

Estabilidade e vibração não linear de pórticos em aço usados em galpões industriais: análise paramétrica

Stability and nonlinear vibration of industrial pitched-roof steel frames: parametric analysis

Alexandre da Silva Galvão

Professor do Curso de Engenharia Civil
Departamento de Tecnologia em Engenharia Civil,
Computação e Humanidades
Universidade Federal de São João Del-Rei,
Campus Alto Paraopeba
Ouro Branco, MG - Brasil
asgalvao@hotmail.com

Andréa Regina Dias da Silva

D.Sc., Professor Adjunto,
DECIV / Escola de Minas, UFOP
Ouro Preto, MG, Brasil
andreadiassilva@yahoo.com.br

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

D.Sc., Professor Associado, Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil (PROPEC)
DECIV / Escola de Minas, UFOP
Ouro Preto, MG, Brasil
ricardo@em.ufop.br

Paulo Batista Gonçalves

D.Sc., Professor Titular,
Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil - DEC / PUC-Rio
Rio de Janeiro, RJ, Brasil
paulo@civ.puc-rio.br

Resumo

Esse trabalho apresenta um estudo referente à análise da estabilidade e vibração não linear de pórticos de aço planos do tipo galpão. Especial atenção é voltada à influência do pré-carregamento estático nas frequências naturais e nos modos de vibração dessas estruturas. Nesse sentido, foi utilizada uma formulação não linear de elementos finitos de viga-coluna que permite considerar as ligações entre os membros estruturais como semirrígidas. Para resolver o problema de equilíbrio estático não linear, um processo incremental e iterativo do tipo Newton acoplado ao método do comprimento de arco é adotado. Uma vez obtida convergência em cada passo de carga, emprega-se o método de Jacobi, para se determinarem as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura pré-carregada. Todo o processo de solução não linear adotado é detalhado em um algoritmo. A influência de um parâmetro geométrico (altura da tesoura) e outro físico (rigidez dos apoios) no comportamento do pórtico tipo galpão é destacada nas análises. Objetiva-se, assim, obter uma melhor compreensão de alguns fenômenos de instabilidade e sensibilidade estrutural e mostrar a importância desses parâmetros e do pré-carregamento estático na flambagem e na vibração dessa estrutura de grande aplicação prática.

Palavras-chave: Pórtico tipo galpão, análise numérica, estabilidade elástica, vibrações não lineares, estrutura pré-carregada.

Abstract

This paper presents a study on the stability and nonlinear vibration analysis of planar pitched-roof frames. Special attention is dedicated to the influence of static preloading in natural frequencies and vibration modes of these structures. For this, used was a nonlinear beam-column element formulation that considers connection flexibility between the structural members. The global nonlinear static equilibrium problem is solved using an incremental-iterative procedure, where in each load increment, the Newton-type iteration scheme is coupled to an arc-length strategy. At convergence in each load step, the Jacobi method determines the natural frequencies and vibration modes of the preloaded structure. The complete nonlinear solution strategy adopted is detailed in an algorithm. The influence of a geometric parameter (scissors' height) and other physical (support's stiffness) in the pitched-roof frame behavior is highlighted in the analysis. The goal is thus to have a better understanding of some instability phenomena and structural sensitivity, and to show the importance of these parameters and static preloading on the buckling and vibration of these frames, which have great practical application.

Keywords: *Pitched-roof frame, numerical analysis, elastic stability, nonlinear vibration, pre-loaded structure.*

1. Introdução

Os recentes avanços na engenharia civil, como o aparecimento de materiais mais resistentes e modelos computacionais mais precisos, permitem a idealização de sistemas e membros estruturais mais eficientes e esbeltos. Isso é particularmente verdadeiro em estruturas nas quais os efeitos do peso próprio devem ser minimizados, como em estruturas aeroespaciais, pórticos industriais de grandes vãos e em estruturas offshore. No entanto, o aumento da esbeltez desses sistemas estruturais os torna suscetíveis a problemas de vibração e flambagem. Além disso, cresce a influência da não linearidade geométrica no seu comportamento estático e dinâmico. Esses efeitos são, em geral, exacerbados na presença do pré-carregamento estático, bem como imperfeições geométricas e de carga. A interação entre esses fatores é importante para a análise de estruturas predispostas à flambagem. Assim, uma análise não linear precisa é essencial para o projeto seguro dessa classe de estruturas. A estrutura estudada, nesse trabalho, se enquadra nesse contexto. Trata-se do pórtico tipo galpão (pitched-roof frame), que é um sistema estrutural particularmente importante por sua grande utilização na construção civil, principalmente nos projetos industriais. Esse tipo de pórtico foi investigado extensivamente por Silvestre e Camotim (2000; 2002; 2005; 2007),

que examinaram vários aspectos da sua estabilidade, levando-se em conta que, de um modo geral, o seu comportamento é condicionado pelas configurações modais simétricas e antissimétricas.

O estudo da estabilidade e das vibrações de estruturas na pré e pós-flambagem é um tópico importante na análise e dimensionamento de pórticos esbeltos e vem sendo tema de pesquisas, entre as quais podem ser destacadas aquelas realizadas pelos seguintes autores: Trahair (1993); King (1995); Sophianopoulos (2003); Boutyour et al. (2006); Machado e Cortinez (2007); Au e Yan (2008) e Xu e Wu (2008).

De um modo geral, as estruturas aporticadas são projetadas considerando-se as barras que as compõem de forma independente. Entretanto, no caso de grandes deflexões, a carga crítica e o comportamento estrutural pós-flambagem são afetados pelos membros adjacentes. Procurando, então, dar continuidade às análises já realizadas pelos autores nos pórticos em L e arcos esbeltos (Galvão *et al.*, 2005; 2006), apresenta-se, nesse artigo, um estudo numérico e computacional usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) sobre a estabilidade elástica e a influência de um parâmetro geométrico (altura da tesoura) e outro físico (rigidez dos apoios), além do pré-carregamento estático, no comportamento de pórti-

cos planos de aço do tipo galpão. Com esse objetivo, foi utilizada uma formulação não linear de elementos finitos de viga-coluna, que permite considerar as ligações entre os membros estruturais como semirrígidas. Para a solução das equações que descrevem o equilíbrio estrutural estático, adota-se uma metodologia incremental e iterativa do tipo Newton acoplada ao método do comprimento de arco. Realiza-se a análise de vibração não linear do pórtico tipo galpão pré-carregado, por meio da qual as frequências e os modos de vibração associados são obtidos combinando um algoritmo de resolução de problemas de autovalores ao processo de solução não linear supracitado. Por fim, deve-se enfatizar que o estudo paramétrico desenvolvido, nesse trabalho, permite que se possam avaliar, com boa precisão, as condições críticas do pórtico do tipo galpão sob cargas estáticas e dinâmicas, inclusive averiguar a possibilidade de existência de ressonância interna, que é um indicador de comportamento dinâmico bastante complexo.

Na próxima seção, o problema de equilíbrio estático não linear e a estratégia adotada para obtenção das frequências de vibração do pórtico carregado são descritos. Em seguida, são feitas as análises paramétricas e, ao final, fazem-se algumas considerações sobre os resultados obtidos.

2. Equilíbrio estático e vibração não linear da estrutura

Os detalhes da formulação geométrica não linear dos elementos finitos usados na modelagem do sistema estrutural investigado, nesse artigo, podem ser encontrados em Galvão (2004) ou Silva (2009). Usa-se um elemento de viga-coluna com dois

pontos nodais e, nas suas extremidades, molas fictícias simulam a flexibilidade da ligação. Essas molas são fisicamente fixadas ao elemento de viga-coluna respeitando-se as condições de equilíbrio e compatibilidade. Isso permite que os graus de liberdade

das ligações possam ser incorporados na relação de rigidez tangente do elemento de viga-coluna.

No contexto do MEF, o equilíbrio estático de qualquer sistema estrutural pode ser expresso de acordo com a equação:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (1)$$

sendo \mathbf{F}_i o vetor das forças internas, que é função dos deslocamentos nodais \mathbf{U} ; λ é um escalar que representa o fator de carga e \mathbf{F}_r é um vetor que define a direção do carregamento aplicado.

Para se obter o caminho de equilíbrio não linear da estrutura, utiliza-se uma técnica incremental para resolver o sistema representado pela Eq. (1). Esse procedimento consiste em calcular uma sequência de deslocamentos incrementais

$\Delta \mathbf{U}_1, \Delta \mathbf{U}_2, \Delta \mathbf{U}_3, \dots$, correspondentes a uma sequência de incrementos de carregamento, representada por $\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \Delta \lambda_3, \dots$. Em cada incremento de carga, entretanto, devido à não linearidade presente em \mathbf{F}_i , o problema deve ser obtido através de iterações do tipo Newton-Raphson, com o intuito de estabelecer o equilíbrio do sistema estrutural (satisfazer a Eq. 1) mediante um determinado critério de convergência.

De acordo com a Figura 1, que ilustra na forma de um algoritmo a metodologia de solução usada nesse trabalho, para um dado passo de carga, o processo de solução não linear pode ser resumido em duas etapas. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta \lambda^0$, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a

seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{U}^0$. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$ caracterizam a chamada solução incremental predita. No entanto, como \mathbf{F}_i é uma função não linear, essa solução predita não satisfaz, a princípio, a Eq. (1). Na segunda etapa de solução, procura-se, através de uma dada

em que \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_r são as matrizes de rigidez linear e geométrica, respectivamente; \mathbf{M} é a matriz de massa; ω é a frequência natural de vibração e \mathbf{X} , o vetor modo de vibração. Como ilustrado na Figura 1, em

estratégia de iteração, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais eficientemente possível. Se as iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos nodais \mathbf{U} , mas, também, o parâmetro de carga λ , então uma equação adicional de

$$[(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_r) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{X} = 0 \quad (2)$$

cada passo de carga, após a obtenção do equilíbrio estático do sistema, resolve-se a equação anterior para a obtenção das frequências naturais e modos de vibração da estrutura carregada. O método

restrição é requerida. As restrições impostas pelo método do comprimento de arco foram usadas nesse trabalho.

As frequências de vibração da estrutura carregada e os modos de vibração correspondentes podem ser obtidos resolvendo-se o seguinte problema de autovalor:

de Jacobi (Brebbia & Ferrante, 1986) foi usado para a solução desse problema de autovalor. No final do algoritmo apresentado na Figura 1 estão os procedimentos adotados para a solução de Eq. (2).

Algoritmo: ANÁLISE DE VIBRAÇÃO NÃO LINEAR

```

1: Define os dados de entrada: geometria da estrutura e propriedades do material
2: Obtém-se o vetor de cargas de referência,  $\mathbf{F}_r$  (direção do carregamento)
3:  $t = 0$ 
4:  $t_i = t$ 
5: Seleciona o incremento inicial do parâmetro de carga  $(\Delta\lambda^0)_i$ 
6: for cada incremento de carga do > PROCESSO INCREMENTAL
7:    $t = t_i$  > Passo de carga anterior
8:    $t_i = t + 1$  > Passo de carga atual
9:   Forma a matriz de rigidez do sistema estrutural,  $\mathbf{K}$ 
10:  Determina o vetor de deslocamento residual inicial  $\delta\mathbf{U}_r$  através da equação:  $\mathbf{K}\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{F}_r$ 
11:  if  $t_i = 1$  then
12:     ${}^1\delta\mathbf{U}_r = \delta\mathbf{U}_r$ 
13:     $\Delta\lambda^0 = (\Delta\lambda^0)_i$ 
14:  else
15:    Seleciona  $\Delta\lambda^0$  de acordo com o método do comprimento de arco (Galvão, 2004)
16:  end if
17:  Obtém o vetor de deslocamentos incrementais:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$ 
18:  for  $k \leftarrow 1$ , número máximo de iterações ( $nmax$ ) do > PROCESSO ITERATIVO
19:    Avalia o vetor de forças internas:  ${}^t\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_r + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$ 
20:    Avalia o vetor de forças residuais:  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^t\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^t\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$ 
21:    if  $|\mathbf{g}^{(k-1)}|/|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r| \leq \text{fator tolerância}$  then
22:      Go to linha 34
23:    else
24:      if  $k = nmax$  then  $\Delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0/2$ 
25:      Go to linha 18
26:    end if
27:    if método de Newton-Raphson padrão then
28:      Atualiza a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ 
29:    end if
30:    Corrige o parâmetro de carga  $\delta\lambda^k$  seguindo o método do comprimento de arco (Galvão, 2004)
31:    Avalia a correção dos deslocamentos nodais:
     $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_g^k$  com:  $\delta\mathbf{U}_g^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)}$  e  $\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r$ 
32:    Atualiza o parâmetro de carga e o vetor de deslocamentos nodais:
     $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$  > Variáveis incrementais
     ${}^t\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^t\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$  > Variáveis totais
33:  end for
34:  Atualiza a geometria da estrutura (coordenadas nodais)
35:  Atualiza a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e a matriz de massa  $\mathbf{M}$ 
36:  Decompõe a matriz  $\mathbf{M}$  usando o método de Cholesky:  $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}$ 
37:  Obtém a matriz  $\mathbf{A} = (\mathbf{S}^{-1})^T\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1}$ 
38:  Resolve o sistema  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \omega^2\mathbf{X}$  e obtém-se os autovalores ( $\omega^2$ ) e os autovetores correspondentes ( $\mathbf{X}$ )
39: end for

```

Figure 1
Estratégia de solução
não linear adotada.

3. Análise numérica do pórtico tipo galpão

A estratégia numérica apresentada na seção anterior é agora aplicada à análise do pórtico tipo galpão, ilustrado na Figura 2. Cabe informar que a formulação e a metodologia de solução do problema estrutural foram extensivamente validadas (Galvão, 2004; Silva, 2009) e sua eficiência foi, portanto, atestada. O carregamento aplicado e as características físicas e geométricas do pórtico estão também indicados nessa figura. Cada membro estrutural foi modelado com 5 elementos finitos e consideraram-se, inicialmente, as colunas engastadas na base (apoios perfeitamente rígidos: $S_c \rightarrow \infty$) e a altura da tesoura igual a 1.471 m.

Na Figura 3, são apresentadas as trajetórias não lineares de equilíbrio do pórtico. Veja que a carga aplicada P é adimensionalizada pela carga crítica de Euler ($P_e = \pi^2 EI/L^2$). As configurações deformadas da estrutura associadas aos pontos A, B, C, D, E e F da trajetória estão ilustradas nessas duas figuras.

Já, na Figura 4, pode ser observada a variação das duas primeiras frequências naturais da estrutura e os respectivos modos de vibração associados. Essas frequências foram adimensionalizadas pela menor frequência de vibração livre da estrutura descarregada ($\omega_0 = 577.63$ rad/s).

Observa-se que, no trecho $D-E-F$ da trajetória, a menor frequência (ω_1) assume valores imaginários. Sabe-se, do critério dinâmico de estabilidade, que isso ocorre quando a configuração de equilíbrio é instável. Condições críticas são identificadas para $\omega^2 = 0$. A menor frequência natural da estrutura é associada com um modo de vibração simétrico, enquanto a segunda menor frequência (ω_2), com um modo assimétrico.

Nas próximas subseções, serão analisadas a influência da altura da tesoura e a influência das condições de apoio no comportamento estático e dinâmico do pórtico.

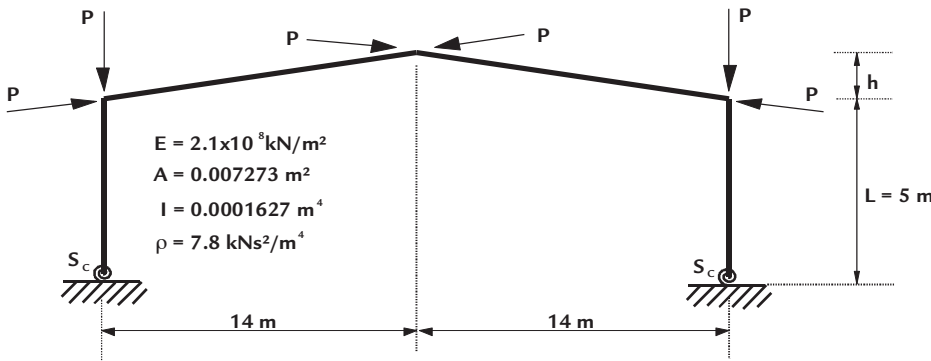


Figura 2 Pórtico do tipo galpão: geometria e carregamento.

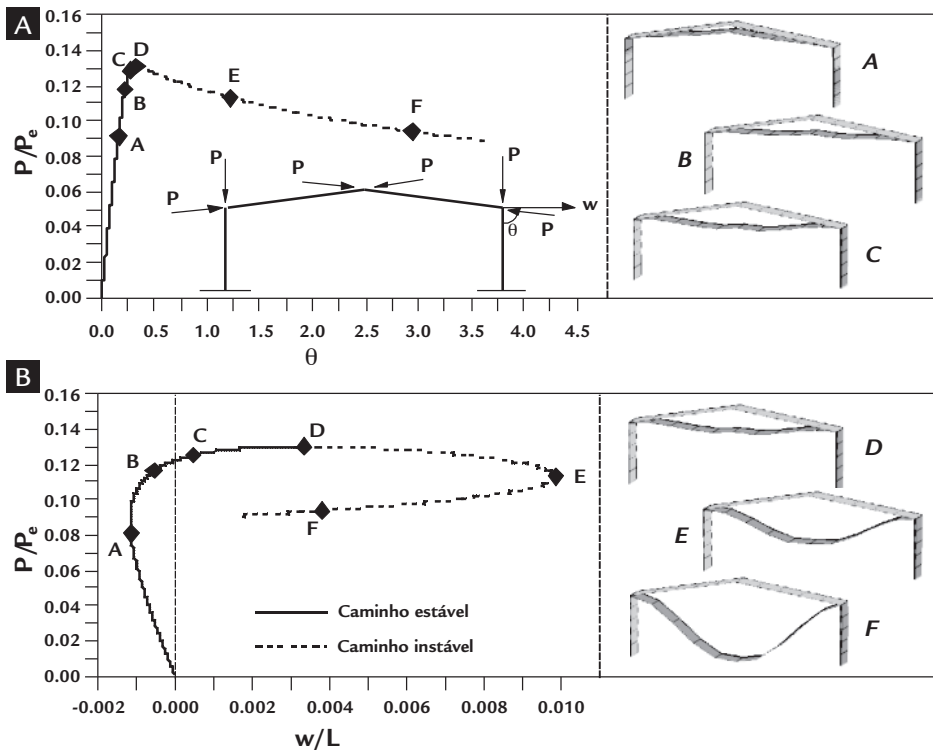


Figura 3 Trajetórias de equilíbrio e configurações deformadas. (A) Caminho P/P_e versus θ e configurações deformadas em A, B e C . (B) Caminho P/P_e versus w/L e configurações deformadas em D, E e F .

O parâmetro geométrico h

Com o objetivo de avaliar a importância da altura da tesoura, no comportamento da estrutura, o pórtico tipo galpão é analisado, considerando diferentes

valores para o parâmetro geométrico h (Figura 1).

Através da Figura 5, que ilustra o caminho não linear de equilíbrio, verifi-

ca-se que, quanto maior a altura da tesoura, maior será a capacidade de carga do pórtico. O carregamento P e a deflexão lateral w foram adimensionalizados

pela carga crítica de Euler e por L , respectivamente.

A Figura 6 fornece a variação das duas menores frequências naturais do pórtico com o carregamento aplicado. Os modos de vibração correspondentes a essas frequências são mostrados

na mesma figura. Observa-se que, para pequenos valores de h , a menor frequência é associada a um modo de vibração simétrico. Além disso, as duas menores frequências, mesmo após a ocorrência do carregamento crítico, continuam apresentando uma sepa-

ração significativa entre si. Entretanto, a partir de certo valor de h , essas frequências se cruzam. Para alturas superiores, ocorre uma troca, entre os dois primeiros modos de vibração, e o modo associado à menor frequência passa a ser antissimétrico.

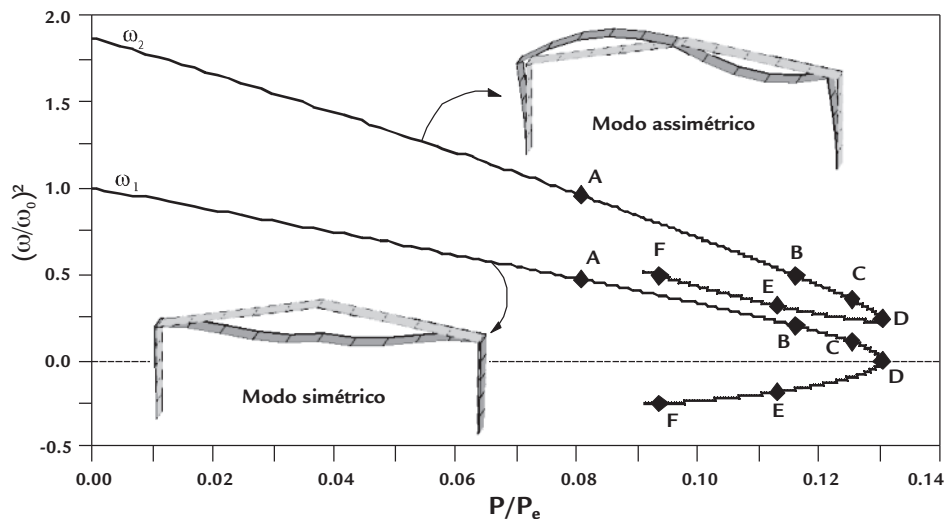


Figura 4
Frequências naturais e modos de vibração da estrutura carregada.

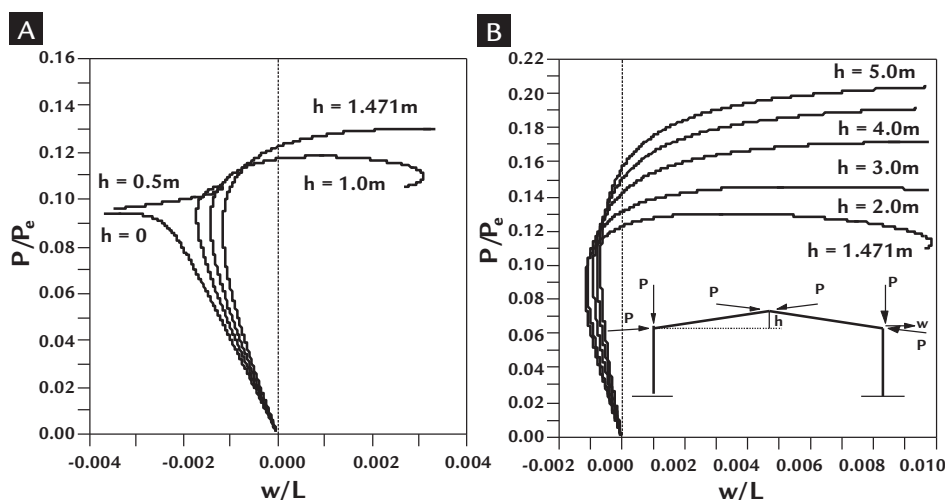


Figura 5
Trajetórias de equilíbrio do pórtico tipo galpão para diferentes valores do parâmetro geométrico h .
(A) $h = 0$ a 1.471 m
(B) $h = 1.471$ m a 5 m

O Parâmetro Físico S_c

Nessa seção, o mesmo pórtico, ilustrado na Figura 2, é analisado, porém considerando diferentes condições de apoio. O parâmetro S_c , indicado também na Figura 2, é usado para definir a rigidez dos apoios.

Inicialmente, a Figura 7 exhibe as trajetórias de equilíbrio do pórtico para vários valores de S_c ; já a Figura 8 mostra a variação da menor frequência de vibração do pórtico com o carregamento. Mais uma vez, as frequências foram adimensionalizadas, usando-se a menor frequência de vibração livre do pórtico engastado ($\omega_0 = 577.63$ rad/s).

Como esperado, o aumento da rigidez dos apoios promove um acréscimo

do valor da carga crítica do pórtico. Entretanto, para uma rigidez igual ou superior a $3EI/L$, a direção do deslocamento w passa a ser positiva e o acréscimo da capacidade de carga é acompanhado por um aumento da inclinação da trajetória pós-crítica, indicando uma maior sensibilidade a imperfeições. Essa é uma característica interessante observada em alguns sistemas estruturais (Galvão et al., 2005): a carga crítica cresce devido à variação de certos parâmetros, mas a sensibilidade a imperfeições também cresce. Desse modo, o aparente acréscimo, na capacidade de carga, pode ser totalmente destruído pela inevitável presença de imperfeições.

A influência da flexibilidade dos apoios, nas frequências naturais e nos modos de vibração do pórtico, pode ser analisada através da Figura 9, que exhibe a variação das duas menores frequências de vibração com o carregamento aplicado. Para os pórticos com apoios mais rígidos, há uma separação significativa entre as duas menores frequências naturais e o modo fundamental de vibração é simétrico. Essa separação entre as primeiras frequências diminui à medida que se reduz a rigidez nos apoios e, para valores de S_c menores que um determinado limite, há uma troca entre os primeiros modos de vibração, o modo de vibração fundamental passa a ser antissimétrico.

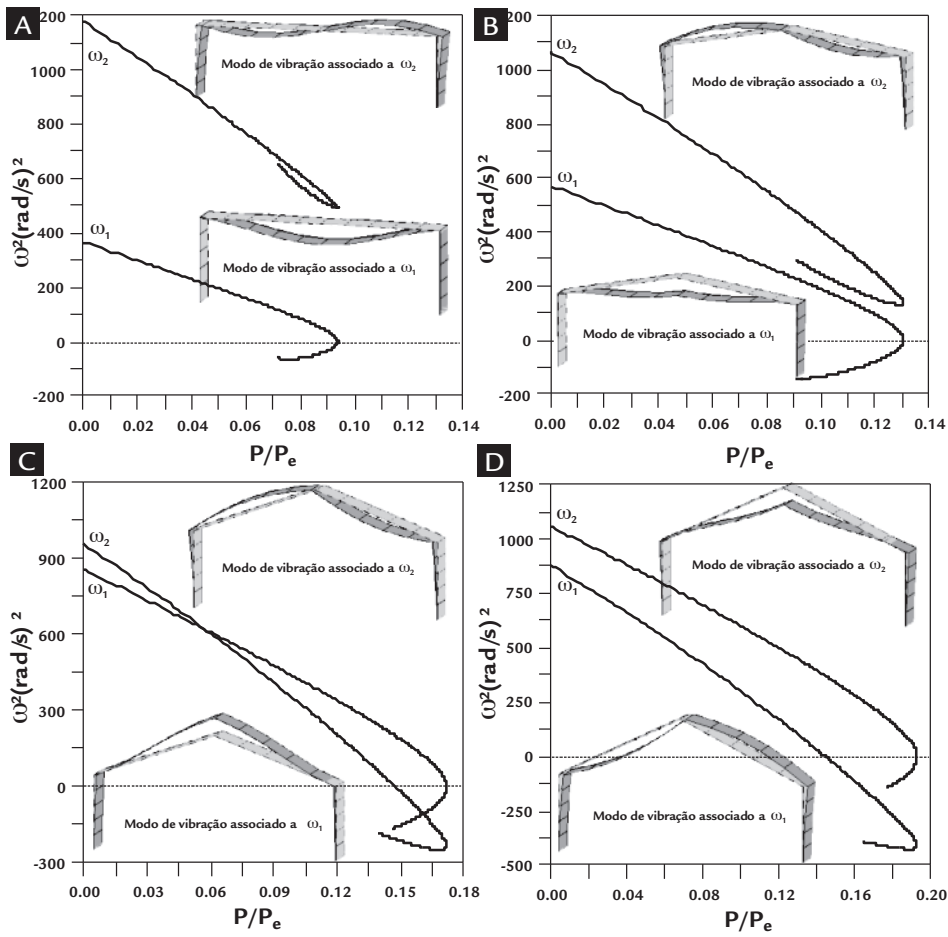


Figura 6
Frequências naturais e modos de vibração do pórtico tipo galpão para diferentes valores do parâmetro geométrico h .
(A) $h = 0$.
(B) $h = 1.471\text{m}$.
(C) $h = 3\text{ m}$.
(D) $h = 4\text{ m}$

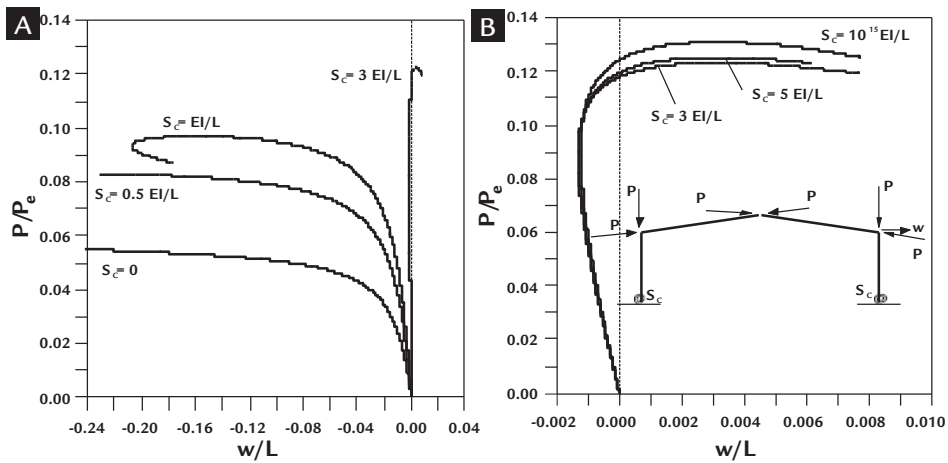


Figura 7
Trajetórias de equilíbrio do pórtico tipo galpão para diferentes valores do parâmetro rigidez dos apoios S_c .
(A) $S_c = 0$ a $3EI/L$.
(B) $S_c = 3EI/L$ a $10^{15}EI/L$

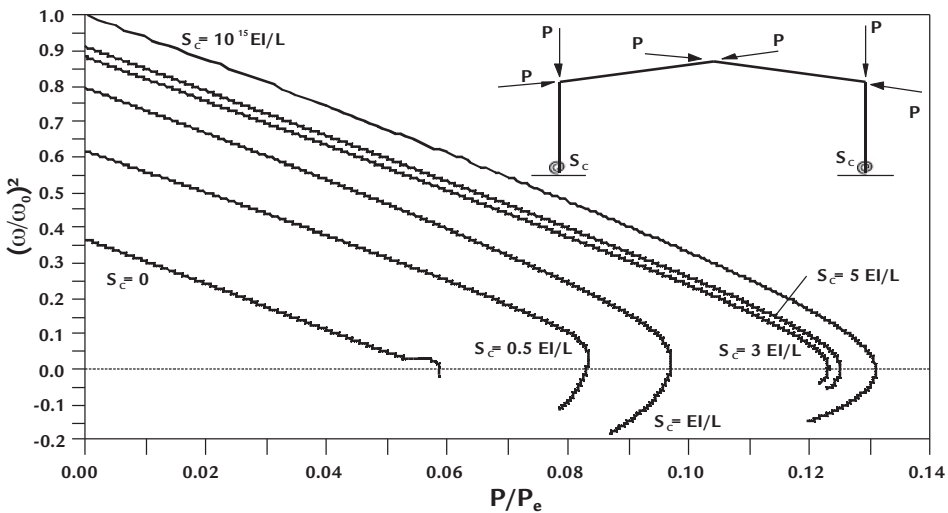


Figura 8
Variação da frequência natural de vibração do pórtico tipo galpão carregado com o parâmetro rigidez dos apoios S_c .

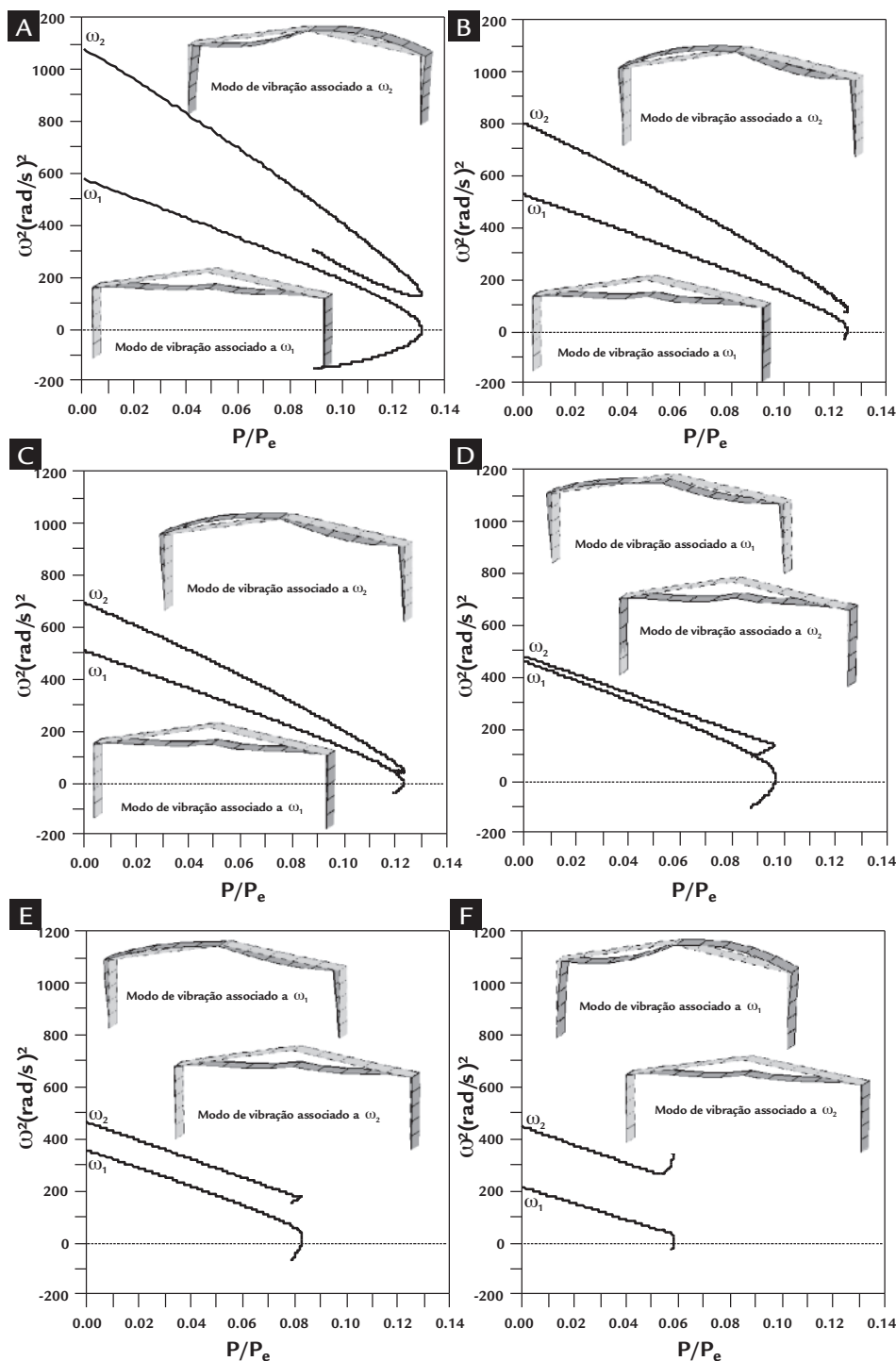


Figura 9
 Variação das duas menores frequências e seus respectivos modos de vibração com o parâmetro rigidez dos apoios S_c .
 (A) $S_c = 10^{15} EI/L$.
 (B) $S_c = 5 EI/L$.
 (C) $S_c = 3 EI/L$.
 (D) $S_c = EI/L$.
 (E) $S_c = 0.5 EI/L$.
 (F) $S_c = 0$ (Apoios rotulados)

4. Considerações finais

Os resultados apresentados, nesse trabalho, indicam que a avaliação da rigidez do apoio e da configuração geométrica do pórtico tipo galpão é essencial para que se possa avaliar com precisão as condições críticas do pórtico do tipo galpão.

As respostas indicam que a perda de rigidez dos apoios, durante a vida útil da estrutura, pode afetar o comportamento estrutural sob cargas estáticas e dinâmicas. Isto está de acordo com a literatura técnica, nas quais falhas estru-

turais devido à deterioração do apoio são relatadas. Nesses casos, há uma redução lenta no valor da rigidez do apoio com alterações acentuadas na rigidez global da estrutura e nas suas características dinâmicas. Porém essas alterações só podem ser detectadas e quantificadas com análises criteriosas do comportamento não linear da estrutura.

Mostrou-se, ainda, a influência da altura da tesoura na vibração da estrutura pré-carregada estaticamente. Pôde-se observar que o modo de vibração asso-

ciado à menor frequência natural pode ser, dependendo da altura do pórtico, simétrico ou antissimétrico.

Por fim, de uma maneira geral, a modificação desses parâmetros provoca uma alteração na rigidez do sistema estrutural e, através da análise das frequências naturais da estrutura pré-carregada, foi possível perceber que os pórticos tipo galpão podem exibir vários tipos de ressonância interna e, dessa forma, apresentar um comportamento dinâmico complexo.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES e ao CNPq o apoio recebido para desenvolvimento dessa pesquisa. Eles também são gratos às fundações estaduais de fomento FAPEMIG e FAPERJ.

6. Referências bibliográficas

- AU, F.T.K., YAN, Z.H. Dynamic analysis of frames with material and geometric nonlinearities based on the semi-rigid technique. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 8, n. 3, p. 415-438, 2008.
- BOUTYOUR, E.H., AZRAR L., POTIER-FERRY M. Vibration of buckled elastic structures with large rotations by an asymptotic numerical method. *Computers & Structures*, v. 84, n. 3-4, p. 93-101, 2006.
- BREBBIA, C.A., FERRANTE, A.J. *Computational methods for the solution of engineering problem*. John Wiley and Sons Ltd, 1986. 364p.
- GALVÃO, A.S. *Estabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semirrígidas*. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 2004. p. 245. (Tese de Doutorado).
- GALVÃO, A.S., GONÇALVES, P.B., SILVEIRA, R.A.M. Post-buckling behavior and imperfection sensitivity of L-Frames. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 5, n. 1, p. 19-38, 2005.
- GALVÃO, A.S., SILVEIRA, R.A.M., GONÇALVES, P.B. Análise não linear estática e dinâmica de arcos abatidos. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE), 27. *Proceedings...* Belém, PA, Brasil, v.1, p. 1-12, 2006.
- KING, C.M. Plastic design of single-storey pitched-roof portal frames to Eurocode 3. Technical report. Publication 147. UK: The Steel Construction Institute, 1995. 86p.
- MACHADO, S.P., CORTÍNEZ, V.H. Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations. *Engineering Structures*, v. 29, p. 372-382, 2007.
- SILVA, A.R.D. *Sistema computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Ouro Preto: Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2009. 322 f. (Tese de Doutorado).
- SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. An asymptotic-numerical method to analyze the post-buckling behavior, imperfection-sensitivity and mode interaction in frames. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, v. 131, n. 6, p. 617-632, 2005.
- SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. Coupled global instabilities in pitched-roof frames. In: THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE ON COUPLED INSTABILITIES IN METAL STRUCTURES (CIMS), *Proceedings...* Lisboa, Portugal, p. 475-486, 2000.
- SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. Elastic buckling and second-order behaviour of pitched-roof steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 63, n. 6, p.804-818, 2007.
- SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. Post-buckling behavior, imperfection-sensitivity and mode interaction in pitched-roof steel frames. In: Proceedings of SSRC 2002 annual stability conference, p. 139-162, 2002.
- SOPHIANOPOULOS, D.S. The effect of joint flexibility on the free elastic vibration characteristics of steel plane frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v.59, n. 8, p. 995-1008, 2003.
- TRAHAIR, N.S. Steel structures - elastic in-plane buckling of pitched roof portal frames. Limit states data sheet AS 4100 DS04. *Australian Institute of Steel Construction and Standards Australia*, Sidney, p. 1-2, 1993.
- XU, R., WU, Y-F. Free vibration and buckling of composite beams with interlayer slip by two-dimensional theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 313, n. 3-5, p.875-890, 2008.
- YANG, Y.B., KUO, S.B. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Singapore: Prentice Hall, 1994. 579p.

Artigo recebido em 12 de abril de 2012. Aprovado em 14 de maio de 2013.