editorial (57%). Tan solo en el 13% de las tareas encontramos coexistencia de dos representaciones simbólicas, la convencional para la multiplicación junto con la convencional para la suma repetida.

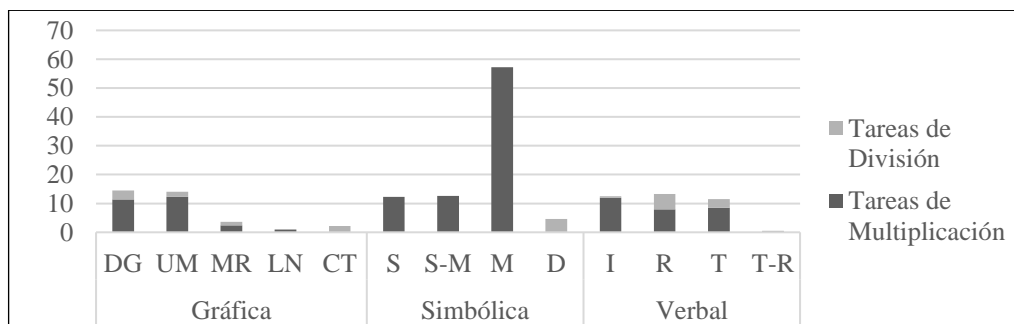


Figura 2 - Tipos de representaciones y su frecuencia (%) en las tareas de la propuesta editorial 1
Fuente: elaborada por los autores

Respecto a las representaciones verbales se usan, prácticamente con la misma frecuencia, las representaciones relacionadas con el significado (13%), las informales (12%) y las técnicas (11%), habiendo tan solo dos tareas donde coexisten la técnica y la relacionada con el significado. Son dos tareas resueltas, una para introducir la multiplicación y la otra para introducir la división. La representación relacionada con el significado más usada en la multiplicación es *n veces m* (*n vegades m*, en catalán) que fomenta el significado de repetición y el cálculo de suma repetida (Figura 3). En las tareas centradas de división, se usa *repartir en partes (iguales)* (*repartir en parts iguals*, en catalán) y *agrupar de n en n* para distinguir significados relativos a la división partición y la división medida, respectivamente. Así, la multiplicación se significa con repetir números una cierta cantidad de veces, la división partición con repartir a partes iguales y la división medida con agrupar. Señalamos que, aunque las tres representaciones verbales indican una estructura de isomorfismos de medida (VERGNAUD, 1983), la falta de continuidad semántica entre las representaciones relacionadas con el significado de las dos operaciones, puede dificultar la comprensión de la multiplicación y la división como operaciones inversas dentro de la misma estructura multiplicativa.

Por último, en las representaciones gráficas dominan el diagrama de grupos (15%) y la unidad multiplicativa (14%) que fomentan el significado de la multiplicación como la adición de grupos iguales, pero mientras que en la unidad multiplicativa no se muestra el total de objetos, el diagrama de grupos permite estrategias de conteo uno a uno o conteo por salto. Al respecto, la unidad multiplicativa se presenta, mayoritariamente, como el ensamblaje de la imagen de un objeto y un número que indica el precio de ese objeto (segunda tarea del Cuadro 1). Esta representación evoca significados más próximos a la multiplicación como razón (ANGHILERI; JOHNSON, 1992) al hacer hincapié en la relación entre dos cantidades de diferente naturaleza más que en la formación de unidades compuestas por agrupación de unidades simples. Finalmente, aunque el uso de la matriz rectangular es bajo (4%), queremos señalar que, mayoritariamente, se presenta con una fila o columna rodeada por una línea (Figura 3). Esta se corresponde a una representación intermedia entre el diagrama de grupos y la matriz rectangular (FINESILVER, 2017) que puede facilitar el reconocimiento de la matriz rectangular como modelo visual de la multiplicación y la división que señala la unidad multiplicativa.



Figura 3 - Representación gráfica matriz rectangular
Fuente: libro de la propuesta editorial 1 (2012, p. 106)

A continuación, en la Tabla 1 mostramos los porcentajes de tareas que presentan (P) una, dos y, tres o más de tres representaciones semióticas (1R, 2R y $\geq 3R$) en relación con las que demandan (D) un número (numérica), una, dos o tres representaciones (1R, 2R y 3R) o, tareas donde no se solicita respuesta o no se especifica el tipo de representación demandada (otras). Para los casos de una y dos representaciones presentadas o demandadas, detallamos los tipos de representación. Si fijamos la mirada en las representaciones presentadas en los enunciados de las tareas (columnas), observamos que casi el 70% presentan una única representación, predominando la simbólica (52,7%). Cabe destacar que casi el 51% de las tareas ofrecen una representación simbólica y requieren una respuesta numérica. Es decir, que la mitad de las tareas de la propuesta editorial 1 requieren realizar una operación donde no se concretan ni se amplían significados matemáticos a partir de la coexistencia o la transformación entre representaciones. En el 30% de tareas donde sí coexisten dos o más representaciones, se combinan representaciones gráficas o verbales con simbólicas en aproximadamente el 20%.

Respecto a las representaciones demandadas (filas), observamos que casi el 90% de las tareas demandan una única representación que, mayoritariamente (76%) corresponde a una

respuesta numérica y el resto se reparten entre representaciones simbólicas (9%), gráficas (4%) y verbales (1%). Poco más del 8% de las tareas demandan más de una representación, siendo siempre la representación simbólica una de ellas. Si nos fijamos en las tareas donde se requiere realizar algún tipo de transformación, observamos que tan solo el 19% de las tareas presentan un tipo de representación y demandan otro.

Tabla 1 - Representaciones presentadas y demandadas en la propuesta editorial 1

D \ P	1 R			2 R				≥3 R	Total
	S	G	V	S-G	S-V	G-V	S-S		
Numérica	50,7	3,9	4,8	2,4	1,4	3,1	1,9	7,3	75,6
1R	S	1,9	5,3		1,4		0,7		9,4
	G				0,0	2,2	0,5		4,1
	V				0,5				0,5
2R	S-G			0,5					0,5
	S-V				2,9				2,9
	S-S			1,4	2,9				4,3
3R		0,7							0,7
Otras		0,2				0,7		1	1,9
Total	52,7	10,1	6,8	10,1	3,6	5,1	1,9	9,7	100,0

Fuente: elaborada por los autores

En síntesis, la introducción de la multiplicación y la división en la propuesta editorial 1 se caracteriza por una alta presencia de representaciones simbólicas en contraste con el bajo uso de representaciones verbales y gráficas en los enunciados de las tareas, sobre todo en tareas de multiplicación. Además, dominan fuertemente las tareas con una única representación simbólica que demandan respuesta numérica. El grado en el que las representaciones simbólicas coexisten con representaciones gráficas o verbales es bajo (20%). Este hecho puede conllevar pocas oportunidades en el aula para enseñar y aprender la variedad de significados que encapsulan las representaciones simbólicas, priorizando la formalización a la comprensión conceptual profunda. Además, si contemplamos el bajo porcentaje de tareas que demandan realizar alguna transformación entre representaciones, inferimos que esta propuesta editorial ofrece pocas oportunidades para relacionar representaciones semióticas de la multiplicación y la división y extender los significados matemáticos que se derivarían de su uso aislado.

Por otro lado, la frecuencia de representaciones gráficas de la multiplicación y la división (35%) es ligeramente superior a la frecuencia en libros de texto en otros contextos, reportada en investigaciones recientes. Por ejemplo, Kosko y Singh (2018) reportan que el 27,7% de las tareas centradas en multiplicación y división en las seis propuestas editoriales para

el tercer grado en Estados Unidos que analizaron, incorporaban representaciones gráficas. Así mismo, Trupčević y Valent (2022) señalan que el 25% de las tareas de las tres propuestas editoriales más usadas en Croacia, en Educación Primaria, presentaban alguna representación gráfica de la multiplicación. En conjunto, las representaciones de cada sistema semiótico más usadas para la multiplicación fomentan significados de adición repetida con un alto grado de formalismo simbólico. Para la división se fomentan los significados de repartir en partes iguales y agrupar de n en n usando, principalmente, representaciones verbales y gráficas. Esta propuesta editorial, aunque introduce las dos operaciones, no promueve conexiones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas.

4.2 Análisis y caracterización de la propuesta editorial 2

Los contenidos del libro y el cuadernillo de la propuesta editorial 2 se organizan en quince unidades subdivididas en sesiones. La unidad tres se centra en la multiplicación y, las unidades cuatro y nueve en la multiplicación y división conjuntamente. En total se analizaron 395 tareas, 280 tareas de multiplicación (71% del total de tareas), 95 tareas centradas en la división (24%) y veinte tareas con ambos contenidos (5%). En este punto aclaramos que, debido al bajo porcentaje de tareas con ambos contenidos, para el análisis de los tipos de representaciones estas tareas se incluyeron en el conjunto de tareas centradas en la división.

Si discriminamos por el contenido central de la tarea (Figura 4), esta propuesta editorial promueve la construcción de significados relativos a la multiplicación primordialmente mediante representaciones simbólicas y gráficas. Destacamos el bajo uso de las representaciones verbales en las tareas de multiplicación. En cambio, en la construcción de los significados de división, aunque dominan las representaciones simbólicas, las gráficas y las verbales intervienen con una frecuencia alta.

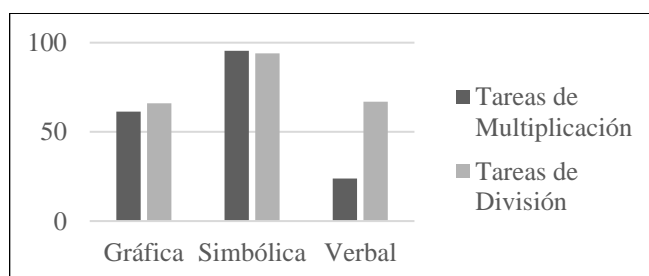


Figura 4 - Uso de representaciones en tareas de la propuesta editorial 2
Fuente: elaborada por los autores

Respecto a los diferentes tipos de representaciones semióticas y su frecuencia en las tareas la propuesta editorial 2 (Figura 5), destacamos el claro dominio de las representaciones

simbólicas, presentes en el 95% de las tareas, seguidas de las representaciones gráficas (63%) y, con menor frecuencia, las representaciones verbales (36%). Concretamente, en las tareas de multiplicación predomina el uso de la representación simbólica convencional para la multiplicación (65%) y la convencional para la división en las tareas de división (19%). Tan solo en el 11% de las tareas coexisten dos representaciones simbólicas, mayoritariamente las convencionales para la multiplicación y división que están presentes que en todas las tareas que introducen conjuntamente las dos operaciones.

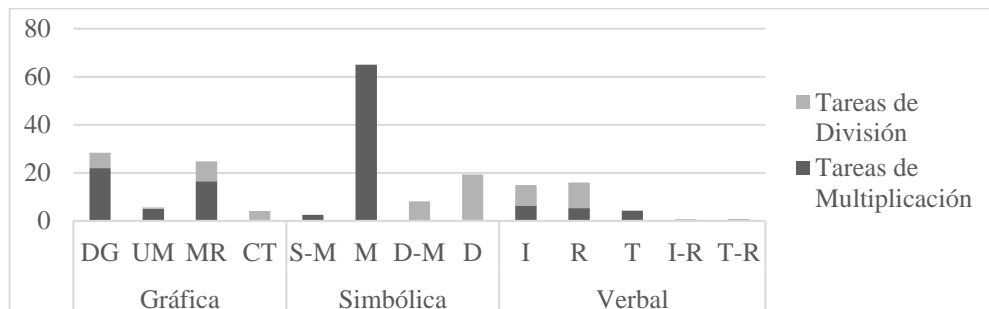


Figura 5 - Tipos de representaciones de la propuesta editorial 2
Fuente: elaborada por los autores

Si nos fijamos en las representaciones gráficas, dominan el diagrama de grupos (28%) y la matriz rectangular (25%) tanto en tareas centradas en la multiplicación como en la división. La unidad multiplicativa, con una presencia baja en esta propuesta editorial (6%), se corresponde con la imagen de un grupo del diagrama de grupos iguales donde se perciben todas las unidades simples. En relación con la matriz rectangular, encontramos algunas tareas (6%), donde se disponen los elementos a repartir o agrupar en forma rectangular pero no hay correspondencia entre el número de filas o de columnas con el divisor. Por un lado, en estos casos, el potencial de la matriz rectangular para generar y ampliar significados está mermado al no representar las tres cantidades involucradas en una multiplicación o división. Por el otro, se dificulta la conexión entre representaciones ya que no se pueden identificar los elementos relevantes de la división en la esta representación gráfica. Por ejemplo, en la tarea de la Figura 6 se puede identificar la cantidad total de elementos a agrupar (treinta bolitas) en la representación verbal y gráfica, pero la cantidad de elementos que tiene cada grupo solo se puede identificar en la representación verbal (cinco bolitas).

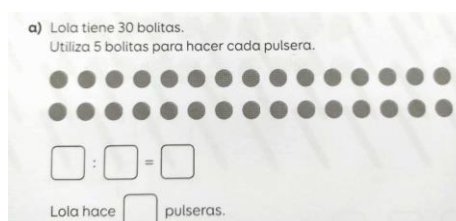


Figura 6 - Tarea de la propuesta editorial 2
Fuente: cuadernillo de la propuesta editorial 2 (2018, p. 34)

Por último, respecto a las representaciones verbales, predominan las relacionadas con el significado (16%) y las informales (15%) siendo minoritarias las técnicas (4%). Estas aparecen junto a las relacionadas con el significado tan solo en tres tareas resueltas en el inicio de tres sesiones diferentes, dos de multiplicación y una de división. Las representaciones verbales relacionadas con el significado más usadas en las tareas de multiplicación son *n grupos de m*. En las tareas de división encontramos *repartir en n grupos iguales* para la división partición y, *hacer o formar grupos de n elementos* para la división medida. Dentro de la misma estructura multiplicativa de isomorfismos de medida (VERNAUGD, 1983), observamos una continuidad semántica entre las representaciones verbales de las dos operaciones que se centran en significados relativos a la agrupación de unidades simples, ya sea porque se repiten (multiplicación), se hacen (división medida) o se reparte en grupos iguales. Esta continuidad semántica facilita la comprensión de la multiplicación y división como operaciones inversas según la acción que se haga sobre la unidad multiplicativa.

A continuación, nos centramos en la coexistencia de representaciones semióticas en las tareas. En la Tabla 2 mostramos los porcentajes de las tareas que incorporan una, dos o, tres o más representaciones semióticas en relación con las tareas que demandan una respuesta numérica, una, dos o, tres o más representaciones u, otro tipo de respuesta.

Tabla 2 - Representaciones presentadas y demandadas en la propuesta editorial 2

D \ P	1 R			2 R				≥ 3 R	Total
	S	G	V	S-G	S-V	G-V	S-S		
Numérica	26,8	0,5		14,2	5,6		1,8	3,6	52,4
1R	S			7,6	2,3			16,7	26,6
2R	S-G		0,8						0,8
	S-S					0,8		4,8	5,6
≥3								3,3	3,3
Otras		3,0	0,8	0,5	0,3	2,0		4,8	11,4
TOTAL	26,8	3,5	1,6	22,3	8,2	2,8	1,8	33,2	100,0

Fuente: elaborada por los autores

En relación con las representaciones que se presentan, dominan las tareas donde coexiste más de una representación (68,3%), en el 35,1% coexisten dos representaciones y en el 33,2% tres o más. Mayoritariamente (67%), en las tareas coexisten la representación simbólica y otro tipo de representación, sobre todo la gráfica, pudiendo generar oportunidades para concretar significados matemáticos subyacentes a la representación simbólica de la multiplicación o la división. En contraste, casi el 32% incorporan una única representación, con el 27% que presentan una representación simbólica y demandan una respuesta numérica, es decir, la

realización de una operación. Por otro lado, respecto a las representaciones demandadas en las tareas, el 79% solicitan una única representación que, mayoritariamente (52,4%), corresponde a una respuesta numérica y, en menor grado, a una representación simbólica (26,6%). Tan solo el 9,7% de las tareas demandan más de una representación, siendo siempre la representación simbólica una de ellas. Si nos fijamos, ahora, en las tareas que requieren realizar alguna transformación entre representaciones semióticas, observamos que en el 35,3% de tareas es necesario realizar alguna transformación, dominando las transformaciones que presentan más de una representación y solicitan una simbólica.

En síntesis, la introducción de la multiplicación y la división en la propuesta editorial 2 se caracteriza por la coexistencia de diversas representaciones en las tareas y por el bajo uso de representaciones verbales, sobre todo en tareas de multiplicación. Las representaciones gráficas tienen una frecuencia alta (63%) en comparación con libros de texto de otros contextos donde no se alcanza el 30% de tareas con representaciones gráficas de la multiplicación o la división (en Estados Unidos, KOSKO; SINGH, 2018; en Croacia, TRUPČEVIĆ; VALENT, 2022). En consonancia, cuando coexisten diversas representaciones, mayoritariamente se yuxtaponen representaciones gráficas y simbólicas, prestando poca atención al uso de representaciones verbales para concretar significados o relaciones entre diferentes representaciones semióticas. Si, además nos fijamos en las tareas que requieren algún tipo de transformación, mayoritariamente piden representaciones simbólicas, algunas gráficas y en ningún caso verbal. Así, esta propuesta editorial privilegia oportunidades para enseñar y aprender a construir y articular representaciones simbólicas y gráficas, por encima de oportunidades para aprender representaciones verbales relacionadas con el significado.

Por otro lado, los tipos de representaciones más usados fomentan significados de la multiplicación como la adición de grupos iguales y, de la división como la repartición o creación de grupos iguales. Se hace especial énfasis en significados relativos a la agrupación de unidades simples para formar la unidad multiplicativa compuesta. Además, en esta propuesta editorial se introducen las dos operaciones y, aunque se privilegien las tareas de multiplicación, se fomenta la comprensión de la multiplicación y la división como operaciones inversas.

5 Consideraciones finales

En este trabajo se presenta un análisis multimodal que ha permitido caracterizar tareas de multiplicación y división en libros de texto de segundo de Educación Primaria en base a la frecuencia y coexistencia de las representaciones semióticas presentadas y demandadas. La

amplia difusión de las dos editoriales en el contexto educativo español invita a la reflexión sobre aspectos relevantes asociados a la coexistencia de representaciones semióticas en tareas de multiplicación y división potencialmente abordadas en muchas aulas.

En las dos propuestas analizadas son habituales tareas donde las representaciones simbólicas no coexisten con representaciones verbales que permitan al resolutor concretar significados asociados al pensamiento multiplicativo y establecer relaciones entre las representaciones. Si bien la representación simbólica tiene un gran potencial semántico para captar y describir lo general minimizando ambigüedades, atomiza una multitud de significados que necesitan ser concretados (O'HALLORAN, 1999; CHICO, 2018). Diversos estudios señalan los beneficios de introducir representaciones verbales relacionadas con el significado para extender, semánticamente, los significados evocados con otros tipos de representaciones, especialmente las simbólicas por su carácter abstracto (O'HALLORAN, 2005; PREDIGER; WESSEL, 2013). Coincidimos con Prediger y Wessel (2013) y Prediger (2019) que la distinción de tipos de representaciones verbales según el registro lingüístico en el análisis de representaciones semióticas aporta información valiosa respecto a la construcción de significados matemáticos en determinadas culturas escolares. Dichas autoras aplican esta distinción para realizar trayectorias de aprendizaje respecto a contenidos matemáticos específicos donde se incluye la lengua matemática asociada a ese contenido. En este estudio ampliamos su aplicación al análisis de tareas escritas en libros de texto. Consideramos relevante seguir profundizando en los tipos de representaciones verbales, especialmente en las relacionadas con el significado asociado a contenidos matemáticos en las lenguas del contexto español, así como su interacción con otras representaciones semióticas por su influencia en la construcción de significados.

En una segunda fase de este estudio consideramos ampliar la muestra, buscando una cierta exhaustividad, para caracterizar la propuesta educativa respecto de los significados relativos a la multiplicación y división que se construyen en las tareas de libros de texto del contexto educativo español. Por un lado, es importante conocer los tipos de representaciones más usados en las tareas de libros de texto, ya que pueden afectar en la forma en que los maestros fomentan el aprendizaje de la multiplicación y división en las aulas. Por otro, la coexistencia y transformación entre representaciones facilita el conocimiento de las representaciones disponibles en cada cultura (DREHER; KUNTZE, 2015), aunque para la comprensión profunda del concepto que representan mediante la sinergia de significados es necesario que se relacionen las diferentes representaciones (DUVAL, 2006).

Así, el análisis de las formas de coexistencia de representaciones semióticas y su potencial para generar oportunidades para enseñar y aprender a relacionar representaciones en el aula requiere más estudio. Al respecto, distinguimos tareas en las que: i) se presentan informaciones parciales mediante diferentes representaciones semióticas; ii) se yuxtaponen diversas representaciones de un mismo concepto; iii) se requiere realizar alguna transformación entre diferentes representaciones semióticas. El primer caso requiere una interpretación conjunta y articulada de las diversas representaciones, generando oportunidades para conocer las representaciones, pero no necesariamente implica que se relacionen. En el tercer caso, la transformación entre representaciones sí requiere relacionar los elementos relevantes de cada representación y puede conllevar una sinergia de los significados asociados a cada una. En cambio, en el segundo caso, la yuxtaposición de representaciones semióticas en el enunciado de una tarea no tiene porqué implicar que el resolutor relacione los elementos relevantes de cada representación si no se hacen explícitas estas relaciones. Las representaciones verbales juegan un papel fundamental para explicitar esas relaciones en textos escritos y en prácticas discursivas en el aula (PREDIGER, 2019).

Agradecimientos

Al centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, y los proyectos PID2021-122180OB-I00 (MINECO, España) y RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España.

Referencias

ANGHILERI, J. **Teaching number sense**. Londres: Continuum, 2000

ANGHILERI, J.; JOHNSON, D. C. Arithmetic operations on whole numbers: Multiplication and division. *In*: POST, T. R. (ed.), **Teaching mathematics in grades K–8**. Boston: Allyn & Bacon., 1992. p. 157-200.

BADILLO, E.; FONT, V.; AZCÁRATE, C. Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemática del bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 23, número extra, p. 1-6, 2005.

BARMBY P.; HARRIES, T.; HIGGINS, S.; SUGGATE, J. The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 70, n. 3, p. 217-241, 2009.

CAÑADAS, C.; FIGUEIRAS, L. Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. **Infancia y Aprendizaje**, Barcelona, v. 34, n. 4, 409-425, 2011.

- CAVIEDES, S.; DE GAMBOA, G.; BADILLO, E. Procedimientos Utilizados por Estudiantes de 13-14 Años en la Resolución de Tareas que Involucran el Área de Figuras Planas. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 68, 1015-1035, dez. 2020.
- CASTILLO, M.J.; BURGOS, M. Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, n. 72, p. 555-579, abr. 2022.
- CHARALAMBOUS, C. Y.; DELANEY, S.; HSU, H.; MESA, V. A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. **Mathematical Thinking and Learning**, Philadelphia, v. 12, n. 2, p. 117-151, 2010.
- CHICO, J. Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Barcelona, v. 7, n. 14, p. 31-47, 2018.
- DREHER, A.; KUNTZE, S. Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 88, n. 1, p. 89-114, 2015.
- DOWNTON, A.; SULLIVAN, P. Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 95, n. 3, p. 303-328, 2017.
- DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 61, n. 1/2, p. 103-131, 2006.
- FAN, L.; ZHU, Y.; MIAO, Z. Textbook research in mathematics education: Development status and directions. **ZDM Educación Matemática**, Berlín, v. 45, n. 5, p. 633-646, 2013
- FINESILVER, C. Emerging and developing multiplicative structure in students' visuospatial representations: Four key configuration types. In: DOOLEY, T.; GUEUDET, G. (ed.). **Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Dublin: DCU Institute of Education y ERME, 2017. p. 3920-3927.
- FONT, V.; GODINO, J. D. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 67-98, 2006.
- FREEMAN, D. J.; PORTER, A. C. Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? **American Educational Research Journal**, [s.l.], v. 26, n. 3, p. 403-421, 1989.
- HADAR, L. L. Opportunities to learn: mathematics textbooks and students' achievements. **Studies in Educational Evaluation**, Edinburgh, v. 55, n. 4, p. 153-166, 2017.
- HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C; BAPTISTA, P. **Metodología de la investigación**. 5. ed. Ciudad de México: McGraw-Hill Interamericana, 2010.
- HOUANG, R. T.; SCHMIDT, W. H. TIMSS international curriculum analysis and measuring educational opportunities. In: IEA INTERNATIONAL RESEARCH CONFERENCE, 3., 2008, Taipei. **Proceedings [...]**. Taiwan: Taiwan Normal University, 2008. p. 1-18. Disponible en: <https://www.iea.nl/publications/presentations/timss-international-curriculum-analysis-and-measuring-educational>. Acceso en: 21 dic. 2022.
- IVARS, P.; FERNÁNDEZ, C. Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 28, n. 1, p. 9-

38, 2016.

JACOB, L.; MULLIGAN, J. Using Arrays to Build towards Multiplicative Thinking in the Early Years. **Australian Primary Mathematics Classroom**, Adelaide, v. 19, n. 1, p. 35-40, 2014.

KILPATRICK, J. What works? *In*: SENK, S. L.; THOMPSON, D. R. (eds.). **Standards' based school mathematics curricula. What are they? What do students learn?** Nueva York: Lawrence Erlbaum, 2003. p. 471-493.

KOSKO, K.W.; SINGH, R. Third grade textbooks' models for multiplication y division. *En*: HODGES, T. E.; ROY, G. J.; TYMINSKI, A. M. (eds). **Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Greenville: University of South Carolina y Clemson University, 2018. p. 117-120.

LEMKE, J. **Multiplying meaning: visual and verbal semiotics in scientific text**. Londres: Routledge, 1998.

MONJE, Y.; SECKEL, M. J.; BRENDA, A. Tratamiento de la inecuación en el currículum y textos escolares chilenos. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n.61, p. 480-502, ago. 2018.

MOSCHKOVICH, J. Principles and Guidelines for Equitable Mathematics Teaching Practices and Materials for English Language Learners. **Journal of Urban Mathematics Education**, Atlanta, v. 6, n. 1, p. 45-57, 2013.

O'HALLORAN, K. Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. **Semiotica**, Berlín, v. 124, n. 1, p. 1-29, 1999.

O'HALLORAN, K. **Mathematical Discourse: Language, Visual Images and Symbolism**. Londres: Continuum, 2005.

PLANAS, N.; BADILLO, E.; CHICO, J. Soportes lingüísticos matemáticamente relevantes en la enseñanza de la ecuación cuadrática. *En*: MARBÁN, J. M.; ARCE, M.; MAROTO, A.; MUÑOZ-ESCOLANO, J. M.; ALSINA, Á. (eds.). **Actas del simposio de Investigación en Educación Matemática XXIII**. Valladolid: SEIEM, 2019. p. 481-490.

PÖHLER, B.; PREDIGER, S. Intertwining lexical and conceptual learning trajectories. **Eurasia Journal of Mathematics, Science, & Technology Education**, Londres, v. 11, n. 6, p. 1697-1722, 2015.

PREDIGER, S. Theorizing in Design Research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematical classrooms. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Barcelona, v. 8, n.15, p. 5-27, 2019.

PREDIGER, S.; WESSEL, L. Fostering German language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. **Mathematics Education Research Journal**, Melbourne, v. 25, n. 3, p. 435-456, 2013.

RENKL, A.; BERTHOLD, K.; GROßE, C. S.; SCHWONKE, R. Making better use of multiple representations: How fostering metacognition can help. *In*: AZEVEDO, R.; ALEVEN, V. (eds.), **International handbook of metacognition and learning technologies**. Berlín: Springer, 2013. p. 397-408.

SUTHERLAND, R.; WINTER, J.; HARRIES T. A transnational comparison of primary mathematics textbooks: the case of multiplication. **Research in Mathematics Education**, Reston, v. 3, n. 1, p. 155-167, 2001.



TRUPČEVIĆ, G.; VALENT, A. The Teaching of Initial Multiplication Concepts and Skills in Croatian Textbooks. **CEPS Journal**, Liubliana, v. 12, n. 2, p. 119-141, 2022.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. En: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.), **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. Nueva York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

Submetido em 15 de Setembro de 2022.

Aprovado em 18 de Outubro de 2022.