

Psicobiologia e Psicologia Cognitiva

Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro

Maria Soraia Silva Cruz

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco

Alina Galvão Spinillo

Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

O presente estudo investigou o papel desempenhado pelos referenciais de inteiro e de metade na resolução de adição de frações por estimativa. Crianças (8-9 anos) de classe média alunas do ensino fundamental resolveram as mesmas adições de frações em diferentes situações: por estimativa, usando o referencial de *metade* (Tarefa 1), por estimativa, usando o referencial de *inteiro* (Tarefa 2) e utilizando o simbolismo matemático apenas (Tarefa 3). Observou-se que embora não resolvessem as adições por meio do simbolismo matemático, as crianças faziam estimativas apropriadas com base no referencial de *inteiro* e de *metade*, tendo o mesmo bom desempenho com ambos os referenciais. Concluiu-se que pontos de referência desempenham papel importante no raciocínio lógico-matemático.

Palavras-chave: adição de fração; conhecimento matemático; crianças; estimativa; metade e inteiro.

Abstract

Adding fractions by estimation using half and whole as references. This study investigated the role played by the referentials of whole and of half in the solving of addition of fractions by estimate. Middle class children (8-9 years old) at elementary school have solved the same addition of fractions but in different contexts: (i) by estimate, using the referential of half (Task 1), (ii) by estimate, using the referential of whole (Task 2), and (iii) by using the mathematical symbolism (Task 3). Although children were not able to solve the additions through the mathematical symbolism, they made appropriate estimates based on the referentials of whole and of half, showing the same good performance with both referentials. The conclusion was that reference points play an important role in mathematical reasoning.

Keywords: adding fraction; mathematical knowledge; children; estimate; half and whole.

Resumen

Adición de fracciones por estimativa a partir del referencial de mitad y entero. El presente estudio investigó el papel desempeñado por los referenciales de *entero* y de *mitad* en la resolución de adición de fracciones por estimación. Estudiantes de educación básica con edades entre 8 y 9 años de clase media, resolvieron las mismas sumas de fracciones en diferentes situaciones: por estimativa, utilizando la referencia de *mitad* (Tabla 1), por estimativa, utilizando la referencia de *entero* (Tabla 2) y utilizando sólo simbolismo matemático (Tabla 3). Se observó que, aunque no resolvieron adiciones por medio de simbolismo matemático, los niños hacían estimaciones adecuadas con base en la referencia de *entero* y *mitad*, presentando el mismo buen desempeño con los dos referenciales. Se concluyó que puntos de referencia desempeñan un papel importante en el razonamiento lógico-matemático.

Palabras clave: Adición de fracción; conocimiento matemático; niños; estimación; mitad y entero.

Os números racionais são um grande desafio conceitual para a criança do ensino fundamental, sendo a fração a primeira forma de número racional com o qual ela se depara na aprendizagem da matemática. Hecht, Close e Santisi (2003) e Kieren (1993) comentam

ISSN (versão eletrônica): 1678-4669

que dominar o conceito de fração envolve habilidades mais complexas do que aquelas relativas ao conhecimento sobre os números inteiros, as quais são requeridas para a compreensão de conceitos sofisticados inseridos no campo da álgebra e da geometria. Devido à sua complexidade e relevância, por

Acervo disponível em: www.scielo.br/epsic

décadas, o conhecimento de crianças sobre frações tem despertado o interesse de pesquisadores que têm examinado diferentes facetas deste conceito. Por exemplo, há estudos que investigam as relações entre fração e outros conceitos matemáticos como a proporção (Hecht, Vagi, & Torgesen, 2007), a razão (Lamon, 1999), a divisão (Nunes, 2003; Ramful, 2014) e os números inteiros (Siegler, Thompson, & Schneider, 2011; Steffe & Olive, 2010). Outros estudos exploram os diferentes significados que a fração pode assumir em uma dada situação (Gravemeijer, 1997; Mazzocco & Devlin, 2008; Ohlsson, 1991; Streefland, 1997), tais como: um número em uma reta numérica, um operador, um quociente derivado de uma divisão ou uma parte de um todo. Outras pesquisas, por sua vez, procuram comparar o conhecimento conceitual e procedural que a criança apresenta sobre frações (Byrnes & Wasik, 1991; Hallett, Nunes, & Bryant, 2010; Hallett, Nunes, Bryant, & Thorpe, 2012; Hecht et al., 2003; Hecht & Vagi, 2010, 2012), investigando se esses conhecimentos se relacionam ou se são independentes, se um seria mais desenvolvido do que o outro ao longo da escolaridade das crianças. De modo geral, nessas pesquisas o conhecimento procedural é avaliado por meio de diferentes situações que requerem a computação de operações com frações, enquanto o conhecimento conceitual é avaliado por meio de tarefas que requerem estimativas, associação entre diagramas e frações simbolicamente representadas.

Essas pesquisas mostram que a fração é um conceito complexo, sendo necessário compreender a natureza das dificuldades que as crianças apresentam. Há autores que relacionam essas dificuldades ao fato de a criança não compreender o princípio da invariância e não dispor de um pensamento reversível (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960); ou ao fato de não compreender a noção de equivalência (Nunes, 2003; Streefland, 1997). Outros autores apontam que as dificuldades estão associadas também à natureza multifacetada deste conceito que assume diferentes significados em função das situações em que se insere (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Nunes & Bryant, 1997) e à complexidade da linguagem e da notação típicas do número fracionário (Brizuela, 2005; Mack, 1995).

As pesquisas evidenciam, ainda, que muitas das dificuldades decorrem do fato de a criança aplicar o conhecimento que possuem sobre os números inteiros às frações (Biddlecomb, 2002; Gelman & Meck, 1992; Lamon, 1999; Nunes, 2003; Sophian, Garyants, & Chang, 1997; Streefland, 1991), como é particularmente observado na adição de frações, quando as crianças adicionam numeradores e denominadores (Cruz & Spinillo, 2004; Kerslake, 1986; Koyama, 1997).

Adicionar numeradores e denominadores é um tipo de erro que gera resultados absurdos que indicam uma compreensão equivocada a respeito do número fracionário e de sua representação simbólica (a/b). No entanto, quando outras representações e formas de raciocinar são empregadas, observa-se que crianças são capazes de operar com frações. Zunino (1995), por exemplo, observou que mesmo encontrando certas dificuldades, alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental resolviam apropriadamente diversas adições de fração,

utilizando, de forma espontânea, estimativas e pontos de referência.

Além dessas dificuldades, a literatura documenta que há uma série de conceitos considerados necessários para a compreensão do número fracionário: a noção de partição, a noção de parte-todo, a noção de equivalência, a noção de *inteiro* e a noção de *metade*. Considerando o foco da presente investigação, apenas as duas últimas noções são discutidas.

Streefland (1991) considera o *um* como a unidade de referência do esquema de número inteiro, e que as crianças utilizam esse conhecimento para formar o esquema de unidade fracionária, o qual permitirá contar, dividir e reagrupar, tendo por base a unidade. Tanto a flexibilidade em realizar divisões sucessivas de uma unidade em partes iguais como a possibilidade da reconstrução da unidade se constituem como ações fundamentais para a compreensão de número racional, como afirmam Pitkethly e Hunting (1996).

A utilização do *um* como referência também é mencionada por Pearn e Stephens (2007) que realizaram entrevistas com crianças de 5 e 6 anos de idade em situações em que explorava-se o uso da reta numérica como base para a compreensão de números inteiros e fracionários. Em algumas das atividades apresentadas, as crianças eram solicitadas a posicionar em uma reta numérica uma fração que poderia ser $1/2$ ou $3/4$, por exemplo. Nas retas numéricas apresentadas estavam sinalizadas as posições do 0 e do 1. Os dados mostraram que as crianças que tinham uma compreensão mais completa do significado do número *um* na reta, usavam-no como referente e conseguiam acertar a posição aproximada da fração indicada, pois reconheciam a relação entre o todo e as partes. Notaram, ainda, que a utilização deste tipo de atividade desenvolve o uso da linguagem própria de frações, bem como a articulação entre os conceitos de número inteiro e número fracionário.

Entretanto, no caso da pesquisa conduzida por Baturo e Cooper (1999) em que as retas numéricas apresentadas não continham apenas os números 0 e 1, mas números de 0 até 4, as crianças não alcançaram bons resultados. Comentários foram feitos quanto às limitações do uso da reta numérica em atividades de ensino e de resolução de problemas, pois apesar de as crianças terem entre 6 e 8 anos de idade e muitas terem sido formalmente instruídas sobre frações na escola, elas não souberam posicionar as frações dadas na reta numérica. Porém, comparando este resultado com os do estudo de Pearn e Stephens (2007) pode-se pensar que talvez a questão não seja o uso ou o não uso da reta numérica em si, mas sim o fato de saber quais os referentes presentes na reta numérica para favorecer as primeiras compreensões acerca do significado do número fracionário.

Em tarefas de partição com quantidades discretas envolvendo o conceito de fração, a compreensão do *um* como unidade de referência também é importante. De acordo com Empson, Junk, Dominguez e Turner (2005), o que diferencia as ações de uma criança em entender este tipo de tarefa como de divisão ou de fração é o fato de como ela interpreta o significado dos elementos: se como unidades distintas ou se como

pertencentes a um conjunto. Quando as crianças compreendem que a unidade de referência é o conjunto, ao dividi-lo em cinco grupos, por exemplo, passam a entender que dois desses grupos representam dois quintos do conjunto e não duas unidades independentes. Deste modo, conseguem dar sentido às ações realizadas durante o processo de resolução.

Resultados semelhantes foram encontrados por Mix, Levine e Huttenlocher (1999) em tarefas de adição de frações com quantidades contínuas. As autoras investigaram crianças de 3 a 5 anos quanto à adição de frações representadas por círculos e/ou semicírculos. As crianças deveriam calcular o resultado das operações com um valor que fosse menor ou igual a um inteiro (exemplo: $1/2 + 1/4 = 3/4$). Observou-se que as crianças dividiam o inteiro em quatro partes e que utilizavam quartos para comparar as demais frações. Notou-se, contudo, que a importância de uma unidade de referência reside no significado de cada fração em relação ao inteiro utilizado, e que ao tomar uma unidade como referência, a criança estaria em condições de antecipar o tamanho das partes em que o todo seria dividido.

Sowder e Shapelle (1989) e Zeman (1991) comentam a respeito da utilização do número *um* como âncora para estimar um valor aproximado para a adição de frações. Como exemplo, Sowder e Shapelle (1989) relatam que as crianças podem calcular que $7/8 + 9/10$ terá como resultado um valor um pouco menor que dois, uma vez que entendem que cada uma das frações é menor que um inteiro.

Zunino (1995) também destaca a importância do cálculo por estimativas no sentido de incentivar as crianças a antecipar e a julgar resultados durante a resolução de problemas. Para ela, esta pode ser uma estratégia importante do ponto de vista cognitivo, pois fornece à criança condições para avaliar se o resultado encontrado corresponde ou não às expectativas.

Além da noção de *inteiro*, a noção de *metade* também está associada à compreensão de conceitos matemáticos complexos como a proporção e a probabilidade. Spinillo e Bryant (1991, 1999) evidenciaram que o referencial de *metade* pode favorecer o sucesso das crianças desde os 6 anos na resolução de tarefas de proporção envolvendo tanto quantidades discretas como quantidades contínuas. Nesta mesma direção, este referencial mostrou-se igualmente relevante em estimativas realizadas por crianças desde os 7-8 anos ao fazerem julgamentos acerca do nível de chance em tarefas de probabilidade (Spinillo, 1992, 2002).

Resultados semelhantes foram documentados por Singer-Freeman e Goswami (2001) ao investigarem a competência de crianças (3 e 4 anos) para estabelecer equivalência entre quantidades discretas e contínuas. Verificou-se um maior sucesso na resolução de problemas que envolviam a fração *metade* do que naqueles que envolviam as frações $1/4$ ou $3/4$. No entender de Nunes e Bryant (1997), a compreensão inicial do conceito de *metade*, também favorece o estabelecimento das conexões entre os aspectos extensivos (parte-parte) e intensivos (parte-todo) do número racional; podendo, inclusive, ser considerado como um referencial importante para as crianças iniciarem a quantificação de frações.

Cruz e Spinillo (2004) testaram a possibilidade de que crianças de 8 e 9 anos resolveriam adições de frações por meio do referencial de *metade* ainda que demonstrassem dificuldades em resolver as mesmas adições por meio do simbolismo matemático formal. O principal resultado desta pesquisa foi que apesar dos erros absurdos apresentados na resolução das operações por meio do simbolismo matemático, as crianças tiveram um bom desempenho quando o referencial de *metade* era oferecido como âncora durante o processo de resolução. Concluiu-se que este referencial auxilia na resolução de adição de frações.

De modo geral, os resultados dessas investigações evidenciam que diversos conceitos lógico-matemáticos considerados complexos podem ser compreendidos por meio do uso de pontos de referência, em particular, da noção de *inteiro* e da noção de *metade* que servem como âncoras para o raciocínio, sobretudo na resolução de problemas por estimativas.

Como o mencionado, é mais fácil raciocinar com base em estimativas do que com base em cálculos numéricos precisos. De acordo com Bryant (1974), isso ocorre porque estimar privilegia o raciocínio em termos relativos como mais/menos que, maior/menor que (ver Bryant, 1974), raciocínio este mais precoce que raciocinar em termos absolutos baseado em cálculos numéricos precisos. Neste sentido, como proposto por Correa, Spinillo, Brito e Moro (1998), o uso de tarefas não-numéricas e de estimativas favorecem a resolução de problemas, uma vez que é dada à criança a oportunidade de estabelecer relações lógicas e não, necessariamente, resolver cálculos numéricos que pode ainda não dominar.

A partir dessas considerações, o presente estudo investigou o papel desempenhado pelo referencial de *inteiro* e de *metade* na resolução de adição de frações por meio de estimativas, sem que fossem necessários cálculos numéricos e aplicação de algoritmos típicos da adição de frações. Para tal, crianças ainda não formalmente ensinadas sobre adição de frações no contexto escolar foram solicitadas a resolver adições de fração por estimativas ora usando o referencial de *metade*, ora usando o referencial de *inteiro*. Também foram solicitadas a resolver adições por meio do simbolismo matemático típico de frações (a/b). A hipótese era que as crianças teriam dificuldades em resolver as adições por meio do simbolismo matemático, mas que seriam capazes de resolver as adições por estimativa usando esses referenciais como apoio do raciocínio. Dando continuidade e aprofundamento a estudos anteriores, em especial aquele conduzido por Cruz e Spinillo (2004), procurou-se também examinar se os dois referenciais (*inteiro* e *metade*) seriam igualmente facilitadores ou se um seria mais facilitador que o outro durante a resolução de adições de fração. Este aspecto não foi investigado pelas autoras e, segundo nosso conhecimento, não foi examinado em outros estudos na área.

É possível, ainda, que o presente estudo possa trazer subsídios para discussões a respeito do conhecimento conceitual e do conhecimento procedural que a criança apresenta sobre frações, uma vez que o uso de âncoras, no caso *inteiro* e *metade*, pode estar associado ao conhecimento conceitual,

enquanto o simbolismo matemático pode estar associado ao conhecimento procedural, como discutido na seção final desta investigação.

Método

Participantes

Quarenta e duas crianças de classe média, alunas do Ensino Fundamental de escolas particulares da cidade do Recife foram igualmente divididas em dois grupos: Grupo 1 formado por crianças de 8 anos (média de idade: 8a 4m) alunas do terceiro ano, sendo 11 do sexo feminino e 10 do sexo masculino; e Grupo 2 formado por crianças de 9 anos (média: 9a 3m) alunas do quarto ano, sendo 12 do sexo feminino e nove do sexo masculino. As crianças ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre adição de frações, porém eram capazes de

identificar a representação simbólica das frações $1/2$, $1/3$, $1/4$ e $1/6$ (utilizadas neste estudo), conforme verificado em uma tarefa de sondagem.

Planejamento experimental, material e procedimento

Os participantes foram individualmente entrevistados em duas sessões com um intervalo de uma semana entre elas. Na primeira sessão aplicou-se a Tarefa de Sondagem e a Tarefa 1; e na segunda sessão a Tarefa 2 e a Tarefa 3.

A Tarefa de Sondagem teve por objetivo garantir que participassem da pesquisa apenas crianças capazes de identificar as representações simbólicas e diagramáticas das frações $1/2$, $1/3$, $1/4$ e $1/6$ que seriam utilizadas nas Tarefas 1, 2 e 3. Para cada fração a ser identificada havia quatro diagramas como alternativas que eram lidas em voz alta pela examinadora (Figura 1).

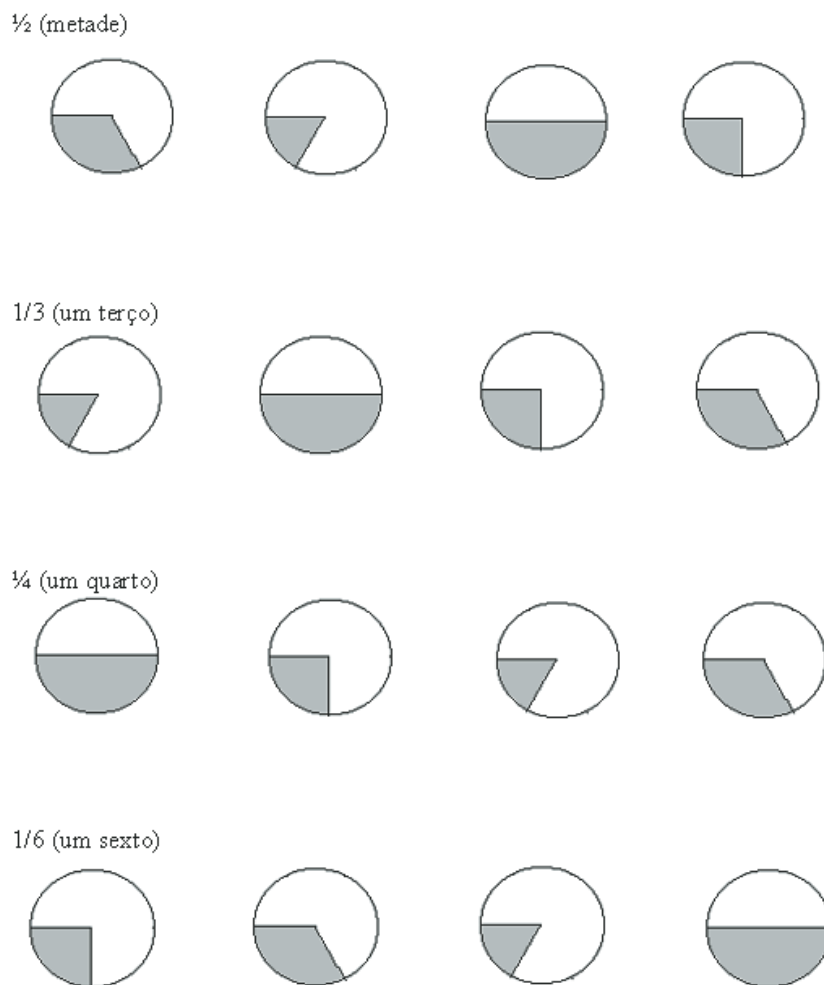


Figura 1. Frações Utilizadas na Tarefa de Sondagem

De acordo com a literatura, essas frações são familiares nesta faixa etária. A fração $1/6$, apesar de não ser tão familiar quanto às demais, foi utilizada por permitir estabelecer relações de equivalência com as frações $1/3$ e $1/2$, favorecendo a elaboração dos itens nas tarefas nesta investigação.

A Tarefa 1 teve por objetivo examinar se as crianças seriam capazes de realizar adição de frações, por estimativa, usando o referencial de *metade*. A criança era solicitada a resolver seis adições de frações unitárias que resultavam em frações ordinárias (metade, mais que metade e menos que metade), sendo três itens do Tipo 1 (operações com parcelas iguais: $1/4 + 1/4$; $1/3 + 1/3$; e $1/6 + 1/6$) e três do Tipo 2 (operações com parcelas diferentes: $1/3 + 1/6$; $1/4 + 1/6$ e $1/3 + 1/4$). O material disponibilizado consistia em dois círculos de cartolina (8 cm de diâmetro): um marrom representando um bolo de chocolate e um amarelo representando um bolo de baunilha.

As adições eram apresentadas em um contexto lúdico em que era contada a história de Artur, um menino que gostava muito de comer bolos. A instrução dada pode ser assim resumida: “A mãe de Artur fez um de chocolate e um de baunilha (mostrava o círculo amarelo e o marrom), ambos do mesmo tamanho. Artur comeu um quarto do bolo de baunilha (apontava o círculo amarelo) depois do almoço, e à tarde, na hora do lanche, comeu um sexto do bolo de chocolate (apontava o círculo marrom). Juntando as duas partes que ele comeu dos dois bolos, quanto de bolo Artur comeu no final do dia? Será que ele comeu *metade* de um bolo, *mais que metade* de um bolo ou *menos que metade* de um bolo?” Esta pergunta levava a criança a usar o referencial de *metade* como âncora em suas estimativas.

A Tarefa 2 teve por objetivo examinar se as crianças seriam capazes de realizar adição de frações, por estimativa, usando o referencial de *inteiro*. A criança era solicitada a resolver nove adições de frações unitárias que resultavam em frações ordinárias (menos que um bolo), mistas (mais que um bolo) e em inteiros (um bolo), sendo três itens do Tipo 1 (operações com parcelas iguais: $1/3 + 1/3 + 1/3$; $1/2 + 1/2 + 1/2$; $1/4 + 1/4 + 1/4$); três itens do Tipo 2 (operações com duas parcelas iguais e uma diferente ($1/2 + 1/4 + 1/4$; $1/2 + 1/3 + 1/3$; $1/3 + 1/3 + 1/4$); e três itens do Tipo 3 (operações com parcelas diferentes: $1/2 + 1/3 + 1/6$; $1/2 + 1/3 + 1/4$; $1/2 + 1/4 + 1/6$). O material disponibilizado consistia em três círculos de cartolina (8 cm de diâmetro): um marrom representando um bolo de chocolate, um amarelo representando um bolo de baunilha e um rosa representando um bolo de morango.

O procedimento era semelhante àquele adotado na Tarefa 1. A instrução dada pode ser assim resumida: “Artur gosta muito de bolos. Tem dias que ele come um bolo todinho. Tem dias que ele come mais do que um bolo todo: come um bolo todo e mais um pedaço. E tem dias que ele come menos que um bolo. Um dia a mãe de Artur fez três bolos todos de um mesmo tamanho: um de chocolate, um de baunilha e outro de morango (mostrava os três círculos). Artur comeu metade do bolo de chocolate (apontava o círculo marrom) depois do almoço. À tarde na hora do lanche, ele comeu um terço do bolo de baunilha (apontava o círculo amarelo). Depois do jantar ele comeu um quarto do bolo de morango (apontava o círculo

rosa). Juntando as três partes que ele comeu dos três bolos, quanto de bolo Artur comeu no final do dia? Será que ele comeu um bolo *inteiro*, *mais do que um bolo inteiro* ou *menos do que um bolo inteiro*?”. Esta pergunta levava a criança a usar o referencial de *inteiro* como âncora em suas estimativas.

A Tarefa 3 investigou o desempenho das crianças ao resolver adição de frações usando o simbolismo matemático (a/b). Esta tarefa era composta por seis itens, sendo três do Tipo 1 (adições de frações que resultavam em *metade*: $1/4 + 1/4$; $1/3 + 1/6$ e $1/6 + 1/6 + 1/6$; e três do Tipo 2 (adições de frações que resultavam em um *inteiro*: $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$; $1/3 + 1/3 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$). Lápis e borracha foram disponibilizados, assim como uma folhas de papel em que estava impressa cada uma das operações a serem efetuadas, com espaço suficiente para sua resolução. A examinadora solicitava que a criança resolvesse cada uma das operações. Concluída a atividade, as folhas de papel com as formas de resolução empregadas eram recolhidas.

A ordem de apresentação dos itens tanto na Tarefa de Sondagem como nas demais tarefas foi aleatória, decidida por meio de sorteio com cada participante. Em relação à Tarefa 1 e à Tarefa 2 a ordem de apresentação dos itens além de ser decidida por sorteio tinha a restrição de que nunca dois itens de um mesmo tipo fossem apresentados consecutivamente.

Resultados

O desempenho foi analisado em função do número de acertos em cada um dos itens em cada tarefa separadamente. A Tabela 1 apresenta uma visão geral do desempenho das crianças na Tarefa 1.

Tabela 1

Percentual de Acertos por Tipo de Item em Cada Grupo na Tarefa 1 (Metade)

Tipos de itens	Grupo 1	Grupo 2
Tipo 1	55,5	58,7
Tipo 2	39,7	30,1

Nota. Tipo 1: Adição com parcelas iguais; e Tipo 2: Adição com três parcelas diferentes.

Como pode ser visto, o percentual de acertos em cada grupo foi bastante semelhante, como confirmado pelo Teste U de Mann-Whitney que não detectou diferenças significativas entre os grupos quer no total ($Z = -0,4542$; $p = 0,649$) quer em cada tipo de item separadamente (Tipo 1: $Z = -0,3179$; $p = 0,750$ e Tipo 2: $Z = -1,2252$; $p = 0,220$).

No entanto, como indicado pelo Wilcoxon ($Z = -3,6862$; $p = 0,001$), os itens Tipo 1 (parcelas iguais: 57,1%) foram mais fáceis do que os itens Tipo 2 (parcelas diferentes: 34,9%). Este resultado indica que estimar o resultado de adições de frações em que as parcelas são iguais é mais fácil do que quando as parcelas são diferentes. Este mesmo padrão de resultado foi observado em relação ao Grupo 1 ($Z = -2,1658$; $p = 0,030$) e em

relação ao Grupo 2 ($Z = -2,9341$; $p = 0,003$). Assim, tanto no geral como em cada grupo, as crianças apresentam um melhor desempenho em adições de frações com parcelas iguais do que em adições com parcelas diferentes. Em síntese, o tipo de item influencia o desempenho, sendo mais fácil resolver adições de frações com parcelas iguais do que com parcelas diferentes.

De acordo com o Teste U de Mann-Whitney, aplicado aos dados na Tarefa 2, os grupos não se diferenciavam quer no total ($Z = -0,2864$; $p = 0,774$) quer em relação a cada um dos três tipos de itens (Tipo 1: $Z = -0,7764$; $p = 0,437$; Tipo 2: $Z = -0,4318$; $p = 0,665$ e Tipo 3: $Z = -1,6309$; $p = 0,102$), sendo isso ilustrado na Tabela 2.

Considerando o desempenho geral, o Teste de Friedman revelou diferenças significativas entre os tipos de itens ($X^2 = 12,5119$; $p = 0,001$), pois o percentual de acertos nos itens Tipo 1 (58,7%) foi maior do que nos demais itens (Tipo 2: 42,8%; Tipo 3: 34,1%).

Tabela 2

Percentual de Acertos por Tipo de Item em Cada Grupo na Tarefa 2 (Inteiro)

Tipos de itens	Grupo 1	Grupo 2
Tipo 1	61,9	55,5
Tipo 2	46,0	39,7
Tipo 3	26,9	41,3

Nota. Tipo 1: Adição com três parcelas iguais; Tipo 2: Adição com duas parcelas iguais e uma diferente; e Tipo 3: Adição com três parcelas diferentes.

No entanto, ao se comparar o desempenho entre os tipos de itens no interior de cada grupo, verificou-se diferenças no percentual de acertos entre os tipos de itens apenas no Grupo 1 (Friedman: $X^2 = 9,5952$; $p = 0,008$), pois a adição com parcelas iguais (Tipo 1) foi mais fácil do que a adição com duas (Tipo 2) ou com três parcelas diferentes (Tipo 3), como indica a Tabela 2. Para as crianças do Grupo 2 esta diferença não foi significativa (Friedman: $X^2 = 4,5714$; $p = 0,101$). O tipo de item, portanto, influenciou apenas o desempenho das crianças mais novas que tiveram um melhor desempenho nas adições de frações com parcelas iguais do que com parcelas diferentes.

Como esperado, o percentual de acertos na Tarefa 3 foi muito baixo (Grupo 1: 2,3%; e Grupo 2: 8,7%), confirmando a grande dificuldade das crianças ao resolver adições de frações por meio do simbolismo matemático formal. Por outro lado, o desempenho na Tarefa 1 (*metade*) e na Tarefa 2 (*inteiro*) foi bem superior ao alcançado na Tarefa 3 (Tabela 3).

Tabela 3

Porcentagem de Acertos por Grupo de Participantes em Cada Tarefa

	Tarefa 1 (<i>metade</i>)	Tarefa 2 (<i>inteiro</i>)	Tarefa 3 (simbolismo matemático)
Grupo 1	47,6	44,9	2,3
Grupo 2	44,4	45,5	8,7

Nota. Grupo 1: crianças de 8 anos, alunas do terceiro ano; Grupo 2: crianças de 9 anos, alunas do quarto ano.

Nota-se que o desempenho na Tarefa 1 (*metade*) foi muito semelhante ao desempenho na Tarefa 2 (*inteiro*) tanto no Grupo 1 como no Grupo 2. Isso indica que não se pode afirmar que um referencial seja mais facilitador do que o outro. Contudo, é possível afirmar que a criança é muito mais bem sucedida na adição de frações quando lhe é permitido estimar com base em referenciais que servem de âncora para o seu raciocínio, como ocorreu na Tarefa 1 e na Tarefa 2, do que quando as operações são apresentadas por meio do simbolismo matemático, como ocorreu na Tarefa 3.

Discussão e conclusões

Os resultados da presente investigação mostram que em algumas situações crianças que ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre operações com frações são capazes de resolver adições de frações nas quais lhes é dada a oportunidade de estimar ao invés de realizar cálculos numéricos precisos. Embora sem ter sido este o objetivo do estudo, este resultado pode ser inserido em uma discussão teórica relevante acerca do conhecimento procedural e conceitual da fração que vem sendo conduzida por pesquisadores da área (Byrnes & Wasik, 1991; Hallett et al., 2010; Hallett et al., 2012; Hecht & Vagi, 2012). Na presente investigação, é possível considerar que a Tarefa 1 e a Tarefa 2 avaliavam o conhecimento conceitual a respeito da fração, enquanto a Tarefa 3 versava sobre o conhecimento procedural. Os resultados mostraram que o conhecimento procedural foi inexpressivo, sendo isso esperado, uma vez que os participantes além de não terem sido instruídos sobre adição de fração, não dispunham das condições oferecidas nas demais tarefas. Contudo, observou-se que, apesar disso, as crianças demonstraram um conhecimento conceitual sobre a adição de frações. Segundo Hallett et al., (2012), algumas crianças possuem um maior conhecimento conceitual, outras um maior conhecimento procedural, enquanto outras apresentam um mesmo nível de conhecimento procedural e conceitual (igualmente alto ou igualmente baixo). Os autores explicam este resultado em termos de perfil de aprendizagem referente a diferenças individuais: algumas crianças aprendem relativamente mais sobre um tipo de conhecimento do que sobre outro, enquanto outras crianças aprendem mais sobre ambos os tipos de conhecimentos do que seus colegas. Os resultados obtidos no presente estudo sugerem que as crianças, na idade e na escolaridade investigadas, apresentam um conhecimento conceitual que independe do conhecimento procedural e que o antecede. Este conhecimento conceitual parece emergir quando realizam estimativas que se apoiam em pontos de referência cruciais para a compreensão do conceito de fração (*metade* e *inteiro*). Estimar se o resultado de uma adição de frações é maior, menor ou igual à *metade* ou maior, menor ou igual ao *inteiro* é tarefa possível de ser realizada por crianças que não resolvem estas mesmas operações por meio do simbolismo matemático próprio de frações.

Mas qual desses referenciais foi mais facilitador: o referencial de *metade* ou o de *inteiro*? Os dados mostraram que as crianças igualmente se beneficiam de ambos os referenciais.

Segundo nossa análise, esses referenciais são constitutivos do conceito de número fracionário, uma vez que remetem a noções de partição, de parte-todo e de equivalência que, por sua vez, estão envolvidas na formação deste conceito.

Em pesquisas futuras, o papel facilitador dessas âncoras (*metade e inteiro*) poderia ser explorado na adição de frações impróprias e de frações mistas. É possível que na adição de tais frações, o referencial de *inteiro* seja mais efetivo do que o de *metade*, dado que as parcelas e o resultado seriam sempre maior que um. Esta é uma hipótese que merece ser investigada em pesquisa futura. Outra questão relevante seria examinar se o papel facilitador desses referenciais também seria observado na subtração de frações.

Outro dado, de menor relevância, porém interessante, foi que era mais fácil resolver adições de frações com parcelas iguais do que com parcelas diferentes. É possível pensar que a adição repetida é uma estratégia importante que parece ser também facilitadora no caso de adição de frações com parcelas iguais.

Do ponto de vista educacional, é possível pensar que a adição de frações poderia ser introduzida já nos anos iniciais do ensino fundamental a partir de situações que envolvessem estimativas, pontos de referência e adições de parcelas iguais. Nas atividades em sala de aula o referencial de *metade* e de *inteiro* poderiam ser adotados de forma combinada, bem como serem gradativamente associados à precisão numérica, aos algoritmos e representações próprias das frações. Na realidade, é importante que com o avanço da escolaridade o conhecimento conceitual e o conhecimento procedural sejam igualmente promovidos.

Para concluir, é possível que uma compreensão acerca da adição de frações venha facilitar a ideia de que a fração pode ser concebida como um número ou uma quantidade que pode ser adicionada a outras quantidades, e não apenas como parte de um todo como enfaticamente tratado no contexto escolar. Estudos de intervenção conduzidos em sala de aula ou em situações experimentais controladas poderiam explorar esses aspectos.

Referências

- Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (1999). Fractions, reunification and the number-line representation. In *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 81-88). Haifa, Israel: PME. Recuperado de <http://eprints.qut.edu.au/31384/1/c31384.pdf>
- Biddlecomb, B. D. (2002). Numerical knowledge as enabling and constraining fraction knowledge: An example of the reorganization hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(2), 167-190. doi: 10.1016/S0732-3123(02)00117-7
- Brizuela, B. M. (2005). Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 281-305. doi:10.1007/s10649-005-9003-3
- Bryant, P. E. (1974). *Perception and understanding in young children: An experimental approach*. Londres: Methuen.
- Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical and procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777-786. doi:10.1037/0012-1649.27.5.738
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316. doi:10.1007/s10649-006-9036-2
- Correa, J., Spinillo, A., Brito, M., & Moro, M. L. F. (1998). O desenvolvimento de conceitos matemáticos: Temas de interesse para a educação matemática. In M. L. S. de Moura, J. Correa, & A. G. Spinillo (Orgs.), *Pesquisas brasileiras em psicologia do desenvolvimento* (pp. 71-110). Rio de Janeiro: EDUERJ.
- Cruz, M. S., & Spinillo, A. G. (2004). Resolvendo adição de fração através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 13(2), 3-29.
- Empson, S. B., Junk, D., Dominguez, H., & Turner, E. (2005). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 1-28. doi: 10.1007/s10649-005-9000-6
- Gelman, R., & Meck, B. (1992). Early principles aid initial but not later conceptions of number. In J. Bideaud; C. Meljac, & J. P. Fischer (Orgs.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 171-190). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-446). Hove: Psychology Press.
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102, 395-406. doi:10.1037/a0017486
- Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C.M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 469-486. doi: 10.1016/j.jecp.2012.07.009.
- Hecht, S. A., & Vagi, J. K. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 102(4), 843-859. doi: 10.1037/a0019824
- Hecht, S. A., & Vagi, J. K. (2012). Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(2), 212-229. doi: 10.1016/j.jecp.2011.08.012
- Hecht, S. A., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 86, 277-302. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2003.08.003>
- Hecht, S. A., Vagi, K. J., & Torgesen, J. K. (2007). Fraction skills and proportional reasoning. In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Orgs.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 121-132). Nova Iorque: Brookes.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions. Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: NFER-Nelson.
- Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Orgs.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Nova Jersey: Erlbaum.
- Koyama, M. (1997). Students' representations of fractions in a regular elementary school mathematics classroom. In E. Pehkonen (Org.), *Proceedings of the 21st conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, (pp.160-167). Lahti: PME.
- Lamon, J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for children*. Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 422-441.
- Mazzocco, M. M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and holes: Gaps in rational number sense in children with vs. without mathematical learning disability. *Developmental Science*, 11(5), 681-691. doi: 10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x
- Mix, K. S., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, 35(1), 164-174. doi:10.1037/0012-1649.35.1.164
- Nunes, T. (2003). Criança pode aprender frações. E gosta! In E. P. Grossi (Org.), *Por que ainda há quem não aprende? A teoria* (pp. 119-148). Rio de Janeiro: Vozes.
- Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

- Ohlsson, S. (1991). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert & M. Behr (Orgs.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Pearn, C., & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help to develop fraction concepts. In J. Watson & K. Beswick (Orgs.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 601-610). Hobart, Sydney: MERGA.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *Child's conception of geometry*. Londres: Routledge and Kegan Paul.
- Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5-38. doi: 10.1007/BF00163751
- Ramful, A. (2014). Reversible reasoning in fractional situations: Theorems-in-action and constraints. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 119-130. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.11.002
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62, 273-296. doi: 10.1016/j.cogpsych.2011.03.001
- Singer-Freeman, K. E., & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, 16(3), 811-829. doi: 10.1016/S0885-2014(01)00066-1
- Sophian, C., Garyants, D., & Chang, C. (1997). When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, 33(5), 731-744. doi:10.1037/0012-1649.33.5.731
- Sowder, J. T., & Shapelle, B. P. (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference*. San Diego: Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Spinillo, A. G. (1992). A importância do referencial de "metade" e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8(3), 305-317. Recuperado de <https://revistaptp.unb.br/index.php/ptp/article/view/1471/442>
- Spinillo, A. G. (2002). Children's use of part-part comparisons to estimate probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 357-369. doi: 10.1016/S0732-3123(02)00134-7
- Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgments: The importance of "half". *Child Development*, 62(3), 427-440. doi: 10.1111/j.1467-8624.1991.tb01542.x
- Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, 5(2), 181-197. doi: 10.1080/135467999387298
- Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Nova Iorque: Springer.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland, L. (1997). *Charming fractions being charmed?* In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 347-371). Hove: Psychology Press.
- Zeman, M. (1991). The part-whole schema in the conceptualization of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 10(3), 251-259.
- Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: Aqui a agora*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Maria Soraia Silva Cruz, Mestre em Psicologia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), é Professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico – D-303 no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE). Endereço para correspondência: IFPE - Campus Ipojuca PE 60, km 14 - Califórnia- Ipojuca- PE – CEP: 55590-000. Telefone: (81) 3311-2520. E-mail: mariasoraia@ipojuca.ifpe.edu.br

Alina Galvão Spinillo, Doutora em Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo pela Universidade de Oxford, Inglaterra, Pós-doutora pela Universidade de Sussex, Inglaterra, é Professora Titular na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). E-mail: alinaspinillo@hotmail.com
