scientiæ studia, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 509-46, 2010

Das velocidades às fluxões

Marco Panza

RESUMO

O *De methodis* de Newton (escrito em 1671) é o resultado da revisão de um tratado que ele deixara inacabado por volta de outubro e novembro de 1666 (*The october 1666 tract on fluxions*, assim intitulado por Whiteside). Nesse período, Newton já havia obtido os principais resultados que seriam expostos cinco anos mais tarde no *De methodis*, que todos consideram a melhor apresentação da sua teoria das fluxões. Todavia, o próprio termo "fluxão" não ocorre no *The october 1666 tract on fluxions*, onde o que está em questão são os movimentos ou as velocidades. Do ponto de vista estrito do formalismo matemático, a mudança das velocidades (pontuais) para as fluxões não é muito relevante: os métodos matemáticos do *De methodis* são essencialmente os mesmos do *The October 1666 tract on fluxions*. Mas a mudança terminológica é, creio eu, o indício de uma maneira distinta de compreender esses métodos e os objetos aos quais eles se aplicam. Newton diz isso de maneira bastante explícita em uma passagem crucial logo no início do *De methodis*, ao advertir que o termo "tempo" ali empregado não se refere ao tempo *formaliter spectatum*, mas a "outra quantidade" por meio "de cuja fluxão o tempo é expresso e mensurado". Neste artigo, comento essa passagem crucial e procuro esclarecer as diferenças essenciais entre a noção de velocidade de 1666 e a de fluxão introduzida em 1671. Isso também me permitirá discutir o papel de Newton na origem da análise do século xviii.

Palavras-chave • Newton. Teoria das fluxões. História da análise matemática. Análise e síntese. História da mecânica racional.

Introdução

Os principais resultados, para o que mais tarde veio a constituir-se na teoria das fluxões, foram obtidos por Newton entre o final de 1663 e o outono de 1666. A maioria das anotações desse período foram conservadas e estão publicadas no primeiro volume da edição preparada por Whiteside dos manuscritos matemáticos de Newton (MP, 1).[1] Elas permitem reconstruir a evolução das ideias de Newton nos primeiros anos de suas pesquisas matemáticas e de seus progressivos feitos (cf. Panza, 2005).

1 Todas as referências a essa edição dos manuscritos matemáticos de Newton, intitulada *The mathematical papers of Isaac Newton* (cf. Whiteside, 1967-1981), serão feitas por meio da abreviação MP seguida do número do volume e das páginas.

O termo "fluxão" não aparece em nenhuma dessas anotações. Newton o utilizou pela primeira vez no *De methodis*, um tratado composto provavelmente no inverno de 1670-1671 (MP, 3, p. 3-372), e que não foi publicado durante a sua vida, só foi publicado em 1736 (cf. Newton, 1736). O termo "fluxão" desempenhará nesse tratado e nas exposições finais da teoria de Newton o mesmo papel que outros termos tais como "movimento", "determinação do movimento" e "velocidade" desempenharam, *mutatis mutandis,* em seus primeiros apontamentos.

Embora a estrutura essencial e o conteúdo do *De methodis* sejam o resultado da reelaboração de um inacabado tratado anterior elaborado no outono de 1666 – atualmente conhecido, graças a Whiteside, como *The October 1666 tract on fluxions* (MP, 1, p. 400-48) –, a introdução do termo "fluxão" ocorreu simultaneamente a uma importante mudança conceitual na compreensão de Newton sobre seus próprios feitos matemáticos. Procurarei sustentar que essa mudança representa um passo crucial para o surgimento da análise, quando concebida como uma teoria matemática autônoma.

Na seção 1, farei uma distinção entre três sentidos em que se pode empregar o termo "análise" nos contextos históricos em que a matemática foi praticada pelos antigos e pelos primeiros modernos. Terei assim a oportunidade de oferecer mais esclarecimentos sobre a minha compreensão da origem da análise concebida como uma teoria matemática autônoma. Trata-se do que sugiro chamar de "análise euleriana", uma expressão que espero esclarecer comparando-a com a "análise aristotélica" e a "análise vieteana".

Na seção 2, com base na distinção introduzida na seção anterior, compararei os sentidos do termo "análise" no *De analysis* (um manuscrito composto provavelmente em 1669) e no *De methodis* e sustentarei que o que, nesse último tratado, Newton chama de "campo da análise" é algo muito mais amplo do que o domínio de aplicação das técnicas analíticas expostas no primeiro tratado.

Na seção 5, argumentarei em favor da principal tese deste artigo, a saber, que o campo da análise de Newton é, de fato, o núcleo original da análise euleriana. O propósito central do meu argumento será sustentar que Newton concebeu as fluxões como quantidades abstratas relacionadas a outras quantidades chamadas "fluentes", ao passo que o que antes fora chamado "movimento", "determinação do movimento" ou "velocidade" eram compreendidas como as (componentes escalares das) velocidades pontuais dos movimentos realizados por magnitudes geométricas particulares, especificamente por segmentos de linhas.

Para tornar mais claro esse propósito, nas seções 3 e 4, reconstruirei alguns argumentos e resultados dos estudos de Newton sobre o movimento que remontam aos anos 1664-1666. Assim, poderemos acompanhar a evolução das suas ideias a esse respeito, evolução essa que culminou com o *The October 1666 tract on fluxions* e compará-las com o novo enfoque inaugurado pelo *De methodis*.

Especificamente na seção 3, considerarei um teorema cuja prova está baseada em um vínculo intrínseco entre, de um lado, os problemas das tangentes e das normais e, de outro lado, o problema das áreas sob linhas curvilíneas representadas por um sistema de coordenadas cartesianas. Essa prova manifesta uma ideia crucial que, desde então, Newton jamais abandonará, qual seja, considerar as magnitudes geométricas envolvidas no problema como magnitudes geradas por movimentos cujas velocidades pontuais são dependentes entre si. Mas é possível avaliar a relevância desse teorema também ao relacioná-lo a uma proposição registrada em outra anotação, segundo a qual – desde que esses movimentos sejam retilíneos e as relações entre os segmentos por eles produzidos sejam dadas por uma equação polinomial na qual esses segmentos são descritos como as coordenadas cartesianas de uma curva – o problema de determinar a razão entre as (componentes escalares de) suas velocidades é equivalente ao problema de determinar as tangentes e as normais dessa curva. Segue-se que, para curvas dessa espécie particular, os últimos problemas e o problema das áreas estão ambos relacionados a problemas relevantes acerca do movimento.

Na seção 4, descreverei o modo como Newton se defronta com a questão de generalizar para qualquer tipo de curva a relação pressuposta no problema precedente. A solução (afirmativa) será alcançada em meio a suas pesquisas sobre o método das tangentes de Roberval. Newton conseguiu unificar esse método numa proposição única e geral (a proposição 6 do *The October 1666 tract of fluxions*) acerca da trajetória do ponto de interseção de duas curvas inflexíveis que se movem separadamente. Essa é a modalidade de composição do movimento à qual podem ser reduzidas todas as outras modalidades envolvidas no método de Roberval. O teorema de Newton fornece, assim, uma regra recursiva passível de aplicação quando se pretende traçar tangentes a qualquer curva descrita por um movimento composto. À luz dessa proposição, a conexão entre os problemas das tangentes, normais e áreas e os problemas concernentes ao movimento – conexão cuja ocorrência Newton havia mostrado em linhas que fossem expressas, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas, por uma equação polinomial – parece ser um caso particular de uma conexão mais fundamental e geral. Essa é a base da teoria das fluxões de Newton. Essa teoria emergiu como tal quando Newton, no *De methodis*, substituiu os movimentos das linhas por variações dos fluentes – esses últimos compreendidos, conforme já se disse, como quantidades abstratas.

Por fim, na seção 6, enunciarei algumas conclusões retiradas da discussão feita em termos muito gerais dos nexos dessa teoria com a filosofia natural de Newton.

1 A análise

O termo "análise" é altamente polissêmico. A fim de compreender a questão que almejo levantar, é preciso distinguir três diferentes sentidos nos quais esse termo é habitualmente empregado pelos historiadores da matemática. Esses sentidos refletem três diferentes modos como ele ou seus cognatos foram empregados até o séc. XVIII. Os três sentidos, obviamente, não exaurem o espectro de significados que o termo admitiu e continua a admitir na matemática e em áreas afins.

No primeiro desses sentidos, análise refere-se a um padrão de argumentação amplamente utilizado entre os gregos, os árabes e os primeiros matemáticos modernos – especialmente, os geômetras –, na maioria das vezes (embora nem sempre) no contexto da aplicação de um método bipartido, chamado de "método de análise e síntese". Para evitar confusões, chamemos esse padrão de argumentação de "análise aristotélica". Não falta justificação para essa denominação, uma vez que em diferentes circunstâncias Aristóteles empregou ἀναλύσις e seus cognatos nesse sentido.[2]

A análise aristotélica é o padrão comum de qualquer argumento que se baseia na consideração de algo que não está atualmente disponível como se ele estivesse disponível. O exemplo mais nítido de Aristóteles na *Ética a Nicômaco*, no capítulo 5 do livro 3 é a deliberação, a qual é um modo de argumentação em que se procede retrospectivamente a partir da circunstância imaginada almejada na direção da circunstância atual, a fim de traçar uma trajetória para obter a primeira mediante uma operação realizada sobre a segunda.

A descrição clássica feita por Pappus do método de análise e síntese e sua distinção entre a análise teoremática e a análise problemática (*Mathematical collection*, Livro 7, cap. 1-2) referem-se claramente à análise aristotélica. De acordo com Pappus, a análise teoremática aplica-se quando o objetivo é provar uma certa proposição. Ela consiste em deduzir da proposição a ser provada um princípio aceito ou um teorema demonstrado, ou ainda a negação tanto do primeiro quanto do segundo. Uma análise problemática, ao contrário, aplica-se quando é apresentado um problema geométrico que exige a construção de um objeto geométrico que satisfaça determinadas condições espaciais relativas a outros objetos dados.[3] Inicia-se o trabalho supondo que o proble-

2 Por exemplo, nos *Analíticos posteriores*, 78a 6-8, 84a 8, 88b 15-20; *Refutações sofísitcas*, 175a 26-28; *Metafísica*, 1063b 15-19; *Ética a Nicômaco*, 1112b 20-24. Para uma discussão dessas passagens e uma reconstrução da concepção aristotélica da análise, cf. Panza, 1997, p. 370-83, 395.

3 Um exemplo disso é o seguinte: suponha que duas retas, dois pontos sobre elas e um terceiro ponto fora delas são dados (em posição); encontrar uma reta traçada a partir desse último ponto que intersecta as duas outras dadas e as corta – juntamente com os dois pontos dados sobre elas – em dois segmentos que mantêm uma dada razão entre si. Esse é o problema considerado por Apolônio em *De rationis sectione*.

ma está resolvido e representando sua solução por meio de um diagrama no qual estão incluídos tanto os objetos dados quanto os objetos que se busca encontrar. Então, raciocinando sobre o diagrama e, na medida do possível, estendendo o raciocínio às construções autorizadas, isola-se uma configuração de objetos dados e suas propriedades conhecidas. Com base nessas informações, os objetos procurados podem ser construídos e, consequentemente, o problema, solucionado.[4]

Tanto a análise teoremática quanto a análise problemática de Pappus são reduções. Uma análise teoremática no sentido de Pappus pode fornecer *ipso facto* uma prova (por redução ao absurdo), mas apenas se o resultado da dedução for a negação de um princípio aceito ou de um teorema provado. Exceto nesses casos, tanto a análise teoremática quanto a problemática, conforme a descrição de Pappus, são argumentos preliminares que evocam um outro argumento conclusivo, geralmente chamado "síntese": uma análise teoremática evoca uma prova válida; uma análise problemática, uma construção admissível.

As análises teoremática e problemática de Pappus são, sem sombra de dúvida, formas da análise aristotélica. Mas elas não são as únicas formas possíveis assumidas pela análise aristotélica na matemática clássica, medieval e moderna. Outra forma relevante da análise aristotélica ocorre quando se enfrenta um certo problema geométrico que consiste na construção de um objeto geométrico que satisfaça determinadas condições puramente quantitativas.[5] A análise, nesse caso, tem por objetivo transformar essa condição em outra equivalente, mas diferente, capaz de sugerir um modo de construir o objeto que se procura encontrar.[6] Também nesse caso, a análise é uma re-

4 Para ser um pouco mais preciso, considere-se que o problema relevante seja uma configuração $C_{g,?}$ constituída por um sistema de objetos geométricos O_g assumidos como dados (no exemplo mencionado na nota 3, as duas retas e os três pontos dados), um montante de dados D (no exemplo, a razão dada) e uma caracterização de alguns objetos $O_{g,?}$ a serem construídos com base em O_g e em D (no exemplo, a reta a ser encontrada ou, melhor, os pontos nos quais ela intersecta as duas outras retas dadas). A análise tem início com a suposição de que o problema está resolvido. Isso é idêntico a supor como dados alguns objetos que satisfazem $O_?$. A configuração $C_{g,?}$ pode ser, então, representada pelo diagrama no qual são representados tanto os objetos incluídos em O_g quanto os objetos que satisfazem $O_?$. Na medida em que esses últimos objetos não são admitidos como dados e que a solução é somente suposta, a elaboração daquele diagrama não pode ser realizada mediante a aplicação das cláusulas construtivas autorizadas, mas é realizada com uma relativa liberdade, com o propósito de representar as relações espaciais relevantes entre os objetos relevantes e refletir os dados. Por meio de raciocínios sobre ele e, provavelmente, da sua extensão às construções autorizadas, isola-se a subconfiguração C_g, com base na qual os objetos que satisfazem $O_?$ podem ser construídos.

5 Um exemplo é o clássico problema de encontrar o segmento que constitui a média proporcional entre dois outros segmentos dados.

6 Para ser um pouco mais preciso, considere-se que o problema relevante seja uma configuração $C_{g,?}$ constituída por um sistema de quantidades dadas Q_g (no exemplo mencionado na nota 4, os dois segmentos dados) e uma caracterização de algumas outras quantidades $Q_?$ a serem determinadas (isto é, calculadas ou construídas) com base em O_g (no exemplo, o segmento médio proporcional a ser encontrado). Nesse caso, a análise não demanda qualquer diagrama e, ao invés de isolar a subconfiguração C_g de $C_{g,?}$, transforma a última em uma nova configuração $C'_{g,?}$ constituída por

dução. Mas agora trata-se da redução de um problema dado a um problema novo e equivalente, embora ainda distinto (cf. Panza, 2008).

Essa última forma da análise aristotélica também pode ser aplicada quando os problemas relevantes não foram formulados na linguagem simbólica introduzida por Viète e Descartes e em seu correspondente formalismo. A possibilidade de apelar a algum teorema central inserido nos *Elementos* (especialmente, nos livros 2, 5 e 6) é suficiente para permitir as requeridas transformações.[7] Mas essa forma de análise aristotélica aplica-se também a problemas formulados por meio de equações em que se emprega aquele formalismo. Nesse caso, o problema consiste nas transformações apropriadas dessas equações de acordo com as regras do formalismo. Há muitos exemplos desse tipo de análise aristotélica nos *Zeteticorum libri* de Viète (Viète, 1591; Freguglia, 2008). A razão disso é que, após Viète, tornou-se bastante usual empregar o termo "análise" para referir-se ao formalismo ou à família de técnicas dependentes dessas transformações – e não mais ao padrão de argumentação. A fim de evitar qualquer ambiguidade, chamemos esse formalismo de "análise vieteana".

Com esse significado, o termo "análise" foi frequentemente empregado pelos primeiros matemáticos modernos como sinônimo de "álgebra", outro termo altamente polissêmico. Por motivo de simplicidade, não utilizarei esse último termo neste artigo. Utilizarei apenas o adjetivo "algébrico" em um sentido moderno, a fim de estabelecer uma oposição com "transcendente".

A teoria das fluxões de Newton e o cálculo diferencial de Leibniz são amplamente dependentes da análise vieteana, que ocorre em ambos os casos sob a forma por ela assumida em *A geometria* de Descartes (1637). Ambos podem mesmo ser encarados como extensões próprias desse tipo de análise. O desenvolvimento da teoria newtoniana e do cálculo leibniziano ocorreu concomitantemente a outras extensões da análise vieteana, as quais eram parcialmente independentes entre si, como, por exemplo, os

um sistema de quantidades dadas Q'_g que podem ser determinadas com base nas quantidades incluídas em Q_g, e uma nova caracterização $Q'_?$ da mesma quantidade caracterizada por $Q_?$ (no exemplo, possivelmente a condição $a : x = x : y = y : b$ é transformada no sistema de proporções $a : x = x : y$ e $x : y = y : b$ que fornece os sintomas de duas parábolas cuja intersecção determina o segmento procurado).

7 Outro belo exemplo dessa possibilidade encontra-se no tratado de Thābit ibn Qurra sobre a "reparação dos problemas algébricos por meio de demonstrações geométricas" (cf. Luckey, 1941; uma tradução francesa do tratado de Thābit é fornecida pela conjunção das três citações inseridas em Al-Khwārizm, 2007, p. 33-4, 37-8, 41). A primeira das três equações de segunda ordem de Al-Khwārizm é aqui compreendida como o problema de encontrar o segmento x tal que $S(a, x) + R(a, x) = S(b)$, onde a e b são segmentos dados, $S(x)$ and $S(b)$ são os quadrados construídos sobre eles e $R(a, x)$ é o retângulo construído sobre a e x. O apelo à proposição 2.6 dos *Elementos* é suficiente para permitir que Thābit transforme esse problema no problema de determinar o segmento x tal que $S(b) + S(a/2) = S(x + a/2)$, que pode ser facilmente solucionado usando o teorema de Pitágoras.

desenvolvimentos relacionados às expansões de séries exponenciais. A noção crucial de função emergiu desse processo e assumiu um lugar central na matemática. Em seu *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1748), Euler inaugurou um programa fundacional destinado a reformular qualquer teoria matemática em termos da estrutura geral de uma teoria das funções, aqui compreendidas como expressões apropriadas de quantidades abstratas (cf. Panza, 2007). A parte seguinte deste artigo será dedicada ao esclarecimento preliminar dessa noção de quantidade abstrata mediante a reconstrução do percurso intelectual que conduziu Newton à elaboração da noção de fluxão a ela associada. Por enquanto, é suficiente declarar que, na primeira metade do século xviii, o termo "análise" e seus cognatos passaram a ser empregados por uma teoria das funções – aqui concebidas como quantidades abstratas –, bem como por suas segmentações internas e por seus desdobramentos. A fim de evitar ambiguidades, chamemos essa teoria de "análise euleriana". Será precisamente a essa forma de análise que pretendo fazer referência quando afirmo que a mudança conceitual que se seguiu à introdução do termo "fluxão" no *De methodis* foi um passo crucial na origem da análise, compreendida como uma teoria matemática autônoma.

2 Do *De analysis* ao *De methodis*[8]

Em junho de 1669, Isaac Barrow, então professor lucasiano de matemática em Cambridge, acrescentou à sua correspondência em resposta a Collins, que lhe havia anteriormente enviado uma cópia do *Logarithmotechnia* de Mercator (1668), as seguintes observações:

> Um amigo meu daqui, que possui um especial talento para estas coisas, apresentou-me outro dia algumas anotações onde ele havia estabelecido métodos para calcular a dimensão de magnitudes como aquelas que o Sr. Mercator emprega para a hipérbole – embora ainda mais gerais – bem como para resolver equações, que suponho poder lhe interessar (MP, 1, p. 13; MP, 2, p. 166n; Westfall, 1980, p. 243).

8 Para os aspectos factuais das informações contidas nessa seção, ver Westfall (1980) e o aparato crítico dos volumes 2 e 3 da *Correspondence*. (Todas as referências à edição de Turnbull das correspondências de Newton, intitulada *The correspondence Isaac Newton* (cf. Turnbull, 1959-1977), serão feitas por meio da abreviação *Correspondence* seguida do número do volume e das páginas.)

Dez dias mais tarde, Barrow enviou a Collins uma amostra daquele especial talento: um pequeno tratado hoje conhecido como *De analysis per Æquationes numero terminorum infinitas* (MP, 2, p. 206-47). Collins encarregou-se de fazer uma cópia desse tratado e de colocá-la em circulação. A partir daí, o jovem Newton e alguns dos seus primeiros resultados tornaram-se conhecidos na comunidade científica inglesa, ainda que ele não houvesse permitido a publicação do *De analysis* até 1711, quando esse já se tornara apenas uma peça de valor histórico (cf. Newton, 1711), com o exclusivo propósito de sustentar sua pretensão de prioridade em meio à famosa querela com Leibniz.

Em virtude de haver circulado entre os mais próximos de Collins, o *De analysis* é frequentemente considerado a primeira apresentação pública da teoria das fluxões de Newton. Todavia, isso não é totalmente verdade. Esse tratado é uma espécie de *instant book* que Newton escreveu apenas para expor alguns de seus resultados; justamente aqueles equivalentes ou similares aos de Mercator.

Logo em seguida à apresentação de duas regras (MP, 2, p. 206-10) para quadrar curvas expressas por equações da forma

$$y = ax^{\lambda} + bx^{\mu} + cx^{\nu} + \text{etc.} \tag{1}$$

onde λ, μ, ν, ... são expoentes racionais e “etc.” significa que os membros do lado direito são uma soma finita ou infinita, Newton dedica a principal parte desse tratado à exemplificação detalhada da terceira regra:

> Se o valor de y ou de algum de seus termos for mais composto do que os anteriores, ele deve ser reduzido aos termos mais simples por meio de operações realizadas com as letras do mesmo modo que os aritméticos obtêm números decimais por meio de divisão, extração de raízes e resolução de equações (MP, 2, p. 211-3; para os exemplos, ver p. 212-42).

Dito de modo mais explícito, Newton supõe que curvas são expressas por meio de equações algébricas $F(x, y) = 0$ de diferentes formas e mostra como operar com essas equações de tal modo a transformar todas elas em equações da forma (1), aplicando às expressões literais os procedimentos derivados, por generalização ou extensão infinitária, das regras aritméticas usuais dos cálculos numéricos.

Por fim, ele considera as curvas mecânicas, tais como a cicloide, e mostra como expressar também essas curvas por meio de equações (infinitárias) da forma (1), lançando mão de alguns estratagemas adequados, mas peculiares.

O termo “análise” e seus cognatos é bastante raro no tratado de Newton (MP, 2, p. 206, 222, 240 e 242) e, quando ocorre, sempre faz referência ou diz respeito à análise vieteana.[9] É possível que se diga, entretanto, que o *De analysis* inclui vários exemplos de análises aristotélicas operacionadas por meio da análise vieteana. Elas permitem exprimir diferentes famílias de curvas algébricas e de certas curvas transcendentes por meio de equações da forma (1). Desse modo, é possível aplicar a essas curvas a seguinte regra da quadratura:

$$y = ax^{\lambda} \rightarrow \mathfrak{A}(y) = \frac{a}{\lambda+1}x^{\lambda+1} \text{ ; } \mathfrak{A}(y+z) = \mathfrak{A}(y) + \mathfrak{A}(z),$$

onde "$\mathfrak{A}(w)$" denota a área delimitada pela curva da ordenada ortogonal cartesiana w, que, em termos modernos, corresponde a $\int_0^x w(t)dt$, supondo que $w(0) = 0$.

Esse é apenas um pequeno fragmento da enorme quantidade de resultados que Newton obteve entre 1663 e 1666. Mesmo assim, com base apenas na reduzida amostragem da sua competência contida no *De analysis* e em algumas outras rápidas anotações que foram provavelmente apresentadas a Barrow, Newton foi nomeado professor lucasiano de matemática da Universidade de Cambridge, em 29 de outubro de 1669, substituindo o próprio Barrow.

A partir de então, embora interessado em outros assuntos, tais como filosofia natural, espectro de cores e alquimia, Newton não podia mais deixar de atender aos apelos de Barrow e Collins para que preparasse acréscimos à edição latina da *Algebra* de Kinckhuysen (1661), que Mercator havia recentemente traduzido para o holandês. Em 11 de julho de 1670, Newton estava convencido de que havia finalizado seu trabalho e o enviou a Collins. Mas Collins teve a péssima ideia de remetê-lo de volta a Newton com a solicitação de que fossem acrescidos mais esclarecimentos sobre as raízes de binômios. Ele jamais receberia de volta nem os esclarecimentos solicitados nem a versão original dos acréscimos feitos por Newton.

Em 27 de setembro de 1669, Newton comunicou a Collins que decidira substituir seus acréscimos por um novo tratado, que de fato escrevera, mas que não seria finalizado antes de 1683 (MP, 5, p. 54-532). Ele se manteve, então, em silêncio até 20 de julho de 1670, quando envia uma correspondência a Collins, onde consta a seguinte observação:

9 Cf., por exemplo, a seguinte passagem: "e qualquer que seja a análise comum executada por meio de equações compostas a partir de um número finito de termos (quando isso é possível), esse método [o método da quadratura previamente exposto] pode sempre ser executado por meio de equações infinitas; por conseguinte, jamais hesito em aplicar-lhe o nome de análise" ["*Et quicquid Vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere*"] (MP, 2, p. 240).

> No último inverno, (...) em parte incitado pelo Dr. Barrow, cheguei a um novo método para discutir as séries infinitas e planejava ilustrá-lo com tais problemas; quanto mais problemas (talvez alguns deles) eu conseguisse aí incluir tanto mais aceitável tornar-se-ia a própria invenção de trabalhar com tais séries. Mas (...) não tenho tido tempo livre para retornar a esses pensamentos, e receio que não o terei antes do inverno. Mas, visto que você me informa que não preciso ter nenhuma pressa, espero ter humor para concluí-los antes da impressão da introdução, porque se devo ajudar a preencher a sua página de rosto, tenho que anexar algo de que eu possa me orgulhar e que possa ser tão convincente para o mestre quanto outras coisas seriam para o aprendiz (*Correspondence*, 1, p. 66; MP, 2, p. 288; MP, 3, p. 5, 32 nota; Westfall, 1980, 268).

Esse algo "que possa ser tão convincente para o mestre" que Newton estava planejando como um anexo à *Álgebra* de Kinckhuysen era justamente o *De methodis*; um tratado bastante distinto do *De analysis*, no qual ele planejava expor sua própria teoria inovadora e todas as suas extensões. Esse tratado inicia-se com as seguintes palavras:

> Observando que a maioria dos geômetras atualmente, ao negligenciar quase totalmente os métodos sintéticos dos antigos, dedica-se ao desenvolvimento da análise e, com sua ajuda, supera uma quantidade tão grande de dificuldades formidáveis que eles parecem eliminar tudo que seja distinto do problema de quadrar as curvas e alguns tópicos da mesma natureza ainda não elucidados, julguei adequado, a fim de beneficiar os iniciantes, redigir este pequeno tratado, onde eu poderia de uma só vez alargar as fronteiras do campo da análise e contribuir para o progresso da doutrina das curvas (MP, 3, p. 33).[10]

Embora pareça relutante em admitir que "negligenciar quase totalmente os métodos sintéticos dos antigos" seja sinal de progresso, Newton claramente inscreve seus próprios resultados no "campo da análise". Todavia, parece-me que ele não está mais falando da análise vieteana, como no *De analysis*; seu objetivo não é mais mostrar como o problema das quadraturas pode ser solucionado por meio da identificação das séries aptas a exprimir qualquer curva algébrica e algumas curvas mecânicas, com base em uma transformação prévia. De fato, os mesmos métodos expostos no *De analysis* são

10 "*Animadvertenti plerosque Geometras, posthabitâ fere Veterum syntheticâ methodo, Analyticæ excolendæ plurimum incumbere, et ejus ope tot tantasque difficultates superasse ut pene omnia extra curvarum quadraturas et similia quædam nondum penitùs enodata videantur exhausisse: placuit sequentia quibus campi analytici terminos expandere juxta ac curvarum doctrinam promovere possem in gratiam discentium breviter compingere*" (MP, 3, p. 32).

também expostos no *De methodis*, e está presente em ambos um novo método bastante poderoso e congênere aos demais – o assim chamado método do paralelogramo de Newton. Mas esses métodos são agora encarados como nada mais que uma etapa preliminar relativa apenas a alguns *modis computandi* (MP, 3, p. 70). Em seguida à exposição desses métodos, Newton escreve:

> Resta agora, na tarefa de ilustrar essa arte analítica, expor alguns problemas típicos, que serão tão especiais quanto a natureza das curvas que se apresentarão (MP, 3, p. 71).[11]

Assim, é provável que a "arte analítica" não consista, para Newton, meramente em algumas técnicas apropriadas a serem empregadas na preparação da solução de determinados problemas, mas ela está estreitamente relacionada aos próprios problemas e, por conseguinte, também às suas soluções. Desse modo, ela assume uma forma peculiar que, pelo menos, não é mais nem a análise vieteana, nem a aristotélica.

Essa extensão do "campo da análise" não é independente de uma redução apropriada desses problemas a outros. Mas essa redução não é mais a mera redução de uma determinada configuração de quantidades dadas e não-dadas a uma nova configuração mais manipulável. A redução converte-se em uma transformação da própria natureza desses problemas.

De fato, ocorre uma dupla redução. Primeiro, problemas relativos às curvas são reduzidos a problemas relativos ao movimento. Segundo, problemas relativos ao movimento são reduzidos a problemas relativos às fluxões. A primeira redução já estava em funcionamento no *The October 1666 tract*. Com efeito, a teoria exposta nesse tratado é uma teoria do movimento e das velocidades, destinada ao uso na solução de problemas geométricos; o seu objetivo é mostrar como solucionar problemas geométricos por meio do movimento. A última redução, entretanto, não possui antecedentes e comporta a novidade essencial do *De methodis* que desejo enfatizar. Vamos esclarecer esse ponto. Eis como Newton descreve a primeira redução:

> Mas, antes de tudo, devo observar que todas as dificuldades desse tipo podem ser reduzidas aos dois problemas a seguir, que me sejam concedidos propor a respeito do espaço percorrido por qualquer movimento local acelerado ou retardado como quer que seja:

11 "*Jam restat ut in illustrationuis hujus Artis Analyticæ tradam aliquot Problematum specimina qualia præsertim natura curvarum ministrabit*" (MP, 3, p. 70).

1 Dada a distância do espaço continuamente (isto é, em qualquer tempo), encontrar a velocidade do movimento em qualquer tempo indicado.
2 Dada a velocidade do movimento continuamente, encontrar o comprimento do espaço descrito em qualquer tempo indicado (MP, 3, p. 71).[12]

Não há duvida de que, nos termos acima, Newton formula ambos os problemas de uma maneira mais geral do que o havia feito no *The October 1666 tract*. Nesse tratado, com efeito, os problemas foram assim formulados nas proposições 7 e 8:

7 Dada uma equação que exprime essa relação entre duas ou mais linhas x, y, z etc., descritas ao mesmo tempo por dois ou mais corpos móveis, A, B, C, etc.: a relação entre suas velocidades p, q, r etc. pode ser encontrada, a saber: (...)[13]
8 Se dois corpos A & B, em virtude de suas velocidades p & q, descrevem as linhas x & y e, sendo dada uma equação que exprime a relação entre uma das linhas x e a razão $q : p$ dos seus respectivos movimentos q & p, encontrar a outra linha y (MP, 1, p. 402-3).

Parece haver uma diferença bastante relevante entre esses enunciados e aqueles do *De methodis*: na medida em que evita supor que os espaços descritos estão entre si em uma relação expressa pela equação polinomial (cf. nota 13), Newton parece transformar dois problemas concernentes à transformação de equações polinomiais – isto é, dois problemas algébricos pertinentes à análise vieteana – em dois problemas genuinamente geométrico-mecânicos. Considerando-se comparativamente as propo-

12 "*Sed imprimis observandum venit quod hujusmodi difficultates possunt omnes ad hæc duo tantùm problemata reduci quæ circa spatium motu locali utcunque accelerato vel retardato descriptum proponere licebit. 1. Spatij longitudine continuò (sive ad omne tempus) data, celeritatem motûs ad tempus propositum invenire. 2. Celeritate motûs continuò datâ longitudinem descripti spatij ad tempus propositum invenire*" (*MP*, 3, p. 70).
13 Newton supõe que a relação entre x, y, z, etc. é expressa por uma equação polinomial. Os pontos de sustentação representam assim a descrição (de fato, três descrições equivalentes, mas diferentes) do bem conhecido algoritmo que, no caso mais simples de duas variáveis, permite passar de

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j} = 0$$

para

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^{j}p + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1}q = 0 .$$

sições 1-6 do *The October 1666 tract* (MP, 1, p. 400-2) e a segunda redução que Newton realiza no *De methodis*, surge, entretanto, uma imagem bastante distinta. Antes de considerar essa segunda redução e para compreender seu verdadeiro significado, é necessário considerar com mais atenção essas proposições.

Elas se destinam a fornecer uma teoria geral da composição de movimentos, que é completamente independente da possibilidade de expressar a relação dos espaços descritos por meio de equações algébricas. Quando considerados à luz dessa teoria, os algoritmos exigidos nas proposições 7 e 8 subsequentes revelam-se ferramentas locais destinadas a certas situações particulares nas quais se pretende determinar, com base nessa teoria, as razões e relações apropriadas. O objetivo das duas próximas seções é reconstruir os aspectos essenciais dessa teoria e a evolução dos pensamentos de Newton que o conduziram até ela.

3 Os movimentos e a geometria

O mais antigo registro do recurso feito por Newton aos movimentos e a suas propriedades para provar teoremas e resolver problemas geométricos ocorre em uma nota composta no verão de 1664 (cf. MP, 1, p. 219-33; para a datação dessa nota, cf. Panza, 2005, p. 183-4), em decorrência de sua leitura da segunda edição em latim da *A geometria* de Descartes (Descartes, 1659-1661).

Na referida edição, o texto de Descartes foi acrescido de muitos comentários, ensaios sobre questões afins e notas. Em meio a esse material suplementar, há uma carta de van Heuraet (Descartes, 1659-1661, v. 1, p. 517-20), onde é exposto um importante teorema sobre quadraturas e retificações: se *AML* (conforme a figura 1) e *END* são tais que, para qualquer ponto *P* tomado sobre seu eixo comum *EH*, suas ordenadas *PM* e *PN* são traçadas de acordo com a seguinte proporção:

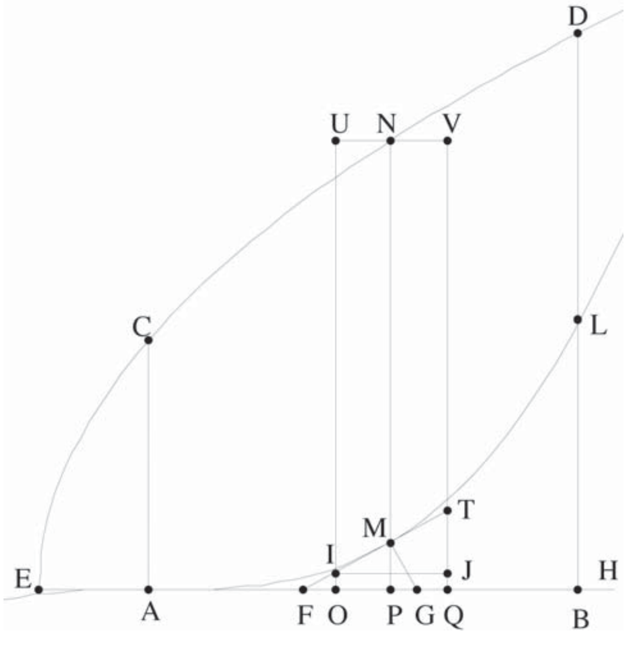

Figura 1

$$PM : MG = K : PN, \tag{2}$$

onde MG é a normal a AML em M, e K é um segmento qualquer constante, então o trapezóide $ABDNC$ é igual ao retângulo construído sobre K e qualquer outro segmento igual ao arco AML.

Nessa nota, Newton aplica uma versão ligeiramente modificada desse teorema: se PM e PN são tais que

$$PM : PG = K : PN, \tag{3}$$

onde PG é a subnormal a AML em M, o trapezóide $ABDNC$ é igual ao retângulo construído sobre K e BL.

O teorema de van Heuraet permite retificar uma curva sob a condição de que as áreas de alguma outra curva sejam conhecidas. A versão modificada de Newton permite quadrar uma curva sob a condição de que a normal ou a tangente de alguma curva relacionada seja conhecida. Dito de uma maneira mais geral, essa versão estabelece um nexo entre o problema das tangentes e o problema das quadraturas.

Os dois teoremas podem ser provados do mesmo modo, mediante uma simples aplicação do método dos indivisíveis. Suponha-se que $OQ = IJ$ é uma porção indivisível da base AB e note-se que

$$PM : MG = IJ : IT \quad \text{e} \quad PM : PG = IJ : JT.$$

Então, comparem-se essas proporções com as proporções (2) e (3), respectivamente, a fim de concluir que

$$\mathrm{R}\,(IJ, PN) = QVUO = \mathrm{R}\,(IT, K)$$
$$\text{e} \quad \mathrm{R}\,(IJ, PN) = QVUO = \mathrm{R}\,(JT, K).$$

onde, para qualquer par de segmentos α e β, $\mathrm{R}\,(\alpha, \beta)$ é um retângulo construído sobre esses mesmos segmentos. Finalmente, somam-se todos os retângulos tais como $\mathrm{R}\,(IT, K)$ e $\mathrm{R}\,(JT, K)$ e seguem-se os teoremas. É essencialmente desse modo que van Heuart prova seu teorema.

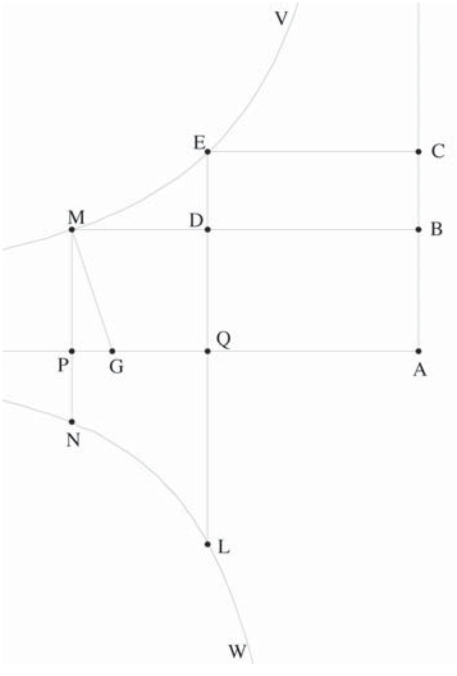

Figura 2

O argumento de Newton para provar o segundo teorema (*MP*, 1, p. 222-9) é bastante diferente. Ele se refere a uma outra figura (conferir figura 2), na qual o segmento *K* é identificado como a base constante *DB* = *AQ* do retângulo *DBCE* e as ordenadas *PM* e *PN* das curvas *YV* e *ZW* são, do mesmo modo que antes, tais que a proporção (3) permanece, supondo que *PG* é a subnormal a *YV* relativa a *M*. Então, ele observa:[14]

> supondo que a linha *PN* move-se sempre sobre a mesma superfície no mesmo [intervalo de] tempo, o seu movimento aumentará a partir de *QL* na mesma proporção em que o seu comprimento decrescerá e a linha *DB* mover-se-á uniformemente a partir de *EC*, de tal modo que o espaço *ECDB* = *NPQL* (MP, 1, p. 228-9).[15]

A afirmação "o seu movimento aumentará a partir de *QL* na mesma proporção em que o seu comprimento decrescerá" deixa claro que Newton compreende aqui movimento como uma quantidade escalar, isto é, como (componentes escalares de) velocidades pontuais. Ele parece admitir como estabelecido aquilo que era o principal objeto dos argumentos anteriores baseados em indivisíveis, qual seja, a igualdade dos elementos do retângulo *ECBD* e do trapezóide *NPQL*. Ele recorre, então, aos movimentos para fornecer o que se assume como pressuposto naquele argumento, a saber, que as igualdades dos elementos implica a igualdade da totalidade das figuras. Ao invés de apelar a uma soma infinita de elementos indivisíveis ou infinitamente pequenos, ele considera as figuras como produzidas pelo movimento (no sentido usual do termo) e pressupõe que as relações dessas figuras dependem das relações das velocidades pontuais desses movimentos.

Esse estilo de argumento raramente será repetido nas últimas anotações de Newton. Mas a ideia central jamais será abandonada: considerar as magnitudes geométricas relacionadas como magnitudes geradas por movimentos cujas velocidades pontuais dependem mutuamente e variam de acordo com uma taxa apropriada correspondente às relações geométricas entre aquelas magnitudes.

Como esse exemplo bem demonstra, Newton utiliza o termo "movimento" [*motion*] e seus cognatos – na maioria das vezes, "mover-se" (*to move*) – em dois sentidos diferentes: para referir-se aos movimentos de pontos e linhas no sentido comum desse termo, mas também para referir-se à "determinação" pontual desses movimen-

14 Para uniformizar, alterei as letras empregadas por Newton para referir-se aos pontos no diagrama.

15 Note-se que *ECBD* é o retângulo construído sobre *AQ* = *K* e que a diferença das ordenadas *QE* e *PM* é relativa aos pontos limites do trapezoide *NPQL*. Segue-se que a igualdade *ECBD* = *NPQL* expressa, com respeito às curvas representadas na figura 2, o mesmo resultado que, com respeito às curvas representadas na figura 1, é expresso pela pretensão de que o trapezoide *ABDNC* é igual ao retângulo construído sobre *K* e *BL*.

tos. O termo "determinação", quando relacionado a movimentos, já havia sido empregado por Descartes, Fermat e Hobbes, em diversos sentidos (Descartes, 1637, p. 17-8; 1644, 2, p. 55-8, 1647, 2, p. 41 e 99; Adam & Tannery, 1897-1910, *cartas* XCVI, CXI, CCXX, CCXXX, CCXXXIV, DXXI), e Newton o utilizará em diferentes ocasiões (cf. MP, 1, p. 372, para a primeira ocorrência). Quando os movimentos são retilíneos, a sua determinação, no sentido de Newton, reduz-se ao componente escalar da velocidade pontual, visto que seu componente direcional é constante e não há necessidade de levá-lo em consideração. Mas as coisas se passam de um modo muito diferente quando esses movimentos não são retilíneos.

Por enquanto, consideremos apenas o caso mais simples, o caso dos movimentos retilíneos. Retornarei ao caso dos movimentos curvilíneos na seção 4.

Sejam x e y dois segmentos variáveis produzidos no mesmo tempo por dois pontos que se movem segundo um movimento retilíneo. A relação desses segmentos em qualquer instante de tempo depende (dos componentes escalares) das velocidades pontuais desses movimentos. Mas também a recíproca é verdadeira: para que esses segmentos possam ser relacionados de uma determinada maneira, as (componentes escalares das) velocidades pontuais desses movimentos têm que satisfazer algumas condições relevantes. É muito natural, portanto, que surjam os dois problemas:

(1) dada a relação entre x e y, buscar as (componentes escalares das) velocidades pontuais dos movimentos que os produziram;
(2) dadas as (componentes escalares das) velocidades pontuais, buscar a relação entre x e y.

Esses são justamente os dois problemas que Newton enuncia no *De methodis*. Mas por que eles são relevantes para a solução de problemas geométricos relativos a curvas?

Uma primeira resposta encontramos em uma pequena nota provavelmente redigida no começo do outono de 1665 (MP, 1, p. 343-7), onde esses problemas são enunciados e o primeiro deles é resolvido, para o caso particular quando ambas as relações, aquela dos segmentos e aquela entre (os componentes escalares das) suas velocidades pontuais, são expressas por equações polinomiais de duas variáveis. A seguir, o que Newton escreve:

Figura 3

> 1 Se dois corpos *c*, *d* descrevem as retas *ac*, *bd* no mesmo tempo (chamando $ac = x$, $bd = y$, p = movimento de c, q = movimento de d), e se tenho uma equação exprimindo a relação de $ac = x$ e $bd = y$, cujos termos são todos igualados a zero, multiplico cada termo da equação por tantas vezes py ou p/x quantas forem as dimensões que x possui na equação; e também por tantas vezes qx ou q/y quantas forem as dimensões que y possui na equação. A soma desses produtos é uma equação que expressa a relação dos movimentos de c e d. (...)
> 2 Se uma equação expressando a relação dos movimentos dos corpos for dada, é mais difícil e, por vezes, geometricamente impossível encontrar assim a relação dos espaços descritos por esses movimentos (MP, 1, p. 344).

O algoritmo descrito na primeira proposição é o conhecido algoritmo direto, que nos conduz de qualquer equação polinomial

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j} = 0 \tag{4}$$

para a igualdade

$$\frac{p}{q} = -\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^{j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1}} \tag{5}$$

Esse é um caso particular do algoritmo descrito na proposição 7 do *The October 1666 tract*. (cf. a nota 13). Se o interpretamos segundo o formalismo do cálculo diferencial, conforme o conhecemos atualmente, esse algoritmo permite-nos passar de qualquer equação polinomial P $(x, y) = 0$ para a igualdade

$$\frac{q}{p} = -\frac{\dfrac{\partial P}{\partial x}}{\dfrac{\partial P}{\partial y}}\ .$$

Mas, nesse estágio de suas pesquisas, Newton não dispunha de nenhuma noção compacta e geral equivalente às derivadas parciais de um polinômio. Esse algoritmo é para ele, portanto, apenas uma regra de transformação de um polinômio P (x, y) em uma razão entre polinômios associados, com o objetivo de exprimir a razão apropriada q/p (dos componentes escalares) das velocidades pontuais dos movimentos retilíneos produzidos pelos segmentos x e y.

Em uma nota escrita aproximadamente um ano antes (cf. MP, 1, p. 236-8), Newton afirmara que o produto de y e a razão dos polinômios que constitui o lado direito da igualdade (5) – também descrito como o resultado de uma transformação apropriada de uma equação do tipo (4) – fornece, em relação a um sistema cartesiano de coordenadas ortogonais, a subnormal sobre o eixo x no ponto genérico (x,y) da curva representada pela equação. A partir dessa afirmação e da igualdade (5), segue-se que

$$\frac{q}{p}=\frac{sn_x[\mathrm{P}(x,y)]}{y} \tag{6}$$

onde $sn_x[\mathrm{P}(x,y)]$ é justamente essa subnormal.

Embora não enuncie explicitamente essa igualdade nas anotações feitas no outono de 1665, nessa época, Newton certamente estava consciente dela. Quando comparada aos resultados acerca do vínculo entre o problema das tangentes ou das normais e o problema das quadraturas que Newton obteve alguns meses antes ao modificar o teorema de van Heuraet, essa igualdade oferece um modo de conectar esses dois problemas genéricos aos problemas das velocidades, nos casos em que temos curvas referidas a um sistema de coordenadas cartesianas e expressas por equações polinomiais.

Suponha-se que x e y são as coordenadas ortogonais cartesianas de uma curva e que elas estão entre si em uma certa relação R. Se essa relação é expressa por uma equação polinomial $\mathrm{P}(x,y)=0$, segue-se da igualdade (6) que o problema das tangentes e das normais pode ser solucionado transitando dessa relação para a razão q/p de acordo com a igualdade (5) e reescrevendo o lado direito dessa igualdade em termos que incluem somente uma das duas variáveis x e y. Além disso, se for estabelecido que $AP=x$, $PM=y$ e $PN=z$ (como na figura 1 ou na figura 2), a partir da igualdade (6), segue-se que a condição (3) transforma-se em $z=Kq/p$. De acordo com a versão newtoniana do teorema de van Heuraet, o problema de quadrar a curva de coordenadas cartesianas x e z pode ser solucionado transitando de uma relação R*, que vincula essas coordenadas umas às outras, para uma equação polinomial $\mathrm{P}(x,y)=0$ tal que $q/p=z/K$. Se for assim, o trapézio delimitado por essa curva, descrito entre as abcissas $x=\xi$ e $x=\kappa$ é de fato igual a $K\left|y_\kappa-y_\xi\right|$ (cf. a nota 15).

A única dificuldade que possivelmente surgiria para a solução do primeiro desses problemas, quando R é expresso pela equação polinomial $\mathrm{P}(x,y)=0$, é escrever o lado direito da igualdade (5) em termos de apenas uma das duas variáveis x e y. Se a relação R* for dada de algum modo, a dificuldade que possivelmente surgiria para a solução do último problema é encontrar um polinômio adequado $\mathrm{P}(x,y)$, com a condição de que haja alguma solução (o que não é, obviamente, assegurado em geral).

Os dois problemas clássicos relativos às curvas – o problema das tangentes ou normais e o problema das quadraturas – são assim reduzidos, sob adequadas condições restritivas, aos problemas relativos às velocidades pontuais dos movimentos retilíneos que, por sua vez, são equivalentes aos problemas algoritmos pertencentes ao campo da análise vieteana. Mas, na hipótese de que essas condições não sejam satisfeitas, estariam o problema das tangentes e das normais e o problema das quadraturas, de algum modo, também relacionados aos problemas relativos às velocidades pontuais dos movimentos retilíneos?

Para responder a essa questão, é importante saber como obter a igualdade (6). Haveria Newton tomado de duas maneiras distintas dois algoritmos coincidentes (o algoritmo das tangentes ou normais e os algoritmos da velocidade)? Ou haveria ele compreendido – com base em argumentos mecânico-geométricos, independentemente de qualquer equação – que, em geral, a razão entre as (componentes escalares das) velocidades pontuais dos movimentos produtores dos segmentos y e x é igual à razão entre a subnormal sobre o eixo x e a ordenada da curva traçada pelas coordenadas cartesianas ortogonais x e y? Se essa última possibilidade for o caso, então Newton sabia, no outono de 1665, que a conexão entre os problemas das tangentes, normais e quadraturas e os problemas concernidos às velocidades pontuais dos movimentos retilíneos – manifesta pela equação (6) juntamente com a sua versão do teorema de van Heuraet – não depende do modo como as curvas relevantes possam ser expressas em um sistema de coordenadas cartesianas. Se a primeira possibilidade for o caso, então ele não poderia deixar de perguntar se essa conexão também ocorre quando as curvas, embora referenciadas a um sistema de coordenadas como o anterior, não podem ser expressas por meio de uma equação polinomial.

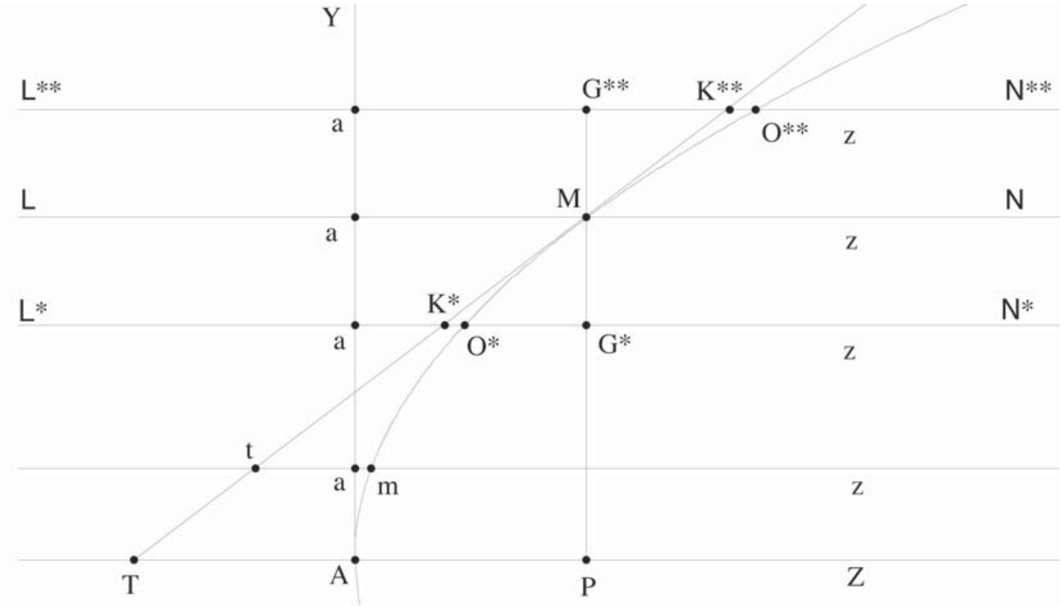

Figura 4

Não há evidências diretas para decidir em favor de nenhuma dessas duas possibilidades. Mesmo assim, é talvez importante observar que, em nas *Geometrical lectures*, proferidas em 1670, Barrow provou um teorema equivalente à generalização da igualdade (6) para qualquer curva referenciada a um sistema de coordenadas ortogonais cartesianas. Na *lecture* III, ele observou que qualquer curva pode ser concebida como o resultado da composição de dois movimentos: o movimento de *az* deslocando-se paralelamente da posição *AZ*, de tal modo que seu ponto *a* se move ao longo de uma linha reta perpendicular *AY*, e o movimento de um ponto *m*, que se move sobre a primeira linha, de tal modo que descreve a curva (cf. Barrow, 1670, p. 28-9; Child, 1916, p. 49-51).[16] Em seguida, na *lecture* IV (art. XI), ele provou que a razão entre as (componentes escalares das) velocidades pontuais desses movimentos em um ponto qualquer *M* da curva é igual à razão dos segmentos *PM* e *TP*, contanto que *TM* seja a tangente da curva no ponto *M* (cf. Barrow, 1670, p. 32-3; Child, 1913, p. 55-7). Na notação de Newton, e supondo que a linha reta *TP* é o eixo x, e $AP = x$, $PM = y$, obtém-se a redução à igualdade:

, (7)

onde $stg_x[y]$ é a subtangente da curva relativa à ordenada y sobre o eixo x. Se as coordenadas são ortogonais e $sn_x[y]$ é a subnormal dessa mesma curva sobre esse mesmo eixo x, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{q}{p} = \frac{sn_x[y]}{y}, \qquad (8)$$

que é uma generalização da igualdade (6).

É possível que, na Universidade de Cambridge ou em outro lugar,[17] Newton tenha acompanhado um curso em que Barrow provou esse resultado. Se assim for, ele não somente estava ciente de que a igualdade (6) é apenas um caso particular de uma igualdade muito mais geral (8), mas ele também conhecia um modo simples de provar esta última igualdade. Na versão impressa do curso de Barrow, esse teorema é provado

16 Para simplificar, indiquei os pontos fixos e móveis com letras maiúsculas e minúsculas, respectivamente.
17 Child sugeriu que Newton acompanhou as *Geometrical Lectures* que Barrow ministrou no *Gresham College* entre 1663 e 1664. Mas isso não é de modo algum líquido e certo. A respeito das relações entre Barrow e Newton, antes de 1669, e a possibilidade de que o último tenha acompanhado as aulas do primeiro, ver *MP*, 1, p. 10-1, nota.

do seguinte modo. Se for considerada como fixa, a tangente *TM* também resulta da composição de dois movimentos: o mesmo movimento da reta *az* do qual resulta a curva e o movimento do ponto *t* que se desloca uniformemente sobre a reta *az* partindo de *T* e de tal modo que alcança a posição *M* quando *az* alcança a posição *LN*. A trajetória de um movimento composto, tal como esses que descrevem tanto a curva, como a sua tangente, depende somente da razão entre as (componentes escalares das) velocidades pontuais dos movimentos que o compõem, e essa trajetória será uma linha reta se e somente se essa razão for constante (cf. Barrow, 1670, p. 28; Child, 1913, p. 49-50). Daí pode-se supor que, sem qualquer prejuízo para a generalidade do resultado, os movimentos de *az* e *t* são uniformes. Sendo isso suposto, considerem-se duas posições de *az*: a posição *L**N** em um dos lados de *LN*, tal que o ponto *m* alcança a posição *O** localizada entre a posição *K** do ponto *t* e o ponto *G** situado onde *az* (na posição *L**N**) corta *PM*; e a posição *L***N*** no outro lado de *LN*, tal que o ponto *m* alcança a posição *O*** que se encontra além da posição *K*** do ponto *t* que está, por sua vez, além do ponto *G*** situado onde *az* (na posição *L***N***) corta PM. Admita-se também que essas posições sejam tais que a concavidade da curva não se altera e que não há extremos entre elas.[18] Quando a reta *az* encontra-se na primeira dessas posições, a (componente escalar da) velocidade pontual do movimento de *m* é menor do que a do movimento do ponto *t* também ao longo dela, visto que a primeira velocidade está aumentando enquanto a última é uniforme, e o espaço *O**G** percorrido por *m* em um determinado intervalo de tempo[19] é menor do que o espaço *K**G** percorrido por *t* no mesmo intervalo de tempo. Por uma razão análoga (considerando os movimentos como progredindo em direções opostas),[20] quando a reta *az* encontra-se na segunda posição, a (componente escalar da) velocidade pontual do movimento de *m* ao longo dela é maior do que aquela do movimento do ponto *t* também ao longo da mesma reta. Segue-se que, quando *az* encontra-se na posição *LN*, essas velocidades são iguais, o que é suficiente para provar o teorema.[21]

18 Na verdade, Barrow não explicitou essa condição restritiva. Mas ela é claramente requerida pelo seu argumento e, consequentemente, esse argumento não se aplica se *M* é um extremo ou um ponto de inflexão.

19 Barrow visivelmente considera esse tempo como sendo "representado" pelo segmento *G**M*.

20 Essa condição está implícita na identificação feita por Barrow entre o tempo relevante e o segmento *MG*** (na verdade, ao introduzir as condições para a segunda parte do argumento, Barrow assume que *MG*** seja o tempo, em vez de meramente representá-lo) que é agora descrito na direção oposta de *G**M* (cf. nota 19).

21 A razão constante entre as (componentes escalares das) velocidades pontuais dos movimentos de *az* e de *t* sobre essa última reta é, de fato, igual à razão entre *PM* e *TP*, de tal modo que, se as (componentes escalares das) velocidades pontuais de *m* e *M* forem iguais à razão constante de *t*, a razão entre as (componentes escalares das) velocidades pontuais dos movimentos de *az* e *m* sobre a última reta, quando esse último ponto está em *M*, é também igual à razão entre *PM* e *TP*.

4 Newton e o método das tangentes de Roberval

Embora não se encontre qualquer prova similar entre as anotações de Newton, há muitas afinidades entre os argumentos de Barrow e o modo como Newton conseguiu mostrar que a igualdade (6) nada mais é que um caso particular de um resultado muito mais geral. Todavia, Newton vai muito mais longe que Barrow, uma vez que estabelece uma conexão intrínseca entre o problema das tangentes e alguns problemas importantes relativos aos movimentos (retilíneos ou não) e suas velocidades pontuais, mesmo quando as curvas relevantes não estão referenciadas a qualquer sistema de coordenadas cartesianas. Isso torna-se possível quando Newton toma ciência do método das tangentes de Roberval (cf. Wolfson, 2001; Panza, 2005).

Em 1665, esse método já era conhecido na França por alguns matemáticos (cf. Auger, 1962, p. 58-77; Hara, 1965; Pedersen, 1968, 1980, p. 20-3), mas ainda não havia sido apresentado em nenhum texto publicado.[22] Isso aconteceu somente em 1693, quando veio a público um tratado redigido por um discípulo de Roberval, François de Bonneau, *Sieur* de Verdus (Roberval, 1693). Certamente, esse tratado teve a sua origem em notas registradas durante os cursos ministrados por Roberval. Embora Newton nunca mencione esse tratado nem o nome de Roberval, o conteúdo de algumas de suas anotações não deixam dúvidas de que ele tinha de algum modo adquirido familiaridade com o método ali empregado.[23] Eis aqui o modo como Verdus apresenta o seu *principe d'invention*:

> em qualquer espécie de linhas curvas, a tangente em qualquer de seus pontos é a linha da direção do movimento que o móvel que a descreve realiza nesse ponto. De tal modo que, compondo os movimentos de diversos modos e obtendo o conhecimento da direção do movimento composto em qualquer um dos pontos

22 Um método similar foi, entretanto, empregado por Torricelli para encontrar a tangente de um problema (cf. Torricelli, 1644, p. 119-21).

23 Não há qualquer evidência que nos informe o modo pelo qual esse método chegou ao conhecimento de Newton. Ele era conhecido por Barrow, que se refere a ele em uma carta a Collins como um "método para encontrar as tangentes das curvas por meio da composição de movimentos" (Rigaud, 1841, p. 34) que havia sido mencionado por Mersenne e Torricelli. Isso sugere que Barrow tomou contato com ele por intermédio da menção feita por Mersenne em seu *Cogitata physico mathematica* (cf. Mersenne, 1644, p. 115-6). Mas também é possível que ele o conheceu de algum outro modo; por exemplo, por meio de Hobbes, que convivera com Verdus (cf. Skinner, 1966) e que se encontrara com o próprio Roberval em 1642 (cf. Auger, 1962, p. 72). É altamente plausível que Barrow mencionou esse método em um de seus cursos. A terceira de suas *Geometrical Lectures* é, com efeito, inteiramente dedicada à composição de movimentos, que, em seguida, é utilizada para investigar as tangentes, conforme teremos oportunidade de ver. É possível que Newton esteve presente lá, aprendeu as ideias fundamentais desse método e alguns de seus exemplos paradigmáticos (entre as anotações de Newton, ocorrem muitos exemplos também presentes no tratado de Verdus) e, depois disso, trabalhou em cima dele por si próprio.

de uma linha curva, conheceremos desse mesmo modo sua tangente (Roberval, 1693, p. 70).

O problema enfrentado por esse princípio é que ele não deixa claro como a composição de movimentos deve ser exatamente compreendida. De fato, no tratado de Verdus são considerados pelo menos três tipos diferentes de composição de movimentos:

(1) Um ponto está sujeito a um movimento composto se se desloca em relação a um sistema de referência que, por sua vez, se desloca em relação a outro sistema de referência.
(2) Um ponto está sujeito a um movimento composto se for o ponto de interseção de duas curvas inflexíveis e desloca-se à medida que essas curvas se deslocam separadamente uma da outra.
(3) Um ponto está sujeito a um movimento composto se se desloca na medida em que suas respectivas distâncias de dois polos fixos, representados por dois segmentos gerados por dois movimentos distintos, alteram-se ao mesmo tempo.

O tratado de Verdus expõe o método em sua generalidade de um modo bastante vago e, em seguida, inclui diferentes exemplos, sendo cada qual relativo a uma ou mais dessas modalidades de composição. Em cada um dos exemplos, indica-se o modo de encontrar a direção pontual do movimento composto, supondo que sejam conhecidos tanto os componentes escalares quanto os direcionais das velocidades pontuais dos dois movimentos que o compõem. Essas modalidades não são, entretanto, explicitamente distinguidas entre si, bem como nenhum procedimento ou construção geral está associado a cada uma delas.

O primeiro caso é aquele dos movimentos que produzem uma cicloide e uma espiral, desde que esses movimentos sejam descritos, respectivamente, como o movimento de um ponto sobre uma roda que se desloca por rotação sobre uma reta (conforme a figura 5); esse é o movimento de um ponto em rotação sobre um plano em translação) e como o movimento de um ponto que se desloca sobre uma régua em rotação (conforme a figura 6). No primeiro desses dois exemplos, o segundo movimento é retilíneo. No segundo, não o é. Quando ele é retilíneo, a situação é bastante simples: a velocidade do ponto que se desloca de acordo com o movimento composto resulta da aplicação da regra do paralelogramo às velocidades dos movimentos compostos (conforme a figura 5a).

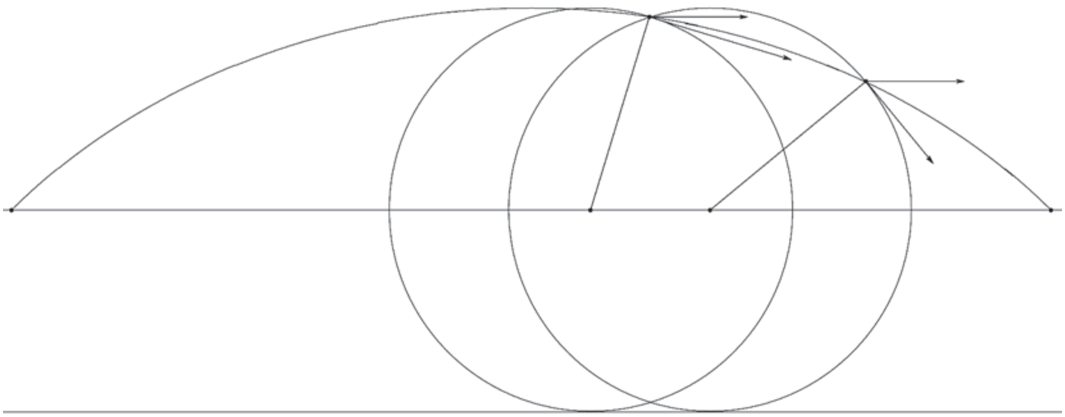

Figura 5

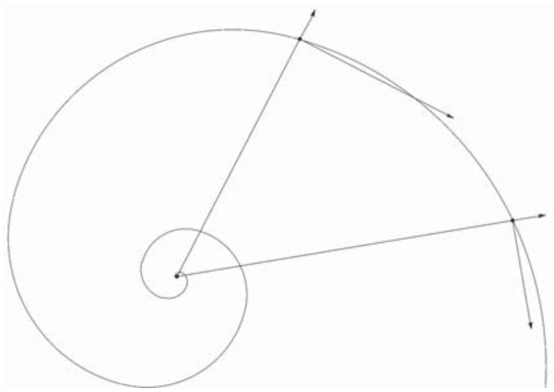

Figura 6

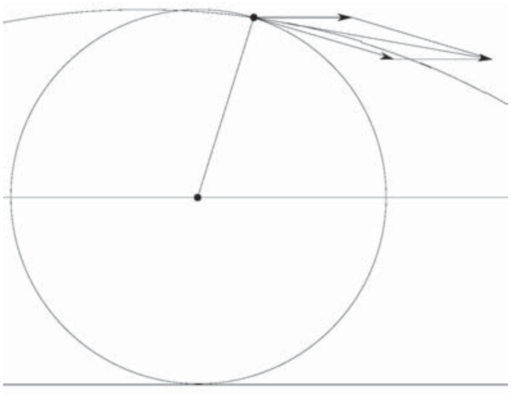

Figura 5a

Quando o segundo movimento não é retilíneo, não há qualquer garantia de que a velocidade do ponto que se desloca de acordo com o movimento composto resulta da aplicação da regra do paralelogramo, pelo menos se essa regra for aplicada aos movimentos componentes. A razão para isso é a seguinte. Suponha-se que v_1 e v_2 são as velocidades pontuais do primeiro e do segundo movimentos, respectivamente. Se o segundo movimento não é retilíneo, não temos nenhum garantia de que v_1 e v_2 são também os componentes da velocidade pontual v do movimento composto ao longo de sua direção própria. O mesmo ocorre também para os dois outros casos de composição de movimentos.

Um exemplo do segundo caso é o da quadratriz, descrita como a trajetória do ponto de interseção de duas réguas, uma das quais gira em torno do vértice do quadrado, enquanto a outra desloca-se ao longo da direção de um dos lados desse quadrado permanecendo perpendicular a ele (conforme a figura 7).

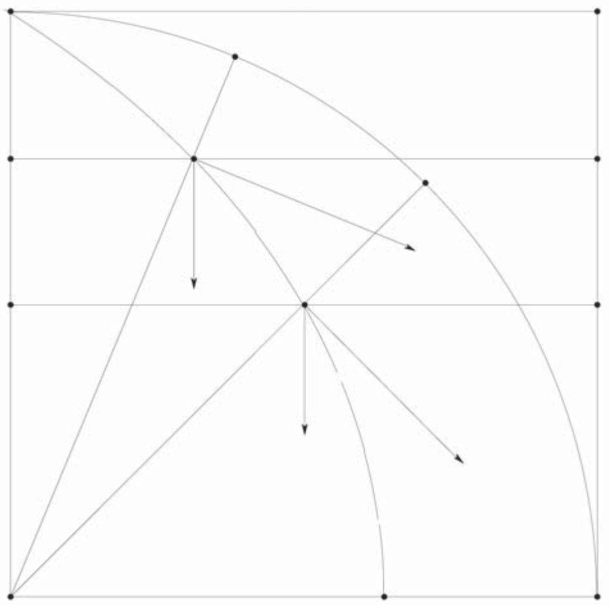

Figura 7

Um exemplo do terceiro caso é o das elipses, descritas como o lugar [*locus*] de pontos tais que a soma das suas distâncias em relação a dois outros pontos dados é constante (conforme a figura 8).

Suponha agora que uma curva C é a trajetória de um movimento M composto, de um dos três modos anteriores, por dois outros movimentos M_1 e M_2. Suponha também que esses dois movimentos são ou retilíneos ou circulares. Em ambos os casos, as direções das suas velocidades pontuais v_1 e v_2 são conhecidas (no caso de um movimento retilíneo, ela é a mesma que a da trajetória do movimento; no caso do movimento circular, ela é a perpendicular ao raio dessa trajetória). Suponha-se também que a razão entre os componentes escalares dessas velocidades é do mesmo modo conhecida: elas devem ser representadas pelos dois segmentos s_1 e s_2 tomados na mesma direção dessas velocidades e na mesma tal razão entre si. Para encontrar a tangente de C, é suficiente determinar a direção pontual de M. O problema é, assim, compor v_1 e v_2 de um modo correto, isto é, encontrar uma construção geral para ser aplicada a s_1 e s_2 de tal forma a obter uma reta que forneça essa direção. Uma vez que a tangente de C é conhecida, essa curva pode ser adicionada a retas e círculos como uma trajetória de movimentos a partir da qual outros movimentos podem ser compostos, de tal modo

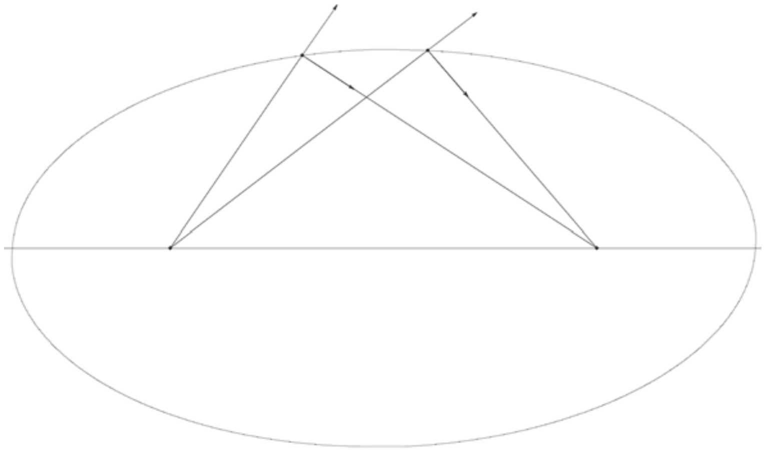

Figura 8

que a tangente da trajetória desses movimentos compostos pode ser encontrada pelo mesmo método. E, está claro, pode-se daí continuar do mesmo modo ascendendo a outras curvas concebidas como trajetórias de movimentos compostos por outros movimentos ainda mais e mais complexos.

Roberval trata os diferentes casos de diferentes modos. Ao contrário disso, Newton deseja obter um princípio geral que possa ser aplicado a qualquer caso. Uma grande parte de suas pesquisas matemáticas entre o outono de 1665 e a primavera de 1666 é dirigida justamente a esse princípio. Ele foi finalmente obtido, na sua forma geral e definitiva, em maio de 1665, e registrado em duas notas (sendo que a segunda delas resulta de uma revisão da primeira) redigidas nos dias 14 e 16 daquele mês (MP, 1, p. 390-9). O mesmo princípio foi também exposto na proposição 6 do *The October 1666 tract*. As cinco primeiras proposições desse tratado destinam-se apenas a fornecer os ingredientes necessários para a exposição daquele princípio.

Parece que Newton compreendeu que a primeira e a terceira modalidades de composição de movimentos, expostas acima, podem ser reduzidas à segunda, isto é, que há um modo de passar, empregando construções apropriadas, dos dois primeiros casos para o último (cf. Panza, 2005, p. 392-9). Segue-se que qualquer movimento composto pode ser encarado como o movimento do ponto de interseção de duas curvas inflexíveis que se movem separadamente. Se as tangentes dessas curvas e (a razão entre) as velocidades pontuais de seus respectivos movimentos são conhecidas, é demasiadamente fácil encontrar a direção pontual do movimento composto e, assim, a tangente da sua trajetória, conforme se vê na figura 9 a seguir:

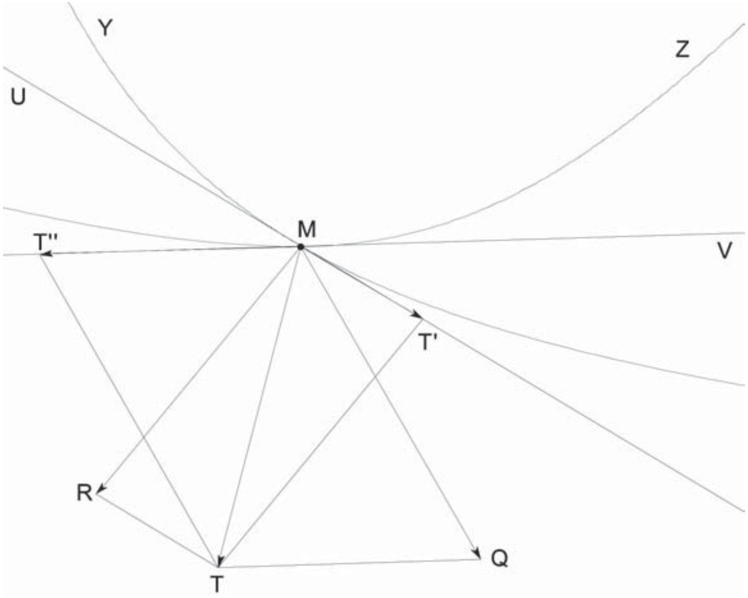

Figura 9

Suponha-se que *YM* e *ZM* (conforme a figura 9) são as curvas em movimento e *M*, o ponto de interseção. Suponha-se também *MU* e *MV* são as tangentes dessas curvas no ponto *M*, e as velocidades pontuais dos movimentos dessas curvas são representadas (escalar e direcionalmente) pelos segmentos *MR* e *MQ*. Segue-se que a direção de *M* é fornecida pela diagonal *MT* do quadrilátero *MRTQ*, que se constrói ao traçar a partir de *R* e *Q* duas linhas paralelas às tangentes *MU* e *MV*, respectivamente.

A justificação disso é fácil. O ponto *M* é afetado efetivamente por quatro movimentos: os dois movimentos das curvas *YM* e *ZM* e os dois movimentos que ele realiza sobre essas curvas para permanecer como o ponto de interseção entre elas. Os segmentos *MR* e *MQ* representam, respectivamente, as velocidades pontuais dos dois primeiros movimentos. Os segmentos *RT* = *MT'* e *TQ* = *MT''* representam, respectivamente, as velocidades pontuais dos dois últimos movimentos. Ao compor esses quatro movimentos dois a dois de acordo com a regra do paralelogramo, obtém-se exatamente a direção *MT*.

Desde que as tangentes das retas e círculos sejam conhecidas, pode-se facilmente encontrar desse modo as tangentes do ponto de interseção de duas retas em movimento, de dois círculos em movimento ou de uma reta e de um círculo, ambos em movimento. E, novamente, uma vez que isso seja dado, as tangentes das trajetórias do ponto de interseção de duas curvas correspondentes a essas trajetórias podem ser encontradas do mesmo modo, e assim por diante.

Mas, para que isso seja possível, é preciso determinar a razão entre os componentes escalares de determinadas velocidades. E, para tanto, o algoritmo das velocidades para os segmentos relacionados pela equação polinomial pode ser útil.

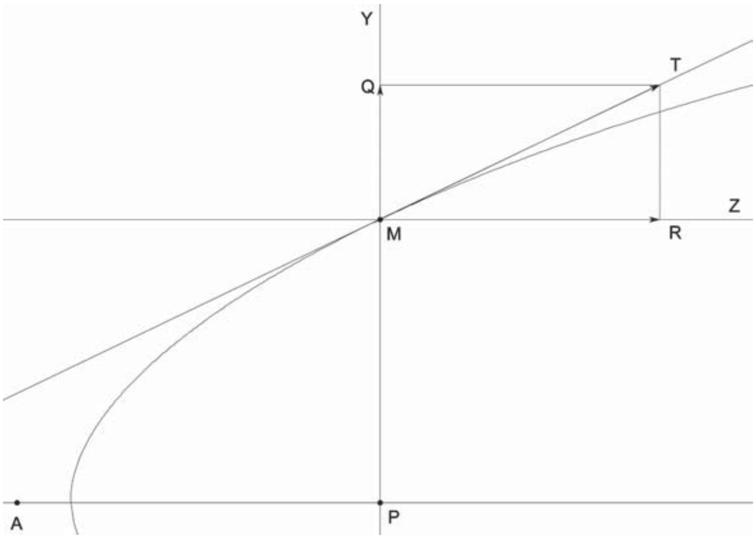

Figura 10

O caso mais simples ocorre quando as duas curvas *YM* e *ZM* reduzem-se a duas linhas retas que transladam uma na direção da outra (como na figura 10). É justamente essa a configuração empregada na prova anterior de Barrow. Mas agora ela é apenas um caso particular de uma configuração mais geral. Nesse caso particular, cada uma das linhas provê, então, a direção pontual do movimento da outra e é a sua própria tangente. O princípio geral de Newton reduz-se, assim, à regra do paralelogramo (que é consistente com o fato de que o movimento do ponto *M* pode também, nesse caso, ser descrito como o movimento de um ponto em relação a um sistema de referência que se desloca retilineamente em relação a outro sistema de referência). Portanto, se as velocidades pontuais dessas linhas retas são representadas pelos segmentos *MR* e *MQ*, para resolver o problema é suficiente construir o retângulo *MRTQ*, pois a sua diagonal *MT* é a tangente pela qual se procura.

Prova-se assim facilmente que o resultado de Barrow – isto é, a igualdade (7) – é um caso particular de um resultado mais geral relativo às tangentes das curvas, independentemente de qual venha a ser o sistema de coordenadas ao qual essas curvas são referidas.

5 De volta ao *De methodis*

Com tudo isso em mente, podemos agora retornar à primeira redução do *De methodis*, que, em suma, consiste em reduzir problemas geométricos sobre as curvas a problemas relativos aos movimentos. Se compararmos esses problemas com as proposições 1-8 do *The October 1666 tract*, descobriremos que Newton eliminou tanto o contexto geral fornecido pela teoria da composição de movimentos (proposições 1-6) quanto a suposição particular de que os espaços (no primeiro problema) e as velocidades (no segundo) estão mutuamente conectados por meio de uma equação polinomial (proposições 7-8). Assim, naturalmente surge a questão: quais são os espaços e as velocidades de que Newton fala? São eles simplesmente os segmentos gerados pelos movimentos retilíneos dos pontos e pelas velocidades pontuais desses movimentos (que não são nada mais que quantidades escalares)? Ou são eles algum tipo de trajetória de curvas inflexíveis e pontos sobre essas curvas e as suas velocidades pontuais (que não podem ser reduzidas a quantidades escalares)?

Não há dúvida de que o texto de Newton é ambíguo. Ele oferece, entretanto, alguns esclarecimentos quando apresenta um exemplo bastante simples:

> Assim, na equação $x^2 = y$, se y designa o comprimento do espaço descrito em qualquer [momento de] tempo medido e representado pelo segundo espaço x que cresce com uma velocidade uniforme, então $2mx$ designará a velocidade com a qual o espaço y deve ser descrito no mesmo momento do tempo (MP, 3, p. 73).[24]

A letra m substitui a letra p aqui. Trata-se de uma mudança não significativa, mas ela vem acompanhada de duas outras muito mais relevantes. Newton supõe nitidamente que:

(1) o espaço x é percorrido com um movimento uniforme;
(2) esse espaço mede e representa o tempo.

A primeira suposição não é absolutamente uma novidade. Barrow já a havia feito (cf. notas 19, 20), e o próprio Newton havia às vezes recorrido a ela em suas anotações anteriores. E, uma vez aceita a primeira suposição, a segunda – também empregada

24 Optei por manter aqui m, evitando substituí-lo pelo símbolo $\dot{x}$, como faz Whiteside ao empregar uma notação que Newton somente introduzirá em 1691 (cf. MP, 3, notas 83, 86 de Whiteside). O texto original de Newton é o seguinte: "*Sic in æquatione* xx = y *si* y *designat spatij longitudinem ad quodlibet tempus quod aliud spatium* x *uniformi celeritate increscendo mensurat et exhibet descriptam: tunc* 2mx *designabit celeritatem qua spatium* y *ad item temporis momentum describi pergit* [...]" (MP, 3, p. 72).

por Barrow — parece impor-se de um modo bastante natural. Mas o modo como Newton emprega essa suposição revela que ela não é para ele apenas um truque oportuno; é, ao contrário disso, um indício de uma mudança muito mais profunda nas concepções de Newton. O tempo não deve ser compreendido aqui como o verdadeiro tempo no qual os movimentos ocorrem; ele é apenas o segundo termo de uma analogia (cf. Guicciardini, 1999, p. 19-20). E o mesmo deve ser dito para o caso do espaço. A razão para isso é simples: Newton não está mais fazendo referência aos movimentos dos pontos ou das linhas; ele não está mais considerando as quantidades geométricas geradas por esses movimentos. Ele está, ao invés disso, referindo-se às variações das quantidades concebidas como variáveis puras. Não há qualquer necessidade de demorarmo-nos sobre esse ponto, visto que o próprio Newton foi bastante enfático a seu respeito:

> E, assim, no que se segue, considerarei as quantidades como se fossem geradas por acréscimo contínuo, à maneira de um espaço que um objeto móvel descreve no seu percurso (MP, 3, p. 73).[25]

Quantidades não são, assim, espaços gerados pelo movimento, isto é, segmentos gerados por pontos móveis ou superfícies geradas por linhas móveis. Ao contrário, elas são aquilo que é "gerado por acréscimo contínuo", do mesmo modo que o espaço é "gerado pelo movimento". Mas as coisas ficam ainda mais claras na passagem a seguir:

> Não temos, entretanto, nenhuma estimativa do tempo, exceto na medida em que ele é representado e medido por um movimento uniforme; e ademais, visto que apenas quantidades da mesma espécie podem ser comparadas entre si [assim também somente] suas velocidades de acréscimo ou de decréscimo [podem ser comparadas entre si]. Por isso, no que segue, não visarei o tempo formalmente assim considerado, mas, entre as quantidades pressupostas que sejam da mesma espécie, suporei que uma delas cresce com um fluxo uniforme e todas as demais quantidades serão referidas a essa última como se ela fosse o tempo, de tal modo que o nome "tempo" possa lhe ser conferido por analogia. E, assim, onde quer que no restante deste texto ocorra a palavra "tempo" (...), por ela não se deve compreender o tempo formalmente considerado, mas uma outra quantidade por meio de cujo incremento e fluxo uniforme o tempo é representado e medido (MP, 3, p. 73).[26]

25 "*Et hinc est quod in sequentibus consideratem quantitates quasi generatæ essent per incrementum continuuum ad modo spatij quod mobile percurrendo describit*" (MP, 3, p. 72).

26 "*Cùm autem temporis nullam habeamus æstimatione nisi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et mensuratur, et præterea cùm quantitates ejusdem tantùm generis inter se conferri possint et earum incrementi et decrementi*

Se Newton não fala de trajetórias e movimentos compostos é porque ele pretende se referir não aos verdadeiros movimentos, mas sim a uma espécie mais geral de mudança. Para dizê-lo na linguagem aristotélica, ele não está mais interessado no deslocamento de pontos ou em mudanças locais (φορά) propriamente ditos, mas em um tipo mais geral de mudança (κίνησις), que inclui o deslocamento de pontos como um caso particular. Passaremos a chamar essa espécie de mudança de "variação quantitativa". Mas o que ela é exatamente?

Desde o começo de 1664 – época em que esteve estudando o método das quadraturas de Wallis (MP, 1, p. 91-5) –, Newton havia compreendido que, para que uma determinada quantidade geométrica – tipicamente um segmento de linha ou uma porção do espaço – pudesse ser considerada uma variável, seria suficiente que outra quantidade geométrica estivesse disponível e fosse tal que o valor da primeira dependesse do seu valor. Essa última quantidade funciona, então, como um parâmetro para a variação da primeira. Temos aqui a ideia central do princípio da variável.

Por um longo tempo, Newton parece ter estado convencido de que o modo fundamental para exprimir a relação entre quantidades geométricas e o parâmetro da sua variação consistia em escrever uma equação algébrica – particularmente, uma equação polinomial – interpretada com base nessas quantidades. Seus trabalhos sobre tangentes e quadraturas, especialmente aqueles inspirados no método de Roberval, ensinaram-no que essa mesma relação também pode ser expressa de um modo bastante diferente e mais geral e fundamental, recorrendo aos movimentos e as suas composições.

A citação anterior evidencia um feito novo e crucial. Ela revela que Newton não está lidando com a variação de quantidades geométricas – ou qualquer outra espécie particular de quantidade – nem com o modo de exprimir suas relações mútuas. Ao contrário, ele está lidando com a própria variação quantitativa, encarada como um tipo especial de mudança. Esse é o tipo de mudança caracterizada pelo fato de que qualquer um de seus exemplos particulares – digamos X – é univocamente identificado e completamente determinado na medida em que o vínculo que o conecta à mudança principal do mesmo tipo, da qual qualquer outra mudança depende, é determinado por uma lei que estabelece a maneira como essa mudança principal é refletida em X. Seja T a principal variação quantitativa. Isso significa que uma variação quantitativa particular X é identificada inequivocamente e determinada completamente na medida em que

celeritates inter se, eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed e propositis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis aliquam æquabili fluxione augeri fingam cui cæteræ tanquam tempori referantur, adeoque cui nomen temporis analogicè tribui mereatur. Siquando itaque vocabulum temporis in sequentibus occurrat (...) eo nomine non tempus formaliter spectatum subintelligi debet sed illa alia quantitas cujus æquabili incremento sive fluxione tempus exponitur et mensuratur" (MP, 3, p. 72).

uma relação particular apropriada R(X, T) for determinada. Os objetos de X e T (as entidades que se supõem variar) não são relevantes aqui, tampouco a natureza intrínseca de T é relevante e, na verdade, não poderia ser determinada. Ela é a variação quantitativa principal não porque é uniforme. As coisas se encaminham no sentido inverso: T é (suposta ser) uniforme porque é a variação principal.

Poder-se-ia argumentar que a ideia não é nova, visto que (na linguagem dos escolásticos) o que se descreve é apenas a mudança de qualidades intensivas. Mas isso não está correto. De fato, Newton parece permutar o *definiens* e o *definiendum*: a variação quantitativa não está sendo definida por intermédio da noção de qualidade intensiva; ao contrário, uma quantidade é concebida, em sua generalidade abstrata, como aquilo que se submete a uma variação quantitativa. Embora as quantidades sejam designadas por símbolos atômicos – tais como "x" e "y" –, elas não são os objetos específicos que esses símbolos representam. Elas são, ao invés disso, aquilo que varia segundo as relações expressas de algum modo mediante o recurso àqueles símbolos; por exemplo – mas não exclusivamente –, mediante uma equação polinomial. Sobre esse ponto, a seguinte passagem é bastante explícita:

> Mas, para distinguir as quantidades que considero como perceptivelmente, mas indefinidamente, crescentes de outras quantidades que em quaisquer equações devem ser consideradas como conhecidas e determinadas e são designadas pelas letras iniciais a, b, c..., chamá-las-ei daqui em diante de "fluentes" e as designarei pelas letras finais v, x, y e z. E as velocidades com as quais cada uma delas flui e é incrementada pelo seu movimento gerador (que posso chamar "fluxões" ou simplesmente "velocidades") designá-las-ei pelas letras l, m, n e r (MP, 3, p. 73).[27]

Assim, Newton encontra-se pronto para a segunda redução. Os dois problemas anteriores sobre os espaços e as velocidades podem ser agora novamente estabelecidos como a seguir:

> Problema 1. Dada a relação das quantidades fluentes entre si, determinar a relação das fluxões.

27 Na passagem acima, fiz algumas modificações tipográficas em relação à versão publicada de Whiteside, além daquelas já indicadas acima na nota 24. Eis o original de Newton: "*Quantitates autem quas ut sensim crescentes indefinitè considero, quo distinguam ab alijs quantitatibus quæ in æquationibus quibuscunque pro determinatis et cognitis habendæ sunt ac initialibus literis* a, b, c, *&c designantur, posthac denominabo fluentes, ac designabo finalibus literis* v, x, y, *et* z. *Et celeritates quibus singulaæ a motu generante fluunt et augentur (quas possim fluxiones vel simplicitate celeritates vocitare) designabo literis* l, m, n *et* r" (MP, 3, p. 72).

> Problema 2. Quando uma equação envolvendo fluxões de quantidades é apresentada, determinar a relação das quantidades entre si (MP, 3, p. 75 e 83).[28]

A referência explícita a equações – que ocorre tanto nas passagens anteriores onde Newton introduz os termos "fluentes" e "fluxões", quanto no enunciado do segundo problema é referendada na solução de ambos os problemas. Embora no enunciado do primeiro problema Newton esteja falando em geral da relação entre os fluentes e as fluxões, ele soluciona o problema (MP, 3, p. 74-82) sob a condição de que essa relação seja expressa por meio de uma equação apropriada: a saber, ou bem uma equação algébrica (polinomial ou não) entre os fluentes relevantes, ou bem uma equação algébrica que incorpora uma variável pela qual seja expressa a área ou o comprimento de uma curva que, por sua vez, seja expressa em termos de um dos fluentes relevantes.[29] Além disso, na solução do segundo problema (MP, 3, p. 82-112), ele supõe que sejam dadas uma ou mais equações algébricas entre os fluentes e as fluxões relevantes e mostra como determinar um desses fluentes em termos de outro através de uma expressão algébrica, possivelmente infinitária.

Poderia parecer, assim, que a generalização envolvida na passagem dos movimentos para as variações quantitativas é imediatamente frustrada por uma nova regressão à particularidade de uma álgebra minimamente modificada pelo acréscimo de um recurso a quantidades geométricas específicas tais como áreas e distâncias. Todavia, as coisas não se passam desse modo. Newton começou com a consideração de equações polinomiais como modos privilegiados de expressar curvas com respeito a coordenadas cartesianas e mostrou que, se as curvas são assim expressas, os problemas das tangentes ou normais e das quadraturas podem ser solucionados por meio da consideração de movimentos retilíneos tomados como movimentos geradores dessas coordenadas. Ele transitou, portanto, das curvas assim expressas para as curvas consideradas como trajetórias de movimentos compostos, independentemente de qualquer sistema de coordenadas particular ou de qualquer espécie de equação que as expresse, e mostrou que a possibilidade de solucionar os problemas das tangentes ou normais e das quadraturas para curvas expressas como equações polinomiais por meio da consideração de movimentos retilíneos nada mais é que uma consequência particular de uma relação mais geral entre essas trajetórias e os componentes dos movimentos relativos.

28 "*Prob. 1. Relatione quantitatum fluentium inter se datâ; fluxionum relationem determinare*." "*Prob. 2. Exposita æquatione fluxiones quantitatum involvente, invenire relationem quantitatum inter se*" (MP, p. 74, 82).

29 O exemplo de Newton (MP, 3, p. 78) é a equação $z^2 + axz - y^4 = 0$, onde se supõe que z seja a área do círculo referenciado a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas da equação $w = \sqrt{ax - x^2}$. Esse exemplo é tratável, visto que Newton prova que $r = m\sqrt{ax - x^2}$ (onde r e m são as fluxões de z e x, respectivamente), isto é, segundo o formalismo diferencial, $dz/dx = m\sqrt{ax - x^2}$ ou $z = \int_0^x \sqrt{at - t^2}\, dt$.

Finalmente, ele substituiu os movimentos por variações quantitativas, as trajetórias retilíneas por fluentes e as velocidades pontuais por fluxões. Mas, nesse novo contexto bastante geral, a especificação de qualquer variação particular depende da especificação das relações entre os fluentes e as fluxões. E, na medida em que os fluentes não são espécies particulares de quantidades – sendo quantidades mais propriamente ditas quando estão relacionados entre si –, não há nenhum modo de especificar essas relações considerando configurações geométricas ou mecânicas particulares. Portanto, o formalismo da análise vieteana – isto é, as equações algébricas – retorna para assumir um papel central como um modo privilegiado de especificar essas relações e, consequentemente, identificar os fluentes e as fluxões particulares. Mesmo o apelo às áreas e às distâncias surge, nesse contexto, com um modo cômodo de introduzir uma relação puramente algébrica entre os fluentes e as fluxões (cf. nota 29).[30] Assim, os fluentes e as fluxões são, por assim dizer, quantidades abstratas: quantidades concebidas como meros objetos das variações quantitativas; enquanto a análise vieteana é a ferramenta empregada para especificar essas variações.

As limitações intrínsecas dessa ferramenta afetam, obviamente, a extensão do domínio das variações quantitativas. Mesmo assim, por meio de sua dupla redução, Newton inaugurou um novo campo de investigação matemática. Trata-se daquilo que, bem no início do *De methodis*, ele chamou de "campo da análise" (cf. nota 12), isto é, a doutrina geral das quantidades abstratas, concebidas da maneira como descrevi até aqui. Embora, logo em seguida à solução dos dois problemas gerais anteriores, o *De methodis* retorne aos problemas geométricos usuais sobre as curvas, esse campo havia sido largamente ampliado com a sua primeira definição, e uma grande parte da história da matemática que se seguiu ao *De methodis* de Newton consistiu no esforço de ampliá-lo ainda mais, estendendo o formalismo da análise vieteana (que emprega, entre outros, dois ingredientes cruciais já incorporados à caixa de ferramentas desse tratado, a saber, séries infinitas e equações fluxionais – ou melhor, empregando a linguagem que posteriormente tornou-se comum, equações diferenciais e integrais). A análise euleriana é justamente o resultado do esforço dispendido para estruturar esse campo e integrá-lo a outros ramos da matemática. O campo da análise de Newton pode ser, assim, encarado como o seu núcleo original.

30 O recurso à área do círculo, no exemplo considerado na última nota, é útil apenas para introduzir o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} z^2 + axz - y^4 = 0 \\ w = \sqrt{ax - x^2} \\ r = mw \end{cases}$$

6 Após o *De methodis* (ou observações conclusivas)

Conforme bem se sabe, Newton alterará rapidamente seu modo de pensar e direcionará sua atividade matemática à geometria clássica e à possibilidade de estendê-la sem alterar sua natureza intrínseca mediante o emprego de qualquer formalismo exótico (cf. Guicciardini, 1999, p. 101-4). Há muitas razões para essa mudança, algumas das quais não têm certamente sustentação em propósitos matemáticos. Mas a narrativa anterior ensina-nos algo que pode nos auxiliar na compreensão dessa mudança, algo que, até onde sei, não tem sido noticiado pelos comentadores.

A teoria da composição de movimentos elaborada por Newton com base em sua compreensão e desenvolvimento do método das tangentes de Roberval é uma teoria na qual as velocidades são consideradas como magnitudes protovetoriais: possuem tanto um componente escalar quanto um vetorial, e ambos são relevantes na composição. Uma vez que os movimentos são abandonados em favor das variações quantitativas e que as velocidades pontuais são substituídas pelas fluxões, somente o componente escalar é conservado, em virtude de que, na teoria da composição dos movimentos de Newton, a explicação do componente direcional somente pode ser obtida pelas relações posicionais dos movimentos envolvidos, que se representam nos diagramas. Mesmo assim, o problema de considerar as direções dos movimentos e as velocidades na descrição dos fenômenos físicos não poderia ser evitado.

Portanto, o campo da análise de Newton pode ser considerado o núcleo original de uma teoria matemática autônoma – a exemplo do que será a análise euleriana tempos depois – somente sob a condição de que essa teoria seja concebida como uma teoria de relações escalares puras, capaz de, ao menos, prover uma estrutura para explicar as relações que os corpos físicos estabelecem entre si em virtude de suas qualidades intensivas. Essa teoria, enquanto tal, não pode prover uma linguagem para descrever a realidade física, mediante idealizações; fornece apenas uma ferramenta para calcular as relações intensivas de magnitudes cuja natureza particular e outros tipos de relações devem ser especificadas independentemente. Em suma, para desenvolver a interpretação das relações entre quantidades abstratas como relações entre quantidades particulares, é indispensável que ocorra um aporte decisivo de informações cuja explicação não se pode obter por intermédio dessa teoria matemática autônoma. O desenvolvimento seguinte do cálculo diferencial, que levou em consideração a possibilidade de mudar a variável principal passando de certas razões diferenciais a outras, incorporou pelo menos parte dessa informação. Ao lado da introdução dos princípios diferenciais e variacionais apropriados, esse desenvolvimento criou as condições para o crescimento da mecânica analítica durante o séc. XVIII (cf. Panza, 2002). Mas, na teoria das fluxões de Newton, ambos os desenvolvimentos estavam impedidos pela presença de uma única variável independente compreendida em analogia com o tempo. O recurso à geometria clássica – que contém os fundamentos últimos de sua teoria da composição dos movimentos – deve assim ter parecido a Newton como uma condição para um emprego da matemática na descrição do mundo físico que se mostrasse capaz de exibir um grau suficiente de precisão. Isso poderia, talvez, explicar parcialmente a ausência da teoria das fluxões nos *Principia*: essa teoria poderia, no máximo, fornecer uma ferramenta local que pudesse ser aplicada aqui e ali, mas não poderia, como tal, ser inserida entre os princípios básicos de uma nova filosofia natural. (Para evitar mal-entendidos, convém repetir que essa poderia ser, no máximo, uma explicação parcial; outras razões, que não poderei considerar aqui, são certamente também relevantes.)

Mesmo assim, o campo da análise de Newton converteu-se – principalmente, graças a matemáticos que não compartilhavam o ponto de vista geométrico peculiar de Newton – no núcleo de uma nova forma de matemática pura, cujas aplicações dependem de modalidades bastante distintas daquelas que são próprias à geometria clássica. Foi justamente o que se sucedeu com a matemática analítica do século XVIII. Meu objetivo aqui foi sugerir que Newton deve ser considerado um dos fundadores principais – ou melhor, como seu genitor, o primeiro fundador – dessa forma de matemática.

Traduzido do original em inglês por Eduardo Salles de Oliveira Barra

Agradecimentos. Agradeço os valiosos comentários e/ou sugestões que recebi de Annalisa Coliva, Mary Domski, Massimo Galuzzi, Michael Friedman, Christian Houzel, Andrew Janiak, Vincent Jullien, Sébastien Maronne, Eric Schliesser, George Smith e Josu Zabaleta. Original deste artigo será publicado pela *Cambridge University Press*, sob o título "From velocities to fluxions", no livro *Interpreting Newton* organizado por Andrew Janiak e Eric Schliesser. O artigo foi traduzido e publicado aqui com a autorização da editora.

Marco Panza
Diretor de Pesquisa do *Centre National de la Recherche Scientifique* (CNRS),
Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques,
Universidade de Paris 1, França
panzam@libero.it

ABSTRACT

Newton's *De methodis* (written in 1671) results from a revision of an uncompleted treatise that he had written in October-November 1666 (*The October 1666 tract on fluxions*, as Whiteside called it). In 1666, Newton already had the main results that he would expound 5 years later in the text that is unanimously considered the best presentation of his theory of fluxions. However, the term "fluxion" itself did not appear however in *The October 1666 tract on fluxions*, where the question addressed had to do with motions or velocities. From the strict point of view of mathematical formalism, the shift from (punctual) velocities to fluxions is not especially relevant: the mathematical methods of the *De methodis* are essentially the same as those of *The October 1666 tract on fluxions*. Still, this terminological change is, I think, the symptom of a different way to understand these methods and the objects they apply to. This is quite explicitly said by Newton in a crucial passage at the beginning of the *De methodis*, where he claims that the term "time" in his treatise does not refer to the time *formaliter spectatum*, but to "another quantity" for the "fluxion of which the time is expressed and measured". In this paper, I discuss this passage and try to clarify the essential differences between the 1666 notion of velocity and the new notion of fluxion introduced in 1671. This also enables me to discuss the role of Newton in the origin of 18th century analysis.

Keywords • Newton. Theory of fluxions. History of mathematical analysis. Analysis/synthesis. History of rational mechanics.

referências bibliográficas

Adam, C. & Tannery, P. (Ed.). *Oeuvres de Descartes*. Vrin: Paris, 1897-1910. 12 v.

Al-Khwãrizm), M. *Le commencement de l'algébre*. Tradução e introdução R. Rashed. Paris: Blanchard, 2007.

Auger, L. *Gilles Personne de Roberval (1602-1675)*. Paris: Blanchard, 1962.

Backer, R (Ed.). *Euler reconsidered. Tercentenary essays.* Heber City: Kendrick, 2007.

Barrow, I. *Lectiones geometricæ* (...). Londini: Typi G. Godbid, & prostantvenales apud J. Dunmore, & O. Pulleyn Juniorem, 1670.

Cerrai, P. F. & Pellegrini, C. (Eds.) *The application of mathematics to the sciences of nature. Critical moments and aspects*. New York: Kluwer/Plenum, 2002.

Child, J. M. (Ed.) *The geometrical lectures of Isaac Barrow*. Chicago/London: Open Court, 1916.

Descartes, R. *Discours de la méthode [...]. Plus La dioptrique. Les météores. Et La géométrie qui sont des essaies de cette méthode*. Leyde: I. Maire, 1637.

____. *Geometria, à Renato des Cartes anno 1637 Gallicè edita* [...] *Operâ atque studio Francisci à Schooten* [...]. Amstelodami: Elzevirios, 1659-1661. 2 v.

____. *Principia philosophiæ*. Amstelodami: Elzevirium, 1644.

____. *Les principes de la philosophie*. Paris: Le Gras, 1647.

Euler, L. *Introductio in analysis infinitorum*. Lausanne: Bousquet & Soc., 1748. 2 v.

Freguglia, P. Viète reader of diophantus. An analysis of Zeteticorum libri quinque. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 28, p. 51-95, 2008.

Grattan-Guinness, I. (Ed.) *From the calculus to set theory, 1630-1910*. London: Duckworth, 1980.

Guicciardini, N. *Reading the Principia. The debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Hara, K. *Etude sur la théorie des mouvements de Roberval*. Paris, 1965, Tese (Doutorado em filosofia). Faculté des Lettres, Université de Paris.

Hoskin, M. (Ed.). *Cambridge illustrated history of astronomy*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Kinckhuysen, G. *Algebra ofte stel-konst*. Harlem: Passchier van Wesbusch, 1661.

Luckey, P. Tãbit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse*, 93, p. 93–114, 1941.

Mercator, N. *Logarithmothechnia; sive methodus construendi logarithmos nova, accurata & facilis* [...]. *Cui accedit vera quadratura hyperbolæ et inventio summæ logarithmorum*. Londini: M. Pitt, 1668.

Mersenne, M. *Cogitata physico-mathematica* [...]. Paris: Sumptibus A. Bertier, 1644.

Newton, I. *Analysis per quantitatum, series, fluxiones, ac differentias cum enumeratio linearum tertii ordinis. ex officina paersoniana*. Londini: W. Jones, 1711.

____. *The method of fluxions and infinite series: with its application to the geometry of curve-lines*. Tradução J. Colson. Cambridge: H. Woodfall/J. Nourse, 1736.

Otte, M. & Panza, M. (Ed.) *Analysis and synthesis in mathematics. History and philosophy.* Dordrecht: Kluwer, 1997. (Boston Studies in the Philosophy, 196).

Panza, M. Classical sources for the concepts of analysis and synthesis. In: Otte, M. & Panza, M. (Ed.) *Analysis and synthesis in mathematics. History and philosophy.* Dordrecht: Kluwer, 1997. p. 365–414. (Boston Studies in the Philosophy, 196).

____. Mathematisation of the science of motion and the birth of analytical mechanics: a historiographical note. In: Cerrai, P. F. & Pellegrini, C. (Eds.) *The application of mathematics to the sciences of nature. Critical moments and aspects*. New York: Kluwer A. P./ Plenum P., 2002. p. 253–71.

____. *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. Paris: Albert Blanchard, 2005.

____. Euler's *introductio in analysis infinitorum* and the program of algebraic analysis: quantities, functions and numerical partitions. In: Backer, R (Ed.). *Euler reconsidered. Tercentenary essays.* Heber City (Utah): Kendrick Press, 2007. p. 119-66.

____. What is new and what is old in Viète's *analysis restituita* and *algebra nova*, and where do they come from? Some reflections on the relations between algebra and analysis before Viète. *Revue d'Histoire des mathématiques*, 13, p. 83–151, 2008.

Pedersen, K. M. Roberval's method of tangents. *Centaurus*, 13, p. 151-82, 1968.

____. Techniques of the calculus, 1630-1660. In: Grattan-Guinness, I. (Ed.) *From the calculus to set theory, 1630-1910*. London: Duckworth, 1980. p. 10-48.

Rigaud, S. J. (Ed.) *Correspondance of scientific men of the seventeenth century*. Oxford: Oxford Unversity Press, 1841.

Roberval, G. P. Observations sur la composition des mouvemens, et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes. In: ____. *Divers ouvrage de M. de Roberval*. Paris: Académie Royale des Sciences, 1963. p. 67-302.

Skinner, Q. Thomas Hobbes and his disciples in France and England. *Comparative Studies in Society and History*, 8, p. 153-67, 1966.

Torricelli, E. *Opera geometrica*. Florentiæ: Landis/Massæ, 1644.

Turnbull, H. W. (Ed.) *The correspondence of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1959-1977. 7 v. (*Correspondence*)

Viète, F. *In artem analyticem isagoge: seorsim excussa ab opere restitutae mathematicae analyseos, seu algebra nova*. Turonis: Mettayer, 1591.

Westfall, R. *Never at rest. A biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

Whiteside, D. T. (Ed.). *The mathematical papers of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1981. 8 v. (MP)

Wolfson, P. R. The crooked made straight: Roberval and Newton on tangents. *The American Mathematical Monthly*, 108, 3, p. 206-16, 2001.