O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUA LINGUAGEM PARA OS PROFESSORES DE MATEMÁTICA E DE CIÊNCIAS

Edna Maura Zuffi[1]

Jesuína Lopes de Almeida Pacca[2]

Resumo: Neste artigo, apresentamos alguns dos resultados obtidos com a observação da prática pedagógica de três professores de Matemática do Ensino Médio, ao usarem a linguagem matemática no ensino de "funções". A partir de uma análise qualitativa dos dados, são propostas algumas categorias representativas das concepções geradas na sala de aula com o tema em questão, a partir das formas de expressão efetivamente articuladas pelos professores, junto aos seus alunos. Algumas considerações também são propostas sobre a relação entre estas concepções e o uso de uma linguagem específica para se tratar as "funções" no ensino de Química e Física.

Unitermos: funções, concepções dos professores, linguagem matemática, ensino de Matemática, Física e Química

Abstract: This article presents some of the results obtained from our observation of three Secondary School Mathematics teachers pedagogical practice when they used mathematical language to teach "functions". From a qualitative data analysis some representative categories of conceptions raised in the classroom about the subject are proposed from the expressions effectively used by the teachers with their students. Some considerations are also raised on the relation between these conceptions and the use of a specific language to deal with "functions" in the teaching of Chemistry and Physics.

Keywords: functions; teachers' conceptions; mathematical language; Mathematics, Physics and Chemistry teaching.

Introdução

A construção inicial de um determinado conceito em Ciências Naturais, na grande maioria dos casos, é feita através da criação de uma linguagem para explicar fenômenos da natureza (físicos, químicos ou biológicos), que são visualizáveis, tangíveis ou de alguma forma, perceptíveis aos sujeitos. Dessa maneira, estes mesmos sujeitos podem apresentar, sobre estes fenômenos, concepções ou explicações espontâneas, mesmo que não tenham tido prévio contato com argumentos e teses científicas, elaborados sobre eles.

Já em Matemática, ocorre que a criação de uma linguagem própria se dá não apenas para explicar fenômenos da natureza, mas também para resolver toda sorte de problemas, os quais nem sempre são tangíveis, por se originarem na mente humana, e muitos, de uma maneira totalmente abstrata.

Parece-nos que muitas explicações levantadas em Matemática surgem num patamar diferenciado, em atividades metacognitivas, quando o homem não apenas percebe um fenômeno natural, mas cria para si um problema relativo à compreensão daquele fenômeno, ou de outros que ele próprio concebe e executa. Aqui, podemos citar as questões e problemas matemáticos gerados na construção de um objeto concreto pelo homem, na idealização de um sistema monetário, ou em estruturas e sistemas gerados dentro da própria Matemática, que nem

[1] Professora Doutora do Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo. São Carlos, São Paulo, Brasil. Apoio parcial: CAPES-PICDT (e-mail: edna@icm.usp.br).

[2] Professora Associada do Instituto de Física. Universidade de São Paulo. São Paulo, Brasil. Apoio parcial: CNPq (e-mail: jesuina@if.usp.br).

sempre encontram aplicação na vida prática, em conseqüência do avançado grau de desenvolvimento dessa área do conhecimento humano.

Sendo assim, parece-nos que concepções espontâneas sobre os conceitos matemáticos são cabíveis em poucas situações, geralmente ligadas à vivência sócio-cultural dos indivíduos. Para a maioria dos conceitos atuais e mais complexos da Matemática, entretanto, que foram gerados a partir de evoluções contínuas, realizadas por muitas mentes humanas, e em diferentes períodos históricos, é bastante difícil que se revelem concepções espontâneas, pois estas se mostram muito distantes do conhecimento especializado dos matemáticos e também do conhecimento escolar.

Acreditamos que este seja o caso do conceito matemático de função, atualmente ensinado e presente no currículo das escolas do Ensino Médio. Embora se possa ter uma concepção espontânea de variação e de associação entre duas grandezas, a caracterização das propriedades específicas das relações que são também funções matemáticas só foi possível num processo histórico longo e delicado, que culminou com as definições de Dirichlet (1837) e Bourbaki (1939) para funções. Estas possibilitaram um alto nível de abstração desse conceito, ampliando-o para conjuntos de objetos matemáticos antes pouco imagináveis.

Isso não significa que o conceito de função não tenha sido associado a fenômenos naturais. Pelo contrário, as motivações para a sua origem surgiram entre os gregos, que já apresentavam um "instinto de funcionalidade" para explicarem fenômenos da Astronomia. (Youschkevitch, 1976). E foi a partir de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), com seus estudos sobre movimentos e "taxas de mudanças" de quantidades variando continuamente, que as primeiras elaborações formais para esse conceito surgiram.[3] Mas a idéia não parou por aí e o conceito de função, em Matemática, localiza-se num patamar que vai além da compreensão dos fenômenos a que se aplica, pois pode generalizá-los e resolver vários problemas fora do mundo tangível, num mundo de abstrações muito próprias da Matemática. Por exemplo, podemos usar uma função linear para descrever o deslocamento de um corpo num sistema massa-mola, tanto quanto para descrever a transformação de um espaço vetorial – conceito matemático altamente abstrato – em outro.

Assim, entendemos que a análise das concepções de um sujeito sobre o conceito de função só poderá ocorrer depois que ele apresentar um contato com a idéia matematicamente construída, ou por um livro, ou por um professor. Do contrário, estaremos falando apenas de um "instinto de funcionalidade", como já evidenciavam os gregos, antes da Era Cristã. É claro que a noção de variação é um dos aspectos essenciais ao desenvolvimento desse conceito e, para ela, poderá existir uma concepção espontânea. Entretanto, ao nosso ver, a idéia de variação não é suficiente para, sozinha, caracterizar por completo o conceito matemático de função. Aí pode estar uma das razões pelas quais este apresenta grandes dificuldades de compreensão entre os sujeitos.

Entendemos que, nesse caso, a distinção feita por Vygostsky (1989a, p. 50), entre os conceitos espontâneos e os não-espontâneos ou científicos aplica-se muito apropriadamente. Para os últimos, o sujeito não é capaz de formular concepções pelas simples observações de fenômenos naturais, se não puder contar com uma instrução culturalmente elaborada e, em geral, coordenada pela escola, para chegar a tais idéias abstratas.

Só é possível, então, analisar as concepções sobre este tipo de conceito, através da sua expressão pela linguagem matemática que o sujeito aprendeu a elaborar, seja na escola, seja pela interferência de algum outro sujeito escolarizado.

[3] Maiores detalhes podem ser vistos em Zuffi (1999).

Foi com estes pressupostos em mente que propusemos uma investigação sobre as formas de expressão de professores do Ensino Médio, através da linguagem matemática, ao lidarem com o tema "funções" em sala de aula. Por acreditarmos que o professor tem um papel fundamental (não determinístico, mas muito relevante) sobre o aprendizado dos conceitos matemáticos de seus alunos, é de suma importância que investiguemos quais são as concepções sobre o conceito que vêm sendo veiculadas por eles, nas escolas de hoje.

Assim, procuramos responder, neste artigo, às seguintes questões: Qual é a conceituação que o professor quer construir para as funções? Qual é a que ele verdadeiramente constrói, ao efetivar o uso da linguagem matemática de uma maneira característica do Ensino Médio? Esperamos, com isto, contribuir para o aprofundamento das discussões acerca da formação matemática desses professores e de sua atuação profissional em sala de aula.

Entendemos, também, que este estudo pode trazer à tona alguns questionamentos sobre a interação das linguagens próprias da Química, Física e Matemática, ao tratar desse conceito e de suas aplicações. Nessa fase da vida escolar, as idéias sobre funções são utilizadas para introduzir conceitos da Física Clássica, de fenômenos da eletricidade e também com várias aplicações da noção de proporcionalidade, na Química. Isto faz com que a linguagem matemática criada para o conceito de função seja também usada em outras áreas, mas talvez com "sotaques" tão distintos, que fica difícil ao aluno associar todas essas idéias, encarando os novos conceitos matemáticos, físicos ou químicos, como coisas estanques, sem nada em comum.

Considerações teóricas e metodológicas

Para tentar responder às questões anteriormente levantadas, fomos a campo e observamos três professores de Matemática do Ensino Médio, em suas salas de aula de duas escolas diferentes, na cidade de São Carlos, SP, no momento em que ensinavam sobre "funções".

As duas primeiras professoras observadas (Meg e Bel) lecionavam em uma escola pública de grande tradição na cidade. Acompanhamos as aulas de Meg, nos meses de maio a junho de 1997. A professora Bel foi observada de maio a julho de 1998. Um terceiro sujeito foi investigado (Mark), de agosto a novembro de 1998. A escola deste último era bastante diferenciada da anterior, por ser relativamente nova e ter gestão cooperativa, com a participação de pais e professores sobre as suas diretrizes pedagógicas e organizacionais. Os três professores citados tinham métodos de ensino bastante tradicionais, com aulas expositivas, em sua maioria, e com pouca participação ativa dos alunos. O professor Mark, porém, costumava coordenar algumas atividades diferenciadas, como a resolução mais freqüente de listas de exercícios em grupo, assim como competições e jogos matemáticos em atividades extra classe.

Devemos destacar, ainda, que as posturas de Mark com relação à avaliação dos alunos e sua promoção para a série seguinte eram bastante diferentes das outras professoras observadas. Enquanto Bel e Meg viam-se pressionadas pela escola a aprovar alguns alunos com rendimento muito baixo, Mark costumava ser mais rigoroso nas atribuições de notas, assim como nos aspectos disciplinares dos alunos em aula. A escola de Mark estimulava o rigor disciplinar, a organização e a ordem, tanto fora, quanto dentro das salas de aula, o que não ocorria com a outra escola.

Com um tempo total de observação de nove meses em campo, e dentro de uma perspectiva qualitativa de pesquisa (LUDKE e ANDRÉ, 1987; ANDRÉ, 1995), procuramos aproximar-nos daquilo que Geertz (1987) chama de uma "descrição densa" para a linguagem matemática utilizada por estes professores, em sala de aula. Como complementação dos dados, a fim de melhor caracterizarmos os sujeitos investigados, foi respondido um questionário e algumas entrevistas curtas e semi-abertas foram realizadas. Algumas perguntas do questionário[4] solicitavam uma definição informal e outra formal para o conceito de função, além de exemplos. Outras procuravam promover uma reflexão sobre os conceitos de domínio, imagem, variável e sobre as propriedades que distinguem uma função de uma relação qualquer. Duas questões tratavam da construção de gráficos e outras quatro procuravam estimular uma reflexão sobre as notações algébricas (expressões analíticas e uso de letras diferentes das canônicas) que representam funções.

Em nossos pressupostos teóricos, assumimos a linguagem matemática – em complementação à proposta de Anghileri (1995) – como um sistema de signos (sinais e palavras), associado a um conjunto de regras de manipulação dos mesmos, que tem significados ligados a contextos e a procedimentos para resolver problemas matemáticos ou matematizados. Neste sistema, entendemos que estão incluídas as propostas lógico-formais utilizadas em demonstrações e definições matemáticas, mas também que aí se inserem a utilização de figuras, diagramas, desenhos e esboços informais. Deste modo, concebemos que a linguagem matemática engloba todos os signos utilizados em esforços de se fazer compreender dentro de uma comunidade ampla, de alunos, professores (de vários níveis de ensino) e pesquisadores interessados em Matemática. É claro que, similarmente ao que ocorre com a linguagem natural, nem todos os membros dessa comunidade terão os mesmos níveis de aprofundamento no conhecimento e domínio da linguagem matemática. Talvez fosse o caso de se falar também em uma "transposição didática" (Chevallard & Joshua, 1991) da linguagem matemática que expressa o "saber sábio" (erudito, dominado pelos pesquisadores), e a do "saber escolar", mas uma discussão aprofundada nessa linha não é o objetivo deste trabalho. Apenas destacamos os aspectos mais formais da linguagem como referência para caracterizar o espontâneo e suas limitações, observando que o objetivo do professor do Ensino Médio é construir esse conhecimento em níveis mais elaborados, tentando aproximá-lo do "saber sábio" tanto quanto possível.

Dentro desta linguagem, investigamos os significados nos conjuntos de coisas que se dizem ou se escrevem de um objeto; não o que se poderia dizer, mas o que efetivamente se diz. E, nas relações em sala de aula, não acreditamos que o conhecimento seja algo que se "transmite" simplesmente por comunicação, ou que se possa atribuir aos defeitos do uso da linguagem, todos os fracassos na aprendizagem. Entretanto, não se podem negar as relações fundamentais existentes entre os sujeitos que adquirem os conhecimentos e a linguagem que os expressa. E, dentro da realidade escolar, não se pode desprezar a forte influência de elementos mediadores entre o aluno e o objeto de conhecimento, que passam pela linguagem do professor e do livro didático.

Concebemos que a aprendizagem está ligada à produção de significados pelos sujeitos das enunciações, produção essa que passa pelas relações interpessoais, manifestadas através da linguagem. E, então, as teorias de Vygotsky (1981, 1989a, 1989b) sobre o aprendizado e desenvolvimento como processo sócio-histórico (ou sociocultural) vêm dar suporte às nossas reflexões.

Entretanto, vale ressaltar que estudiosos dessas teorias (Castorina *et al.*, 1995) destacam que o processo pelo qual o indivíduo internaliza as idéias fornecidas pela cultura, e pelos elementos mediadores que o cercam, não é um processo de absorção passiva, mas de transformação e síntese, a partir do qual as atividades externas e as funções interpessoais transformam-se em atividades internas, intrapsicológicas.

Na questão da formação dos conceitos, Vygotsky propõe a distinção entre os conceitos espontâneos e os científicos, sendo estes últimos sistematizados e tratados

[4] O questionário completo e as justificativas para as perguntas inseridas podem ser encontrados em Zuffi (1999).

intencionalmente, em geral, segundo uma metodologia específica. “São, por excelência, os conceitos que se aprendem na situação escolar” (Vygotsky, 1989a, p. 50).

Nos trabalhos de Vinner (1991 e 1992) e de Dubinsky & Harel (1992), encontramos apoio teórico para analisar aspectos cognitivos ligados especificamente ao conceito de função.

Vinner (1991) propõe a idéia de imagem conceitual (ou imagem do conceito), relacionando as definições matemáticas e as imagens mentais mais imediatas que os indivíduos evocam, ao ouvirem o nome de um conceito. Em nosso caso, consideramos que seria relevante investigar quais são as imagens conceituais evocadas na utilização da linguagem matemática pelo professor, para o ensino de funções, no nível médio, e ao expressar as suas idéias próprias a este respeito. Foi interessante verificar como se dá a relação entre as definições formais, colocadas por esses professores, e as imagens conceituais promovidas através dos exemplos, e também através das seqüências de abordagem do conceito de função e seus periféricos, em sala de aula.

Nos trabalhos de Dubinsky & Harel (1992), as concepções de ação, processo e objeto fornecem os subsídios para analisarmos se tais concepções, sobre o conceito de função, estão presentes na linguagem utilizada por professores do Ensino Médio.

Em nosso trabalho, procuramos, então, analisar qual (ou quais) dessas concepções são enfatizadas pelo professor, através da linguagem matemática explícita que ele constrói para as funções.

As concepções dos professores sobre “funções” e sua linguagem na sala de aula

Em nossa análise dos dados, reunimos 21 unidades de significados, a partir de termos recorrentes na expressão dos professores em sala de aula, ou evidenciadas nas entrevistas e com o questionário. A partir destas unidades, construímos categorias que destacam alguns modos de conceber o conceito de função e seus periféricos, dentro de uma visão mais ampla do que é a linguagem matemática, para os professores do Ensino Médio. A seguir, sintetizamos apenas seis destas categorias construídas, com o intuito de nos auxiliarem em nossas considerações sobre a ausência de uma integração da linguagem matemática entre as diferentes disciplinas escolares que a utilizam. Detalhes dessa análise podem ser encontrados na tese de Zuffi (1999).

1) As definições propostas em aula e as definições históricas

Nas salas de aula, embora as definições gerais de função apresentadas por Meg e Bel fossem próximas à de Dirichlet e incorporassem as idéias formais de “conjunto”, “relação”, “domínio”, “contradomínio” e “imagem”, os modelos que predominaram estavam mais próximos da definição histórica de Euler, pois as funções eram sempre dadas por expressões algébricas simples, em conjuntos numéricos reais, e com modelos de cálculos sempre sobre *números inteiros*. As funções eram apresentadas primeiro na sua notação analítica (expressão algébrica), mesmo que o domínio se tratasse de um conjunto discreto e pequeno de pontos, para somente depois se caracterizarem os gráficos, tabelas e manipulações das funções.

2) Imagens do conceito

As funções que determinaram as imagens conceituais transmitidas através da expressão dos professores, na sala de aula, também tiveram seus modelos todos em expressões analíticas simples e “bem-comportadas”. Os raros casos que trouxeram funções descontínuas ofereceram dificuldades de tratamento pelo professor e de compreensão, por parte dos alunos (uma única situação constatada na aula de Mark e uma, na aula de Bel). Isso corrobora o fato de que as imagens conceituais evidenciadas nas concepções dos professores, através das respostas ao questionário, ficavam realmente restritas aos casos "bem-comportados" e mostra que tais imagens conceituais (ou os modelos e formas visuais evocados em sua memória), para o conceito de função, não correspondem, em grau de profundidade, às definições formais que os professores apresentaram anteriormente aos seus alunos.

3) Concepção evidenciada dentre as de "ação, processo e objeto"

A concepção de ação predominou na linguagem de sala de aula e isso era esperado, uma vez que a maior parte dos períodos observados se constituíram de fases em que o conceito de função foi apresentado pela primeira vez aos alunos. Mas o fato tornou-se surpreendente quando, mesmo tratando de idéias mais avançadas, como as funções exponenciais, no final do período observado, estas não eram propostas como processos.

Raríssimos indícios da concepção de processo foram evidenciados com Mark, através do estudo de transformações de gráficos de funções afins e modulares, mas que o próprio professor considerou como algo que vai além do que se deve ensinar nessa fase. A grande ênfase dos professores era colocada na atribuição de valores específicos para a variável independente, calculando-se os respectivos valores das imagens, para só então colocá-los nos gráficos. Por outro lado, estes gráficos eram observados através de poucos pontos esparsos, sem se caracterizarem explicitamente as transformações globais que representavam entre dois conjuntos. A idéia de variação, fortalecida na concepção de processo, fica prejudicada no enfoque dado pelos professores, deixando lacunas quanto a este aspecto essencial à conceituação de função.

4) Expressões informais mostraram ter um papel mais significativo do que a definição matemática, no tratamento do conceito

Embora a definição formal fosse apresentada aos alunos imediatamente, já na introdução do conceito, na sala de aula houve pouca discussão das condições para o domínio e a unicidade das imagens, contidas na definição geral de função. Casos de não-funcionalidade apareceram muito raramente no tratamento do assunto. Os casos de funções mais gerais, definidas em conjuntos distintos de R (números reais), ou em conjuntos não numéricos, não foram explorados pelos professores, em sala. Deste modo, a definição formal proposta aos alunos no início do tratamento do assunto, embora bastante ampla, acabava substituída por termos da prática pedagógica dos professores, como o caso do termo "dependência" e pelos exemplos que estes consideravam mais relevantes, mas que não atingiam as várias possibilidades encerradas na definição geral de função apresentada.

5) Alguns dos professores observados parecem "concretizar o abstrato"

Não utilizamos, aqui, o termo "concretizar o abstrato" no sentido de usar a realidade, ou fenômenos reais para construir e ilustrar conceitos abstratos da Matemática, mas no sentido de transformar os símbolos, as notações matemáticas, em objetos, em "coisas", por si só.

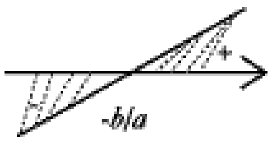
Na sala de aula, os símbolos, as notações, muitas vezes eram tomadas como coisas, como objetos, sem que os seus significados abstratos fossem atingidos. Em contrapartida, faltou o concreto – o uso de fenômenos reais e de resolução de problemas cotidianos – para justificar as operações que eram propostas sobre estas notações, embora se utilizassem de algumas poucas "aplicações" esterilizadas, feitas ao final do tratamento formal, com as quais tentavam justificar o estudo do conceito.

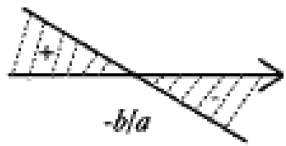
Os exemplos "do cotidiano" de Meg e Bel, vinham aos alunos já elaborados numa linguagem muito próxima da notação simbólica e a ênfase da expressão das professoras estava nas "leis" algébricas que descreviam as situações, e nos cálculos a partir delas, sem explorar os significados ligados à situação real, tomando a expressão algébrica abstrata que determinava a função como um fim em si mesma.

Nas aulas observadas, as inequações também apareciam como simples manipulações algébricas de variáveis concretizadas nas letras “x” e “y”, sem terem seus significados abstratos explorados. (Os professores observados relutavam em usar outras letras para as variáveis. Somente um caso foi constatado nos nove meses em que estivemos em campo, quando Mark usou a letra “p” como variável independente, mas em seguida voltou a escrever a expressão na variável “x”). Os esquemas gráficos desenhados, com os sinais de ‘+’ e ‘-‘ (figuras abaixo) tornavam-se meros objetos pictóricos, sem qualquer ligação explícita desses sinais com os significados das *imagens* de funções com valores positivos e negativos, respectivamente.

A professora Bel, em uma de suas aulas, utilizou esse tipo de esquemas gráficos para o estudo de sinais das funções afins, como vemos em seguida:

(Bel, na lousa) *Podemos esquematizar o estudo considerando apenas o eixo Ox, a raiz e a variação da função:*

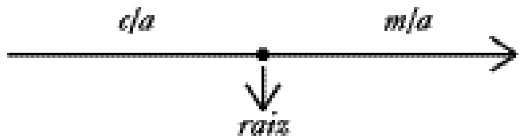




[Uma aluna pergunta o que são esses sinais:]

(Bel) *Eu vou explicar depois. É o sinal da imagem.*

(Bel, na lousa) *Simplificando:*



[Conforme vai desenhando, ela explica:]

(Bel) *Aqui é “o contrário de a”* [apontando para o símbolo c/a]. *Aqui é o “mesmo que a”* [apontando para m/a]. [Refere-se ao mesmo sinal que o do coeficiente “a” de “x”, na expressão da função afim: y=ax+b].

[A aula termina].

Note-se que a resposta à pergunta da aluna foi muito tímida e não houve mais comentários posteriores sobre os símbolos ‘+’ e ‘-‘ representarem os sinais das imagens. E ainda, no esquema desenhado, sequer aparecem os eixos das ordenadas, onde se localizam as imagens. A professora cria uma notação própria para que os alunos apreendam a regra de análise de sinais da imagem, mesmo que esta não tenha significados para eles, com os símbolos ‘c/a’ e ‘m/a’ apresentando significados nada usuais em Matemática. Este tipo de simplificação também foi encontrada em um livro didático atual do Ensino Médio.

Também Meg apresentou indícios dessa concretização do abstrato, quando colocava: *“o a é o que vem antes do x e o b é o que vem depois”*. Aqui, a caracterização das notações “a” e “b” na expressão “y=ax+b” é feita através da localização destes “objetos” dentro da expressão, e não pelos significados abstratos aí presentes.

6) A relação discreto/contínuo é confusa. Os detalhes sobre a passagem do discreto ao contínuo não eram explicitados pelos professores

Esta categoria não havia sido detectada com o questionário e foi identificada somente com a observação das aulas.

Algumas funções de domínio discreto eram representadas por expressões analíticas usadas para domínios tipicamente contínuos, enquanto que os gráficos contínuos eram sempre determinados por um conjunto muito pequeno de pontos discretizados, sem se discutir o que acontecia com as imagens nos intervalos entre esses pontos.

Com esta análise, vimos que muitas idéias a respeito do conceito de função não ficavam explícitas na expressão dos professores através da linguagem matemática, em sala de aula: as noções de correspondência; as propriedades que caracterizam particularidades na relação, para que esta seja considerada uma função; os diferentes papéis dos conjuntos de domínio, contradomínio e imagem; os critérios de escolha e localização de elementos para a identificação desta correspondência no gráfico cartesiano; a observação das "leis" ou "regras" como executando transformações globais entre dois conjuntos, os quais poderiam ser, inclusive, não-numéricos; a infinidade de pares que estão representados através de um gráfico, ou de uma expressão algébrica de uma função; a discriminação entre função e equação; a distinção entre a curva do gráfico que representa uma função e eventuais situações físicas de deslocamento que a função representa.

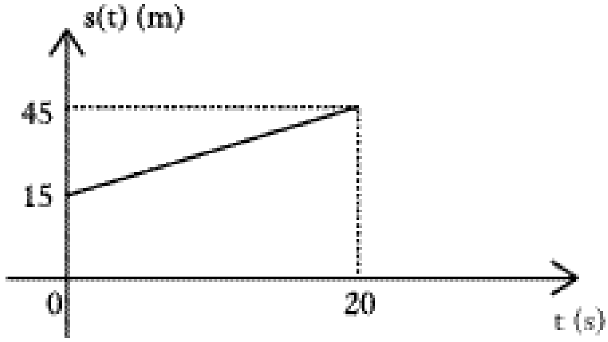
Segundo nossas observações, todas estas informações permeiam a sala de aula, mas não através de expressões claras e objetivas do professor. Este, ao apresentar uma considerável quantidade de exemplos e casos similares, parece considerar que o fato garanta, implicitamente, que o aluno compreenda todas estas idéias. Ou, ao contrário, o professor pode nem mesmo estar ciente destas peculiaridades envolvidas no conceito de função. Daí a necessidade de se enfatizar esses fatos, explicitamente, na formação desses professores, pois eles sinalizam para o ensino de um conceito formal e amplo de "funções", mas acabam por construir noções muito simplificadas do mesmo, introduzindo um formalismo vazio, carente da maior parte dos significados que lhe caberiam.

Algumas considerações sobre a linguagem matemática e seu uso no Ensino Médio

Com os resultados citados anteriormente, sobre o modo como os professores de Matemática usam a linguagem própria para o tratamentos das "funções", podemos tecer algumas considerações a respeito de como se dá, ainda, a transposição dessa linguagem para o Ensino de Física e de Química.

Paralelamente ao tratamento desse tema pelo professor de Matemática, na 1ª série do Ensino Médio, o professor de Física introduz as relações funcionais que caracterizam movimentos uniformes e uniformemente variados, com o espaço percorrido variando em relação ao tempo, a velocidade variando, ou não, e nas quais entra o conceito de aceleração constante. Nestas situações, o que se observa, logo de início, é que os professores de Física e de Matemática utilizam-se de notações bem diferentes para tratarem das noções de variáveis. Enquanto vimos, em nossa pesquisa, que os professores de Matemática relutam em usar outras letras, que não "x" e "y", para as variáveis independente e dependente, respectivamente, os professores de Física usam as notações "s", para espaço (variável dependente), e "t" (variável independente), para o tempo, para representarem a mesma idéia funcional. Como estes fatos podem não estar sendo explicitados, nem por um, nem por outro professor, alguns alunos poderão ter a impressão de que estão lidando com conceitos estanques, totalmente independentes, não percebendo que a idéia de dependência temporal, nos movimentos, caracteriza o que se chamou de função matemática.

É comum, ainda, que se forneçam, nas aulas de Física, gráficos para serem interpretados, como o de deslocamento de um corpo mostrado a seguir:



Temos convivido com vários relatos de professores de Física e de Matemática (Projeto Pró-Ciências do ICMC–USP),[5] que afirmam que muitos alunos tendem a interpretar a linha reta do gráfico como a trajetória percorrida num plano, pelo corpo em movimento, e não como a relação funcional abstrata entre os valores da posição do corpo (s(t)) e os instantes (t) de seu deslocamento. Este obstáculo epistemológico (Bachelard, 1988), evidenciado também junto a alguns professores participantes do Pró-Ciências, pode estar sendo fortalecido pela linguagem do professor de Matemática, ao apresentar características como aquelas mostradas na categoria de número 5. As funções, sendo concretizadas como objetos visualizáveis nos gráficos, mais do que como relações abstratas entre grandezas, perdem sua idéia principal, que é a de relação. O gráfico, sendo proposto, na maioria das vezes, como um objeto concreto na Matemática, passaria a se associar na Física, para muitos alunos, também a um aspecto concreto do movimento de um corpo, que seria a sua trajetória.

Outra questão subliminar na linguagem do professor de Matemática é a passagem do discreto ao contínuo, mostrada na categoria 6, que tem sido feita de maneira bastante automática e insuficiente no tratamento das funções. O professor atribui valores discretizados da função numa tabela, depois traça um gráfico contínuo, sem maiores aprofundamentos sobre o que acontece com os valores intermediários aos que foram previamente escolhidos. Esta dificuldade poderia ser amenizada se houvesse maior integração entre os professores de Matemática e de Física, os quais poderiam propor as idéias de posição e velocidade instantâneas, e da continuidade envolvida nos movimentos uniformes ou uniformemente variados. Assim, estes problemas poderiam ser distinguidos de outros de natureza discreta, como, por exemplo, as relações funcionais de tabelas de preços à vista de vários produtos etc. Essa integração entre os dois professores poderia auxiliar o aluno a compreender aspectos da linguagem matemática que são comuns à linguagem utilizada para tratar problemas da Física, ou para resolver problemas da vida diária.

Com relação ao Ensino de Química, a idéia de proporcionalidade poderia estar sendo mais ligada à idéia de função linear, colocada nas aulas de Matemática. Mas isto não se vê explicitado, nem pelo professor de Química, nem pelo de Matemática. Ambos parecem tratar este assunto como coisas bem diferenciadas – "regra de três", ou "proporção direta", para a Química e "função linear", para a Matemática, podem soar como coisas totalmente distintas para alguns alunos.

[5] "Matemática – Do concreto ao abstrato e do abstrato ao concreto", projeto Pró-Ciências do ICMC-USP, São Carlos, coordenado pelo Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto, 1998-2000, do qual participou a primeira autora.

Um artigo interessante (Orlando Castillo e Gallardo, 1993) coloca, ainda, uma outra diferença entre a linguagem algébrica, proposta pelo professor de Matemática, e a linguagem da Química. Segundo aqueles autores, os sinais positivos associados aos elementos químicos se relacionam a "perdas" de elétrons, enquanto na Matemática, as perdas são mais freqüentemente representadas pelo sinal negativo. Além disso, no primeiro caso, os índices justapostos às letras indicam soma de átomos, como: CO2 = um átomo de carbono mais dois de oxigênio. Já em Matemática, letras e números justapostos indicam multiplicação: 2AB = duas vezes A vezes B = (AB) + (AB), e não (A+A)+B, como seria o esperado na Química. Castillo e Gallardo comentam que os alunos por eles investigados nas aulas de Química, apresentaram dificuldades em reconhecer situações em que deveriam usar uma ou outra idéia, havendo predominância das regras da sintaxe algébrica sobre os significados próprios da Química.

Ao se introduzir, simultaneamente aos significados da Química, uma nova simbologia para as "funções", envolvendo letras e números, em um outro contexto ainda não explorado pela álgebra da escola fundamental, novos obstáculos poderão surgir junto aos alunos – por exemplo, *f(2)* passa a significar a imagem do valor dois, pela função *f*, e não mais "duas vezes *f* ", nem "*f* mais *f* ". Daí a necessidade de atentar aos professores de Química e de Matemática sobre os diferentes significados para as mesmas formas essenciais de notações, envolvidos em cada contexto, e aqueles que são comuns em ambos.

Considerações finais

Com os resultados apresentados neste artigo, pretendemos chamar a atenção sobre as formas com que tem sido veiculada a linguagem matemática nas escolas do Ensino Médio, principalmente pelos professores de Matemática. Mas salientamos também, que a integração dessa linguagem nas aulas de Física e Química, do modo como tem sido efetuada pelos seus respectivos professores, ainda deixa muito a desejar, no que diz respeito a auxiliar o aluno a compreender as nuanças dos vários significados envolvidos em notações semelhantes, mas usadas em contextos diversos. Neste sentido, um maior intercâmbio entre os responsáveis pelo ensino de Física, Química e Matemática, no Ensino Médio, faz-se necessário para o esclarecimento destes pontos.

Por outro lado, este intercâmbio, por si só, não garantirá o aprofundamento dos significados envolvidos nestes enfoques variados, se a formação destes professores, seja ela inicial ou continuada, não promover a adequada reflexão sobre estes fatores.

Vimos, em nossa pesquisa junto aos professores de Matemática, que a linguagem utilizada em sala de aula está mais próxima daquela que eles próprios experimentaram quando alunos do nível escolar médio, do que dos significados que se pretendiam atingir em seus cursos de Licenciatura. Assim, embora saibamos que esta não seja a solução para estes problemas, entendemos que projetos de formação continuada que integrem esses professores com seus colegas de outras áreas do saber, incluindo, aí, a Física e a Química, poderiam auxiliar muito na superação de obstáculos evidenciados em sua linguagem matemática, bem como na conscientização dos mesmos a respeito de futuros obstáculos que poderiam surgir com seus alunos.

Fica, então, em aberto, este novo desafio: colocar em prática as propostas de interdisciplinaridade dos novos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 1998), integrando-as na formação dos professores, buscando destacar os significados da linguagem matemática, nas diversas áreas do saber que a utilizam.

Referências bibliográficas

ANDRÉ, M. E. D. A. *Etnografia da Prática Escolar.* Campinas: Papirus, 1995.
ANGHILERI, J. Language, arithmetic, and negotiation of meaning. *For the Learning of Mathematics Education*, v. 15, nº 3, p. 10 – 14, 1995.
BACHELARD, G., *La formacion del espiritu científico.* Tradução de Jose Babini. Mexico: Siglo Veintiuno, 1988.
BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*, Brasília: Ministério da Educação e Cultura/SEMTEC, 1998.
CASTORINA, J. A. *et al. Piaget - Vygotsky:* novas contribuições para o debate. São Paulo: Ática, 1995.
CHEVALLARD, Y. & JOSHUA, M. A. *La transposition didactique.* Paris: Ed. la Pensée Sauvage, 1991.
DUBINSKY, E. e HAREL, G., *The nature of the process conception of function*. In: DUBINSKY e HAREL (Ed.). The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy. M.A.A. Notes, v. 25, p. 85 – 106, 1992.
GEERTZ, C., *La interpretación de las culturas.* México: Gedisa, 1987.
LUDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU, 1987.
MACHADO, A.C. *A Aquisição do Conceito de Função:* perfil de imagens produzidas pelos alunos. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, 1998.
MEIRA, L. L. *Aprendizagem e ensino de funções. Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Ed. Universitária da Universidade Federal de Pernambuco,1993.
MORETTI, V. D. *O Conceito de Função*: os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadores da aprendizagem. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1998.
MOYSÉS, L., *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*, Coleção Magistério, Campinas: Papirus, 1987.
NORMAN, A., Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In: DUBINSKY & HAREL (Ed.). *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy*. M.A.A. Notes, v. 25, p. 215 – 232, 1992.
OLIVEIRA, M.K., *Vygotsky – aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico.* São Paulo: Scipione, 1995.
OLIVEIRA, N., *Conceito de Função*: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1997.
ORLANDO CASTILLO, L. & GALLARDO, A. Confrontación de dos lenguajes simbólicos: el lenguaje algebraico y el lenguaje químico. Un estudio com alumnos del nivel pre-universitario. *Enseñanza de las Ciencias*, Congreso Internacional sobre la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas, p. 341 – 342, 1993.
PACCA, J. L. A. e VILLANI, A. *A competência dialógica do professor de Ciências no*

Brasil. In: Reunião Anual da ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação em Educação. *Atas*.... Caxambu, 1997.

PIMM, D. *Speaking Mathematically – Communication in Mathematics Classrooms,* NewYork – London: Routledge, 1987.

PINO, A. O conceito de mediação semiótica em Vygotsky e seu papel na explicação do psiquismo humano. *Cadernos CEDES*, nº 24, p. 38 – 51, São Paulo: Cortez, 1990.

SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function*. In: Dubinsky & Harel (Ed.). The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy, M. A. A. Notes, v. 25, p. 25 – 58, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 2º. grau*. 2ª. ed. São Paulo: Secretaria de Estado da Educação, 1991.

STEINBRING, H., BUSSI, M. G. B. & SIERPINSKA, A. (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom,* Reston, U.S.A.: NCTM, 1998.

VINNER, S., Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Maths. Education in Science and Teaching*, v. 14, nº 3, p. 293 – 305, 1983.

________. *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.* In: TALL, D. (Ed.) – Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, v. 11, p. 65 – 81, 1991.

________. *The function concept as a prototype for problems in mathematics learning*. In: DUBINSKY & HAREL (Ed.). The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy, M. A. A. Notes, v. 25, p. 195 – 213, 1992.

VYGOTSKY, L.S., *The instrumental method in Psychology.* In: J.V. WERTSCH (Ed.) The concept of activity in Soviet Psychology. Armonk: New York: M.E. Sharpe Inc., p. 134 – 143, 1981.

________. *Pensamento e Linguagem*. 2ª ed., São Paulo: Martins Fontes,1989a.

________. *A formação Social da Mente.* 3. ed., São Paulo: Martins Fontes, 1989b.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 16, nº1, p. 37 – 85, 1976.

ZUFFI, E. M. *O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados.* Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo 1999, 307 p.

Artigo recebido em 13 de março de 2001 e selecionado para publicação em 18 de maio de 2001.