

## O uso do método dos elementos de contorno e do teorema estático da análise-limite na determinação de cargas de colapso em problemas bidimensionais

Weber Geovanni Mendes Maciel

*Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Estruturas e Fundações, São Paulo, Brasil  
E-mail: weber.maciел@poli.usp.br*

Marcos Aurélio Marques Noronha

*Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Estruturas e Fundações, São Paulo, Brasil  
E-mail: marcos.noronha@poli.usp.br*

Patrícia de Oliveira Faria

*Universidade do Vale do Itajaí, Curso de Engenharia Civil, Itajaí, Santa Catarina, Brasil  
E-mail: patricia.faria@univali.br*

### Resumo

O presente trabalho considera o uso do Método dos Elementos de Contorno (MEC) na avaliação da carga de colapso de problemas em estado plano de deformação, usando o teorema estático da análise-limite. Essa análise envolve o modelo constitutivo rígido-plástico, onde uma formulação não-linear do MEC faz-se necessária. Análises não-lineares com o MEC normalmente requerem o uso de uma discretização auxiliar no domínio através de células internas. Para evitar essa discretização de domínio, o presente desenvolvimento baseia-se em uma nova formulação não-linear do MEC, recentemente desenvolvida por Noronha e Pereira, usando apenas discretização de contorno (interfaces entre subregiões da zona plastificada). Os resultados obtidos pela discretização com a nova formulação do MEC são comparados com os obtidos pelo MEC convencional e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). A comparação entre os diferentes resultados é feita com os valores da função de escoamento e com o valor obtido para a carga de ruptura.

**Palavras-chave:** método dos elementos de contorno, análise-limite, teorema estático.

### Abstract

*The present development considers the Boundary Element Method (BEM) for the collapse load evaluation of plane strain problems, using the static theorem of the limit analysis. This analysis is based on the rigid-plastic constitutive model, thus requiring a non-linear approach for the Boundary Element Method. Normally, non-linear analyses with BEMs require the use of an auxiliary domain discretization with internal cells. To avoid this domain discretization, the present development makes use of a new non-linear BEM approach using a pure boundary discretization recently proposed by Noronha & Pereira. The results obtained with the new BEM approach are compared with results obtained by conventional BEM and Finite Element Method (FEM). The comparison of the results for the three different approaches is based on the yield function and collapse load values.*

**Keywords:** boundary element method, limit analysis, static theorem

## 1. Introdução

A teoria da plasticidade tem suas origens em conceitos introduzidos em 1773 por Coulomb, tendo sofrido forte impulso entre 1950 e 1960, quando foram incluídos os conceitos da lei de escoamento e relação tensão-velocidade de deformação.

Os dois teoremas fundamentais da análise-limite (o teorema cinemático e o teorema estático) parecem ter sido apresentados pela primeira vez por Gvozdev (1938). Independentemente desse trabalho, os teoremas foram, precisamente, fundamentados por Hill (1951; 1952), para material rígido-plástico perfeito e por Drucker et al. (1951; 1952), para material elasto-plástico perfeito. A década de 50 é, assim, considerada como o período em que se firmam os fundamentos da análise-limite. Entre suas diversas aplicações na engenharia estrutural, merecem destaque as análises de pórticos, placas e cascas. No que diz respeito aos problemas clássicos de estabilidade da mecânica dos solos, destacam-se as aplicações de análise de estabilidade de taludes e capacidade de carga de fundações.

Para a elaboração de um projeto, o engenheiro precisa conhecer uma estimativa da carga de suporte da estrutura no instante do colapso. A análise-limite permite fazer excelentes estimativas com a vantagem de evitar os procedimentos incrementais-iterativos necessários na solução dos problemas da plasticidade (Maciel, 2002).

As seguintes hipóteses básicas são admitidas na demonstração dos teoremas da análise-limite:

1. Material elasto-plástico perfeito: o material apresenta superfície de escoamento convexa, com fluxo associado.
2. Pequenas deformações: considera-se que o sólido não sofra mudanças significativas de geometria até a ocorrência do colapso plástico.

No caso específico do teorema estático, a existência de uma distribuição

de tensão estaticamente admissível (em equilíbrio com a carga aplicada), que também seja plasticamente admissível (não viola o critério de escoamento em nenhum ponto do corpo), é condição suficiente para a carga aplicada ser igual ou inferior à de colapso.

Os primeiros desenvolvimentos da análise-limite foram baseados em abordagens analíticas. A partir da década de 70, o Método dos Elementos Finitos (MEF) e as técnicas de programação matemática passaram, então, a ser utilizados. Dessa forma, a obtenção heurística de um campo estático e plasticamente admissível foi substituída pela determinação numérica da solução de um problema de programação matemática.

O principal desenvolvimento desse trabalho consiste em utilizar uma nova metodologia para análises não-lineares com o MEC, aliado ao teorema estático da análise-limite para determinar a carga de ruptura. Observa-se que a maior parte dos estudos sobre análise-limite ainda é baseada no MEF. Esse fator serviu como motivação da pesquisa com o MEC realizada pelo presente trabalho. Assim, espera-se contribuir com o avanço nas pesquisas, envolvendo análises não-lineares por meio da análise-limite com o MEC e na determinação de cargas de colapso.

## 2. Programação matemática

De forma semelhante à abordagem com o MEF, a determinação da carga de colapso, através do teorema estático com o MEC, é baseada em um problema de programação matemática, onde se tem uma função-objetivo, que deve ser maximizada. No caso, a função-objetivo corresponde à carga de colapso  $P$  e está sujeita a restrições de igualdade, satisfazendo o equilíbrio de tensões no domínio com as forças externas, e a restrições de desigualdade, atendendo ao critério de escoamento no domínio do modelo. Esse trabalho propõe duas abordagens com o MEC e o teorema estático, para se obter a carga de colapso. Essas abordagens são formuladas como problemas de programação matemática não-linear.

- 1ª abordagem proposta:

$$\text{Maximizar } P \tag{1a}$$

Sujeita a:

$$\sigma_{ij} = \alpha \times P \tag{1b}$$

$$F = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{sen } \phi]^2 \leq 0 \tag{1c}$$

onde  $P$  é a carga de colapso;  $\sigma_{ij}$  referem-se às componentes de tensão  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  em cada ponto do domínio;  $\alpha$  é um coeficiente obtido através do equilíbrio entre  $\sigma_{ij}$  e  $P$ ;  $F$  é a função não-linear do critério de escoamento de Mohr-Coulomb; e  $c$  e  $\phi$  são os parâmetros do material.

- 2ª abordagem proposta:

$$\text{Maximizar } P \tag{2a}$$

Sujeita a:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_j} D_{kij} P_k d\Gamma_j - \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_j} S_{kij} u_k d\Gamma_j \tag{2b}$$

$$F = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{sen } \phi]^2 \leq 0 \tag{2c}$$

onde  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{u}$  são, respectivamente, os vetores de forças de superfície e de deslocamento no contorno  $\Gamma$  do modelo; e  $\mathbf{D}_{kij}$  e  $\mathbf{S}_{kij}$  são derivadas das soluções fundamentais  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  do MEC, dadas por:

$$D_{kij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \quad (2d)$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \quad (2e)$$

onde  $\mu$  é o módulo de elasticidade transversal do material; e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Nas duas abordagens mencionadas anteriormente, para se obterem as restrições do problema, em cada ponto do domínio, fez-se uso do algoritmo de visualização elaborado por Noronha e Pereira (2003), que será discutido em seguida.

### 3. Equações de equilíbrio

Essa seção apresenta duas metodologias distintas para o tratamento de não-linearidades em análises com o MEC. No decorrer do desenvolvimento dessas duas metodologias, será apresentado um detalhamento das principais características e procedimentos de cada abordagem.

A primeira metodologia apresentada refere-se a uma das abordagens mais tradicionais e que vem sendo aplicada usualmente a esses tipos de problemas. Essa metodologia fundamenta-se na hipótese de tensões iniciais, necessitando, então, da especificação de células internas para a integração dessas tensões iniciais.

Já a segunda metodologia discutida refere-se ao uso de uma nova alternativa desenvolvida por Noronha e Pereira (2003), para solucionar os problemas não-lineares com o MEC. O objetivo principal da nova metodologia é eliminar a necessidade de discretização do domínio dos modelos, fato este que não é verificado em outras metodologias.

### 3.1 Metodologia convencional

Nessa metodologia, além da discretização do contorno, utiliza-se uma discretização com células internas para a integração das tensões residuais, interpretadas como tensões iniciais. Essa discretização auxiliar do domínio dos modelos é semelhante à discretização utilizada no MEF (Figura 1). Porém, existem algumas características sutis na discretização com células internas, tais como: não se requer continuidade na representação da resposta, isto é, os elementos não precisam estar conectados pelos seus nós; não há incógnitas adicionais associadas com a malha das células internas, não havendo aumento na ordem do sistema de equações; a representação das tensões é mais precisa do que com o MEF; e a malha das células internas somente necessita cobrir zonas onde o comportamento não-linear é esperado (Beer, 2001).

Uma alternativa bastante aceita e utilizada para solucionar problemas com o MEC é a abordagem de tensões iniciais. Para a formulação convencional do MEC, é possível incluir o efeito da não-linearidade do material, partindo-se da equação de Navier e adotando-se a hipótese de que o modelo é submetido a tensões iniciais. Para a abordagem de tensões iniciais, tem-se que a Identidade de Somigliana pode ser expressa na seguinte forma:

$$u_i^i = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{lmk}^* \sigma_{km}^0 d\Omega \quad (3)$$

onde  $\sigma_{mk}^0$  são as componentes de tensão inicial e  $\varepsilon_{lmk}^*$  é a solução fundamental dada por

$$\varepsilon_{lmk}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu r} \left\{ (1-2\nu)(r_{,k} \delta_{lm} + r_{,m} \delta_{lk}) - r_{,l} \delta_{mk} + 2r_{,l} r_{,m} r_{,k} \right\} \quad (4)$$

onde  $r$  é a distância entre o ponto de observação da resposta e um ponto sobre o contorno.

Aplicando-se a Identidade de Somigliana (Equação 3) para cada nó  $i$  da discretização do MEC e usando funções de forma  $N_j$  para interpolar deslocamentos e forças de superfície como a seguir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_j \mathbf{u}^j \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = \mathbf{N}_j \mathbf{t}^j \quad (5)$$

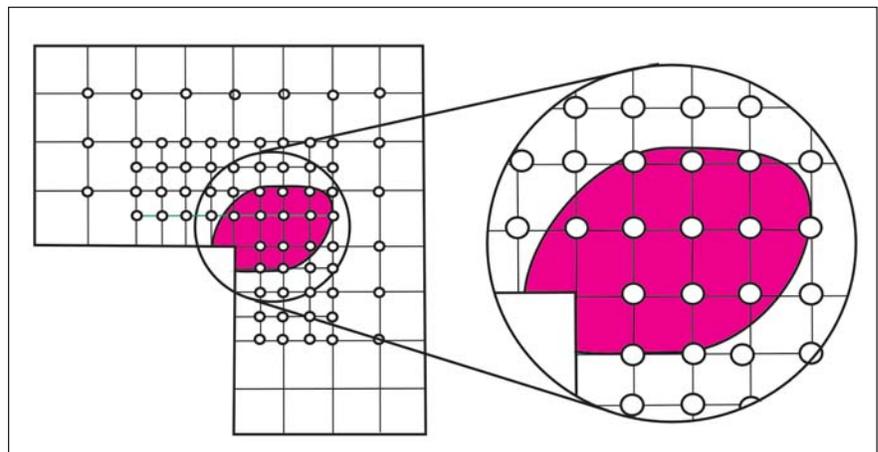


Figura 1 - Modelo com células internas.

os resultados no contorno podem ser obtidos por

$$Hu = Gt + F_{\sigma} \quad (6)$$

onde  $H$  e  $G$  são as matrizes características do MEC e  $F_{\sigma}$  é o vetor com a influência das tensões iniciais.

Aplicando-se as condições de contorno do problema na Equação 6, tem-se

$$Av = F + F_{\sigma} \quad (7)$$

onde  $A$  é a matriz com coeficientes lineares,  $v$  é o vetor com as incógnitas em deslocamentos e forças no contorno e  $F$  é função das forças e deslocamentos especificados no contorno.

Uma vez determinados os resultados no contorno, os deslocamentos no domínio podem ser obtidos pela Identidade de Somigliana (Equação 3) e as tensões podem ser obtidas no domínio do modelo por

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} E_{kmij} \sigma_{km}^0 d\Omega \quad (8)$$

onde

$$E_{kmij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im} - \delta_{ij} \delta_{mk} + 2\delta_{ij} r_{,m} r_{,k}] + 2\nu [\delta_{im} r_{,j} r_{,k} + \delta_{jk} r_{,i} r_{,m} + \delta_{ik} r_{,i} r_{,m} + \delta_{jm} r_{,i} r_{,k}] + 2\delta_{mk} r_{,i} r_{,j} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,m} r_{,k} \right\} \quad (9)$$

Como as relações entre tensões e deformações regidas pelas equações que governam os problemas de elastoplasticidade são expressas em termos de incrementos, então o processo numérico para a solução desses tipos de problemas requer que os carregamentos sejam aplicados de forma incremental (Venturini, 1983).

### 3.2 Metodologia sem células internas

A metodologia de análise não-linear com o MEC sem o uso de células internas proposta por Noronha e Pereira envolve os seguintes passos:

1. Assim como na metodologia convencional, faz-se uma análise linear elástica, obtendo-se os valores de  $v_0$  correspondentes aos deslocamentos e às forças de superfície nos nós do contorno.
2. A partir dos resultados da análise linear, utiliza-se o algoritmo de visualização desenvolvido por Noronha e Pereira, a fim de identificar, de forma direta e automática, as regiões onde a função de plastificação é igual a zero,  $F = 0$  (Figura 2).
3. Nas regiões onde  $F > 0$ , isto é, onde o critério de resistência foi violado, os resíduos de tensões plásticas  $\sigma^p$  devem ser computados. Para tanto, o algoritmo proposto considera o traçado de um conjunto de isocurvas para cada uma das componentes de  $\sigma^p$ . Para problemas bidimensionais, são traçados 3 conjuntos de isocurvas ( $\sigma_{xx}^p$ ,  $\sigma_{xy}^p$  e  $\sigma_{yy}^p$ ). Os resíduos de tensões plásticas, em um ponto, no interior da zona de plastificação, normalmente são obtidos através de técnicas de interpolação (Beer, 2001) ou algoritmos de retorno (Simo & Taylor, 1986). Devido à flexibilidade de obtenção de resultados com o MEC, o desenvolvimento proposto nesse trabalho utiliza um algoritmo de retorno com novas características, baseadas nas técnicas iterativas utilizadas pelo algoritmo de visualização.
4. Nesse momento, faz-se necessário adicionar a contribuição da parcela plástica ao sistema, devido à influência das tensões plásticas. Essa contribuição é computada por

$$F_{\sigma} = \sum_{z=1}^n \int_{\Omega_z} \epsilon^* \sigma_z^p d\Omega_z \quad (10)$$

onde  $N$  é o número de regiões plastificadas ( $F > 0$ ). Contudo, ainda assim, é necessário a discretização do domínio para uma análise não-linear.

O algoritmo proposto apresenta um tratamento inovador com a finalidade de obter o vetor  $F_{\sigma}$ , calculando somente integrais de contorno. O algoritmo requer a divisão das regiões onde  $F > 0$ , aplicando-se, nas mesmas, o traçado de isocurvas de tensão de forma direta e automática (Figura 3). Ao longo de cada isocurva, tem-se que os resíduos de tensão plástica podem ser tomados como sendo constantes. Após isso, são discretizadas as isofaixas nas regiões plastificadas com elementos de contorno curvos, a fim de considerar a influência das zonas de plastificação no sistema por meio de  $F_{\sigma}$ . Considera-se que os componentes do tensor de resíduo de tensão plástica são aproximadamente constantes em cada isofaixa. Esta hipótese é fundamental para transformar a integral de domínio em uma integral de contorno. Essa transformação encontra-se detalhada no item 3.2.1.

5. O incremento  $\Delta v$  referente à contribuição da parcela não-linear é obtido por  $A\Delta v = F_{\sigma}$  e a solução total  $v$  por  $v = v_0 + \Delta v$ .
6. As tensões  $\sigma^i$  são computadas novamente, identificando as novas regiões plastificadas, porém tais regiões levam em consideração o efeito das tensões iniciais obtidas.
7. Os passos 3, 4, 5 e 6 são repetidos até o critério de convergência ser satisfeito pela Equação 8.

Portanto o algoritmo proposto possibilita realizar análises não-lineares com o MEC, sem a utilização de células internas, conservando umas das principais vantagens do MEC. Nota-se, como será detalhado no item 3.2.1, que o cálculo do vetor  $F_{\sigma}$  é muito semelhante ao cálculo dos termos da matriz  $G$ , característica do

MEC. Desse forma, as integrais envolvidas no cálculo proposto são bem mais simples que as integrais da metodologia convencional, sendo facilmente implementadas, pois se baseiam em cálculos já existentes na análise linear.

### 3.2.1 Tratamento da atualização da resposta no contorno

Para considerar a influência das zonas plásticas no sistema de equações do MEC, sem a necessidade de malhas adicionais, Noronha e Pereira desenvolveram um tratamento inovador para o cálculo da integral:

$$F_{\sigma} = F_1^i = \sum_{z=1}^N \int_{\Omega_{0z}} \epsilon_{lmk}^* \cdot \sigma_{mk}^{0z} d\Omega_{0z} \tag{11}$$

onde  $\Omega_{0z}$  é uma região do domínio do modelo onde  $F > 0$ .

Sabendo-se que:

$$\epsilon_{lmk}^* = \frac{1}{2} (u_{lm,k}^* + u_{lk,m}^*) \tag{12}$$

e, pelas propriedades de simetria  $u_{lm}^* = u_{ml}^*$  e  $\sigma_{lm}^{0z} = \sigma_{ml}^{0z}$ , tem-se que o termo  $F_1^i$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$F_1^i = \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Omega_{0zx}} u_{lm,k}^* \sigma_{mk}^{0zx} d\Omega_{0zx} \tag{13}$$

onde S é o número de subdivisões em cada região sujeita ao efeito de plastificação. A somatória em S surgiu devido à hipótese imposta de que o resíduo de tensões plásticas é considerado constante dentro de cada uma das subdivisões sujeitas a não-linearidade. Porém, como não é possível realizar essa hipótese com um único mapa de isoformas, o algoritmo de visualização utilizado considera a obtenção de três mapas de isoformas, uma para cada componente do tensor das tensões, superpondo os efeitos para se obter o vetor  $F_{\sigma}$ . Com isso, o tensor de resíduos de tensões plásticas é decomposto em três partes:

$$\sigma_{mk}^{0z} = \sigma_{mk}^{A0z} + \sigma_{mk}^{B0z} + \sigma_{mk}^{C0z} \tag{14}$$

onde:

$$\sigma_{mk}^{0z} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^p & \sigma_{xy}^p \\ \sigma_{xy}^p & \sigma_{yy}^p \end{bmatrix}, \sigma_{mk}^{A0z} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_{mk}^{B0z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^p \end{bmatrix}, \sigma_{mk}^{C0z} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy}^p \\ \sigma_{xy}^p & 0 \end{bmatrix}.$$

Os termos  $\sigma_{xx}^p$ ,  $\sigma_{yy}^p$  e  $\sigma_{xy}^p$  são as componentes dos resíduos de tensões plásticas na direção x, y e z, respectivamente. Essa hipótese permite a aplicação direta do Teorema da Divergência, já que, na Equação 13, o termo  $\sigma_{mk}^{0zx}$  é constante. Então, tem-se que:

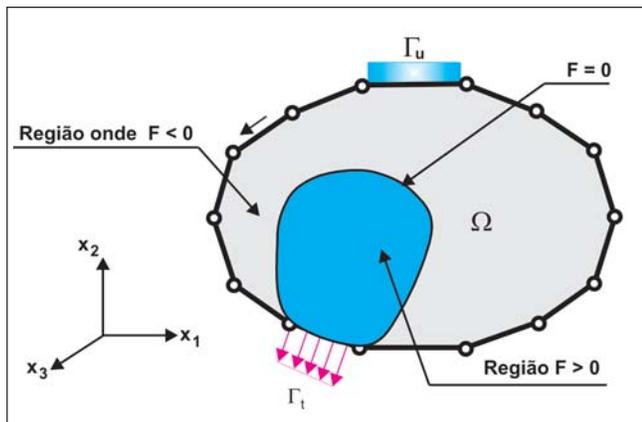


Figura 2 - Identificação direta e automática de zonas plásticas.

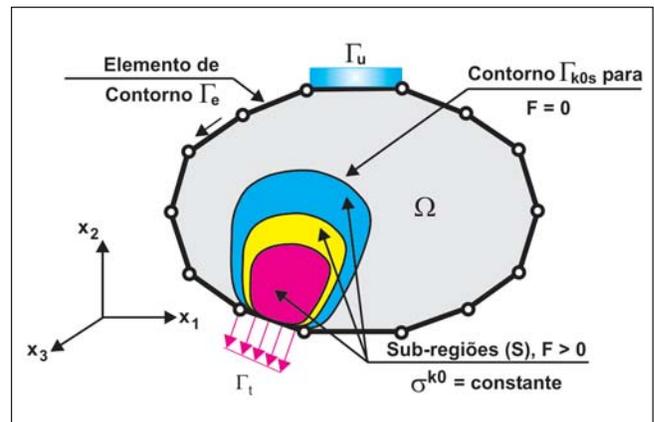


Figura 3 - Tratamento de não-linearidades sem malha de células internas.

$$F_1^i = \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u_{lm}^* \bar{\sigma}_{mk}^{A0zx} n_k d\Gamma_{A0s} + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{B0s}} u_{lm}^* \bar{\sigma}_{mk}^{B0zx} n_k d\Gamma_{B0s} + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{C0s}} u_{lm}^* \bar{\sigma}_{mk}^{C0zx} n_k d\Gamma_{C0s} \quad (15)$$

onde  $n_k$  é o vetor normal externo ao contorno de cada sub-região plastificada (Figura 4), que é a função a ser aproximada através da técnica de interpolação comumente utilizada pelo MEC; e  $\Gamma_{k0s}$  é o contorno de uma sub-região plastificada S qualquer de uma componente do resíduo das tensões plásticas  $k0$ , onde  $k0 = A, B, C$ .

Pode-se verificar que o procedimento de cálculo é semelhante ao utilizado para matriz G, sendo que a função  $n_k$  é interpolada usando as funções de forma definidas para um elemento de contorno da seguinte forma:

$$n_k = N_b \hat{n}_k^b \quad (16)$$

No caso de elemento quadrático, a expressão anterior pode ser escrita como a seguir:

$$n = N \hat{n}, \text{ onde } N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \text{ e } \hat{n} = \begin{Bmatrix} \hat{n}_1^1 \\ \hat{n}_2^1 \\ \hat{n}_1^2 \\ \hat{n}_2^2 \\ \hat{n}_1^3 \\ \hat{n}_2^3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

onde  $\hat{n}_k^b$  refere-se à componente k (1, direção x; 2 direção y) do vetor normal do nó b.

Com a interpolação definida pela Equação 16, o cálculo de  $F_\sigma$  referente a apenas um dos mapas de isoforma (A, por exemplo) fica dado por:

$$F_1^{Ai} = \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u_{lm}^* \bar{\sigma}_{mk}^{A0zx} N_b d\Gamma_{A0s} \hat{n}_k^b \text{ ou } F_1^{Ai} = \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u^* \bar{\sigma}^{A0zx} N d\Gamma_{A0s} \hat{n} \quad (18)$$

Uma vez obtido o vetor  $F_\sigma$  na forma proposta, a atualização da resposta no contorno pode ser obtida por meio das equações  $\Delta \Delta v = F_\sigma$  e  $v = v_0 + \Delta v$ , mencionadas anteriormente.

Assim, o campo de deslocamento pode ser escrito como:

$$u_k^i = \int_{\Gamma} u_{kl}^* p_l d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{kl}^* u_l d\Gamma + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u_{lm}^* \bar{\sigma}_{mk}^{A0zx} N_b d\Gamma_{A0s} \hat{n}_k^b + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{B0s}} u_{lm}^* \bar{\sigma}_{mk}^{B0zx} N_b d\Gamma_{B0s} \hat{n}_k^b + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{C0s}} u_{lm}^* \bar{\sigma}_{mk}^{C0zx} N_b d\Gamma_{C0s} \hat{n}_k^b \quad (19)$$

A Equação 19 mostra, claramente, que é possível a realização de análises não-lineares somente com a discretização do contorno do problema, não sendo necessária a discretização do domínio com malhas de células internas. Assim, o vetor  $F_\sigma$  pode ser facilmente obtido por meio de integrais apenas ao longo do contorno das sub-regiões encontradas, já que esses contornos podem ser determinados com base no algoritmo desenvolvido por Pereira e Noronha. Além disso, a integral de  $F_\sigma$ , resultante do desenvolvimento proposto, tem uma forma muito mais simples que a integral originalmente avaliada no domínio, além

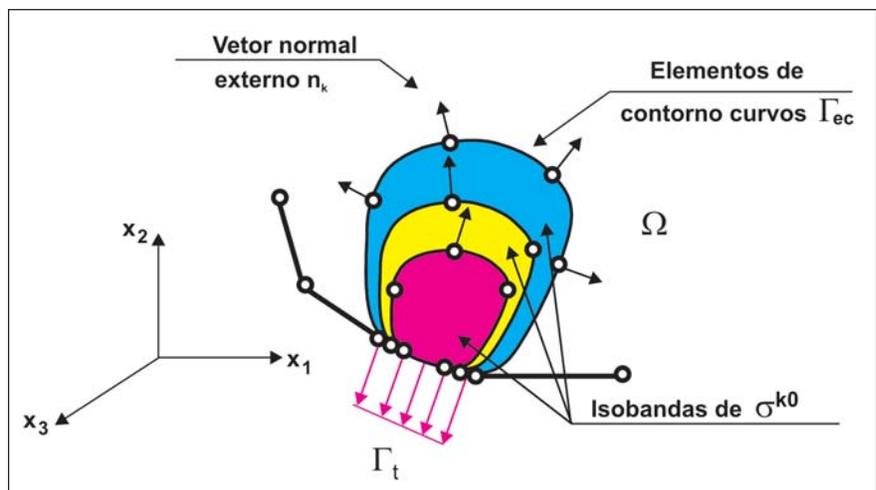


Figura 4 - Tratamento das sub-regiões de  $\sigma^{k0}$

de ser semelhante à integral das componentes da matriz  $G$ , cuja forma pode ser observada na primeira integral do lado direito da Equação 19.

#### 4. Superfície de escoamento

Nas análises consideradas nesse trabalho, utiliza-se a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb

$$F = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \sin \phi]^2 = 0 \quad (20)$$

onde  $c$  e  $\phi$  são, respectivamente, a coesão e o ângulo de atrito interno do material. O teorema estático da análise-limite requer campos de tensão plasticamente admissíveis, ou seja,  $F \leq 0$ . O critério de escoamento será aplicado nos pontos internos situados no domínio. Esses pontos são fornecidos de forma automática pelo algoritmo de traçado de isocurvas proposto por Noronha e Pereira (2003).

#### 5. Aplicação numérica e resultados preliminares

Para ilustrar a aplicação da metodologia proposta, será apresentado o problema clássico de um cilindro de parede espessa (Figura 5) de raio interno  $r_i = 1$  m e raio externo  $r_e = 1,25$  m, sujeito a uma pressão interna  $P$ . O material é caracterizado por uma coesão  $c = 1$  kN/m<sup>2</sup> e ângulo de atrito  $\phi = 0$ . O objetivo é determinar o menor valor de  $P$  que provoca a completa plastificação do cilindro.

A solução analítica é dada por (Maciel, 2002)

$$P = 2c \ln \frac{r_e}{r_i} = 0,44629 \text{ kN/m}^2 \quad (21)$$

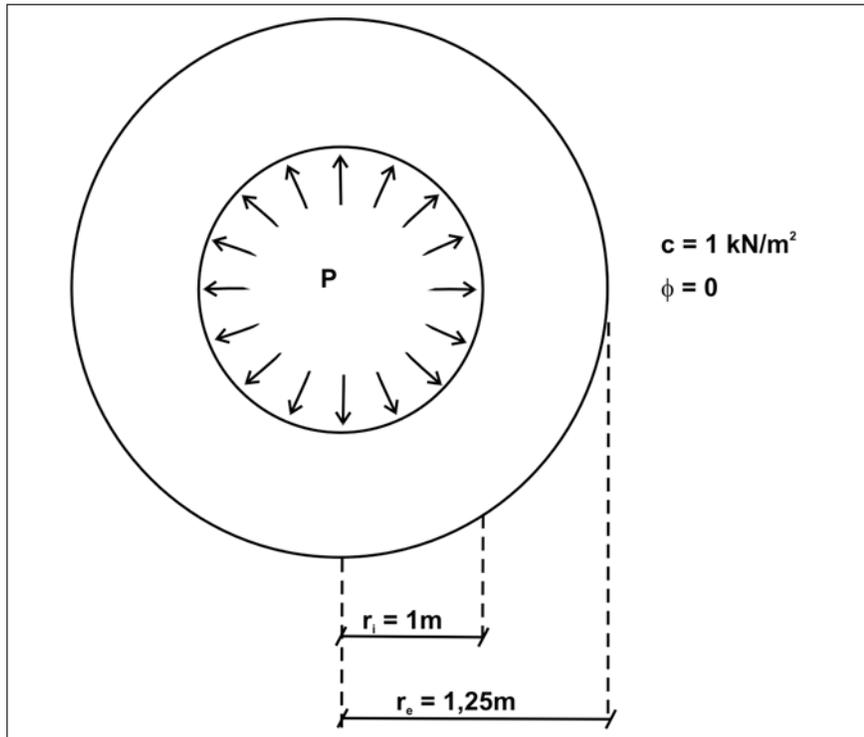


Figura 5 - Cilindro submetido à pressão interna  $P$ .

Um modelo com apenas um quadrante do cilindro foi utilizado, onde, para cada ponto interno  $i$  das isocurvas geradas, são analisadas as componentes de tensão  $\sigma_{xx_i}$ ,  $\sigma_{yy_i}$  e  $\sigma_{xy_i}$  (Figura 6).

Como mostrado inicialmente, foram elaboradas duas abordagens para o problema de programação matemática não-linear. Até o momento, foram obtidos resultados para a 1ª abordagem (Equações 1). Esses resultados são mostrados na Tabela 1.

Os resultados da Tabela 1 mostram que a 1ª abordagem, no caso do cilindro, fornece a carga de colapso que inicia o processo de plastificação. Isso acontece porque o problema está muito restrito, ou seja, todas as restrições de igualdade são lineares (Equação 1b). Sendo assim, o otimizador não tem liberdade para avançar no processo de otimização, pois ele o interrompe quando as restrições referentes a pontos situados próximos ao contorno interno (sobre o raio  $r_i$ ) são satisfeitas. Conseqüentemente, as demais restrições dos pontos internos, com o raio aproximando-se do raio externo  $r_e$ , ficam subordinadas àquelas.

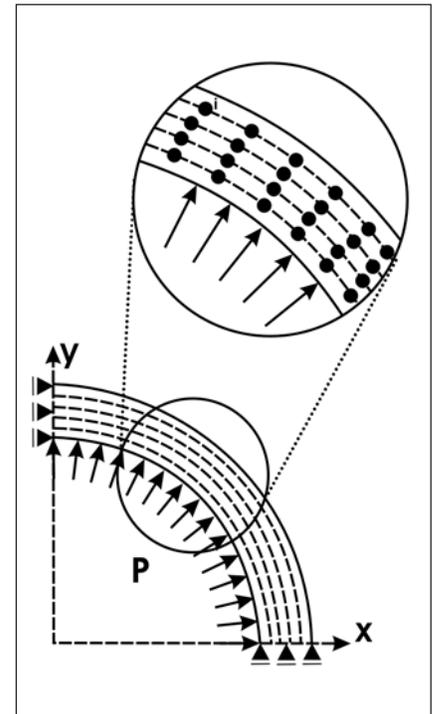


Figura 6 - Visualização fornecida pelo algoritmo de Noronha e Pereira (2003).

Os resultados para a 2ª abordagem (Equações 2) da programação matemática não foram satisfatórios devido a problemas de escala com o programa de otimização não-linear (LINGO).

## 6. Conclusões

Esse trabalho apresentou uma metodologia inovadora para determinar cargas de colapso através do teorema estático da análise-limite aliado ao Método dos Elementos de Contorno (MEC). Para obter a referida carga, resolve-se um problema de programação matemática não-linear, cujas restrições são dadas pelas equações de equilíbrio provenientes da aplicação do MEC sem células internas e pelo critério de escoamento de Mohr-Coulomb aplicado em pontos internos do domínio. Esses pontos são fornecidos pelo algoritmo de visualização desenvolvido por Noronha e Pereira.

A Tabela 1 apresenta os resultados encontrados com a primeira abordagem proposta para resolver o problema de programação matemática. Observa-se que os resultados obtidos foram bastante inferiores ao resultado esperado. Mesmo assim, eles poderão ser utilizados como um primeiro passo para avançar o cálculo da carga de colapso com o MEC. Acredita-se que a 2ª abordagem de otimização (Equações 2) seja mais adequada, podendo fornecer uma solução mais satisfatória.

Com as equações resultantes da técnica empregada, é possível a realização de análises não-lineares pelo MEC somente com a discretização do contorno do problema, não necessitando da discretização do domínio com malhas de células internas, para adicionar a contribuição da parcela plástica ao sistema.

Outra consequência importante da utilização do algoritmo de visualização proposto por Pereira e Noronha é o fato do mesmo identificar, de forma automática e direta, as regiões sujeitas à não-linearidades. Essa característica é uma grande vantagem do algoritmo proposto, pois normalmente, a análise convencional, com o uso de células internas,

Tabela 1 - Resultados preliminares.

Solução	Carga de Colapso P (kN/m <sup>2</sup> )	Tempo computacional (segundos)
Lingo (não linear)	0,3654431	1,00
Simplex revisado*	0,3630099	14.981,33

\* Obtido por meio da biblioteca IMSL do Microsoft Fortran PowerStation. O critério de Mohr-Coulomb é linearizado.

requer o conhecimento prévio dessas regiões, o que, nem sempre, é uma informação disponível para o analista. É importante ressaltar que, como essas regiões são obtidas de forma direta e automática, o erro devido à influência dessas regiões no processo iterativo-incremental do algoritmo proposto é consideravelmente menor do que nas outras abordagens, devido à maior precisão na localização dessas regiões.

## 7. Referências bibliográficas

- BECKER, A. A. *The boundary element method in engineering: a complete course*. Cambridge: McGraw-Hill, 1992.
- BEER, G. *Programming the boundary element method*. Chichester: Wiley, 2001.
- BESKOS, D. E. *Boundary element methods in mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 1991. (Computational Methods in Mechanics 3).
- DRUCKER, D. C., GREENBERG, H. J. e PRAGER, W. The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain. *Journal of Applied Mechanics*, 18, p.371-378, 1951.
- DRUCKER, D. C., PRAGER, W. e GREENBERG, H. J. Extended limit design theorems for continuous media. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9, p. 381-389, 1952.
- GVOZDEV, A. A. *The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic formulation*. Proceedings of the Conference on Plastic Deformations. Moscow: Akademiia Nauk S. S. R., 1938, p. 19-33.
- HILL, R. A note on estimating the yield-point loads in a plastic-rigid body. *Phil. Mag.*, 43, 1952, p. 353-355.
- HILL, R. On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield-point. *Phil. Mag.*, 42, p. 868-875. 1951.
- LINDO SYSTEMS INC. *Lingo User's Guide*. 2004.
- MACIEL, W. G. M. *Aplicação do teorema estático da análise-limite a problemas em estado plano de deformação*. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2002. 44p. (Dissertação de Mestrado).
- MÜLLER, A. S. (2004). *Um novo algoritmo para análises não-lineares utilizando o método dos elementos de contorno*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo., 106p. (Dissertação de Mestrado).
- NORONHA, M. A. M., PEREIRA, A. M. B. *A new algorithm for visualization of domain results in analysis with the boundary element method*. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BOUNDARY ELEMENT TECHNOLOGY - BETECH, 15, Detroit: 2003. v. 15.
- PEREIRA, A. M. B. *Avanços na visualização, análise não-linear e programação com o método dos elementos de contorno*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2004. 161p. (Dissertação de Mestrado).
- SIMO, J. C., TAYLOR, R. L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 22, p. 649-670, 1986.
- TELLES, J. C. F. *The boundary element method applied to inelastic problems*. (Lectures Notes in Engineering 1).
- VENTURINI, W. S. *Boundary element method in geomechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1983. (Lectures Notes in Engineering 4).

Artigo recebido em 19/05/2005 e aprovado em 26/10/2005.