Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 1, 1302 (2012)
www.sbfisica.org.br

O universo estático de Einstein

(Einstein's static universe)

Domingos Soares[1]

Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil

Recebido em 12/12/2010; Aceito em 9/11/2011; Publicado em 27/2/2012

O modelo estático de Einstein foi o primeiro modelo cosmológico relativista. O modelo é estático, finito e de simetria espacial esférica. Utilizo a solução das equações de campo de Einstein, em um universo homogêneo e isotrópico - a equação de Friedmann -, para calcular o raio de curvatura deste modelo, denominado *universo de Einstein.* Mostro, também, utilizando uma analogia newtoniana, a sua mais conhecida característica, qual seja, a instabilidade sob pequenas perturbações do estado de equilíbrio.
Palavras-chave: cosmologia, equação de Friedmann, modelo de Einstein.

Einstein's static model is the first relativistic cosmological model. The model is static, finite and of spherical spatial symmetry. I use the solution of Einstein's field equations in a homogeneous and isotropic universe - Friedmann's equation - to calculate the radius of curvature of the model (also known as *Einstein's universe*). Furthermore, I show, using a Newtonian analogy, the model's mostly known feature, namely, its instability under small perturbations on the state of equilibrium.
Keywords: cosmology, Friedmann equation, Einstein model.

1. Introdução

Em 1917, portanto, há pouco mais de 90 anos, Albert Einstein (1879-1955) propôs o primeiro modelo cosmológico relativista, isto é, baseado na teoria da relatividade geral (TRG), que ele acabara de concluir (ver Refs. [1, cap. 8], [2, cap. 27], [3, cap. 14], [4, seção 2]).

Este modelo, hoje considerado ultrapassado, serviu como semente, bastante profícua, de uma série de estudos teóricos que visavam a entender a estrutura geral do universo, tanto espacial quanto temporalmente. O modelo de Einstein marca o início da cosmologia relativista. O modelo é estático, de curvatura espacial positiva (fechado), portanto, limitado espacialmente - em outras palavras, finito. Estático, porque esta era a visão geral do universo na época, e finito, porque evitava problemas da existência de grandezas infinitas nas condições de contorno, características indesejáveis em qualquer teoria física. É importante lembrar que, em 1917, a hipótese de um universo estático era bastante razoável. As observações de Edwin Hubble (1889-1953), que seriam consistentes com uma solução não estática, ainda não haviam sido realizadas (ver uma discussão detalhada desta questão na Ref. [5]).

Para conseguir estas características, era necessário contrabalançar os efeitos atrativos da gravitação. Einstein introduziu uma constante em suas equações de campo - a agora famosa *constante cosmológica*-, com efeito repulsivo, de modo a possibilitar a existência do tipo de solução que ele desejava. Além de ser coerente com a visão, da época, de um universo estático, Einstein pretendia também justificar as idéias do físico e filósofo austríaco E. Mach (1838-1916) a respeito da origem da propriedade da inércia. De acordo com Mach, a massa inercial de qualquer corpo é devido à influência do universo como um todo. Einstein concordava com esta idéia e acreditava que seu modelo ligava propriedades locais - a massa - com propriedades globais - a constante cosmológica (Ref. [3, p. 272]). A propósito, posteriormente, o entusiasmo de Einstein relativamente ao princípio de Mach diminuiu até desaparecer por completo (ver, por exemplo, a Ref. [6, p. 287]).

Imediatamente após a proposição de Einstein, seguiram-se os trabalhos do holandês W. de Sitter (1872-1934), do russo A. Friedmann (1888-1925) e do belga G. Lemaître (1894-1966), com modelos alternativos ao de Einstein, e também baseados na TRG. Os modelos de W. de Sitter, de A. Friedmann e de G. Lemaître apresentam uma peculiaridade inexistente no modelo de Einstein: todos representam universos em expansão. A luz emitida por qualquer galáxia chega a um observador em uma galáxia distante desviada para o vermelho, em outras palavras, com um comprimento de onda maior

[1] E-mail: dsoares@fisica.ufmg.br.

do que o comprimento de onda de emissão. Esta propriedade não ocorre no modelo de Einstein porque este representa um universo estático. O modelo de W. de Sitter, por outro lado, possui uma particularidade que acabou por diminuir a sua importância: ele representa um universo totalmente destituído de matéria e radiação, onde as galáxias são interpretadas como corpos de prova imersos no espaço-tempo em expansão. Ele tem em comum com o modelo de Einstein a inclusão da constante cosmológica. Como foi dito acima, e a ser detalhado na próxima seção, no modelo de Einstein a constante cosmológica produz uma tendência para a expansão que é precisamente contrabalançada pela tendência atrativa da matéria e da radiação. Como estas não existem no modelo de W. de Sitter, este apresenta apenas a expansão.

Logo começou a ficar evidente que o modelo estático de Einstein era instável para pequenas perturbações do estado de equilíbrio. Finalmente, o astrofísico britânico A. Eddington (1882-1944) mostrou definitivamente que o modelo era instável [7], lançando dúvidas capitais quanto à sua viabilidade.

Na próxima seção, utilizo a equação de Friedmann, modificada com a introdução da constante cosmológica, para calcular o raio do universo de Einstein. Em seguida, analisando o comportamento da função energia potencial, de uma analogia newtoniana, mostro que este universo está em equilíbrio instável. Finalizo, com uma discussão da autocrítica realizada por Einstein a respeito de seu modelo de universo.

2. O raio do universo estático de Einstein

A equação de Friedmann é uma solução geral das equações de campo da TRG aplicadas a um sistema constituído por um fluido homogêneo e isotrópico (ver Ref. [8]). As equações de campo podem ser expressas de forma sintética utilizando-se o formalismo tensorial. Assim teremos do lado esquerdo da equação o tensor de energia-momento e do lado direito o tensor de curvatura, o qual representa as características espaço-temporais do sistema (veja, por exemplo, Eq. (3.6) na Ref. [1]). De maneira simples podemos dizer que o conteúdo de massa e energia do sistema *diz* ao espaço-tempo como se curvar. O espaço-tempo curvo *diz* então a um corpo de prova, nele colocado, como se mover.

As equações de campo da TRG são, na verdade, um sistema de equações diferenciais não lineares de solução extremamente difícil. No entanto, para um fluido homogêneo - mesma densidade em todos os pontos - e isotrópico - mesmas propriedades em todas as direções -, como mencionado acima, este sistema de equações simplifica-se permitindo soluções analíticas, como é o caso da equação de Friedmann.

A equação de Friedmann possui no seu lado esquerdo os termos de energia e no lado esquerdo o termo de curvatura. Ela pode ser escrita, em termos da constante de curvatura do sistema, $K_\circ$, como [1, Eq. (2.19)]

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 = -K_\circ c^2, \tag{1}$$

onde R é o fator de escala e ρ é a densidade total em $R(t)$. G é a constante da gravitação universal e c é a velocidade da luz. A densidade ρ varia com o tempo e o seu valor observado, hoje, é da ordem de 10^{-30} g/cm^3. A constante de curvatura vale, para um universo fechado e esférico, $K_\circ = +1/\mathcal{R}^2$, onde $\mathcal{R}$ é o raio de curvatura do espaço esférico. Para um modelo crítico (ou plano), $\mathcal{R} \to \infty$, e, portanto, $K_\circ = 0$. O universo aberto possui raio de curvatura imaginário, implicando em uma constante de curvatura negativa, $K_\circ = -1/\mathcal{R}^2$ (espaço hiperbólico).

Esta equação foi obtida, pela primeira vez, pelo russo Alexander Friedmann em 1922. Ela é utilizada aqui na discussão do modelo de Einstein em virtude da facilidade da apresentação dos argumentos, tanto para a obtenção do raio do universo, quanto para o estudo da estabilidade do modelo. Historicamente, no entanto, não foi este o roteiro seguido, pois o modelo de Einstein é de 1917.

A Eq. (1) pode ser modificada, sem violar a TRG, pela introdução de uma constante, convenientemente expressa como $1/3\Lambda c^2$, no lado esquerdo da equação, e que pode ser, também, considerada como um termo adicional constante de "densidade" $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$. Teremos

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \left(\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2\right) R^2 = -K_\circ c^2, \quad \text{ou} \tag{2}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \rho_\Lambda\right) R^2 = -K_\circ c^2, \tag{3}$$

e finalmente

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_\circ}{R} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 R^2 = -K_\circ c^2, \tag{4}$$

em que fizemos $\rho(t)R(t)^3 = \rho(t_\circ)R(t_\circ)^3$, ou, $\rho R^3 = \rho_\circ$, onde $t_\circ$ é o instante presente, $\rho_\circ$ é a densidade em $t_\circ$ e $R(t_\circ) = 1$, por convenção. A transformação $\rho R^3 = \rho_\circ$ nada mais é do que a expressão da conservação da massa no universo em evolução (densidade vezes volume, *i.e.*, massa, constante), válida também, naturalmente, para o caso particular de um universo estático.

A constante cosmológica Λ possui dimensões de 1/comprimento^2. Segundo as palavras do cosmólogo Wolfgang Rindler (Ref. [9, p. 303]), "O termo Λ parece ter vindo para ficar; ele pertence às equações de campo tanto quanto uma constante aditiva pertence a uma integral indefinida". Enquanto, matematicamente, a constante cosmológica preserva a validade das equações de campo da TRG, fisicamente, ela resulta em múltiplas possíveis consequências no comportamento dos modelos de universo.

Derivando a Eq. (4) em relação ao tempo, obtemos

$$2\dot{R}\ddot{R} + \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_\circ}{R^2}\dot{R} - \frac{2}{3}\Lambda c^2 R\dot{R} = 0, \tag{5}$$

que pode ser simplificada para

$$\ddot{R} + \frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_\circ}{R^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 R = 0. \tag{6}$$

A Eq. (6) mostra, de forma clara, que o valor de Λ pode ser ajustado para se obter $\ddot{R} = 0$, com R constante, ou seja, para se obter um modelo estático, como queria Einstein.

Como vimos anteriormente, no modelo estático de Einstein, $K_\circ = 1/\mathcal{R}^2$, e fazendo o fator de escala $R \equiv R_E = 1$ nas Eqs. (4) e (6) obteremos as duas relações seguintes

$$-\frac{8\pi G}{3}\rho_\circ - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = -\frac{c^2}{\mathcal{R}^2} \tag{7}$$

$$\frac{4\pi G}{3}\rho_\circ - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = 0. \tag{8}$$

Levando a Eq. (8) na Eq. (7) resulta em

$$4\pi G\rho_\circ = \frac{c^2}{\mathcal{R}^2} \tag{9}$$

ou

$$\mathcal{R} = \frac{c}{\sqrt{4\pi G\rho_\circ}}, \tag{10}$$

que é o raio de curvatura do universo estático de Einstein.

Qual é o seu valor numérico? À guisa de ilustração, seja $\rho_\circ = 3H_\circ^2/8\pi G$, a densidade do modelo crítico de Friedmann, também conhecido como modelo de Einstein-de Sitter. Aqui, $H_\circ$ é a constante de Hubble (ver Refs. [1, 2] para mais detalhes sobre este modelo). Obtemos, assim, $\mathcal{R} = \sqrt{2/3}(c/H_\circ) = 3,4$ Gpc $= 11 \times 10^9$ anos-luz, com $H_\circ = 72$ km s^{-1}Mpc (cf. Ref. [10]).

É importante frisar que este cálculo de $\mathcal{R}$ é apenas ilustrativo, não possuindo qualquer significado físico real. Na época em que Einstein propôs o seu modelo estático, o valor utilizado para a densidade deveria ser o valor observado, que, em ordem de grandeza, não difere muito do exemplificado acima.

3. Estudo de estabilidade

Como vimos no início da seção anterior, a equação de Friedmann (Eq. (1)) possui no seu lado esquerdo os termos de energia e no lado direito o termo de curvatura que é constante. Uma analogia newtoniana, ao modelo de Einstein, pode ser elaborada a partir desta equação pois ela representa a conservação da energia total, aplicada ao fluido cósmico. Utilizaremos para esta analogia a equação de Friedmann modificada com a inclusão da constante cosmológica, na forma da Eq. (4).

O termo do lado direito, nesta equação, representa a energia total do sistema - negativa, *i.e.*, sistema ligado. O primeiro termo do lado esquerdo representa a energia cinética do elemento de fluido cósmico, o segundo termo, a sua energia potencial gravitacional e o terceiro termo - do tipo $-1/2kx^2$ - representa um termo de energia potencial cósmica "elástica". Este termo, na equação de Friedmann, seria uma hipotética tensão intrínseca, existente no tecido espaço-temporal, quantificada pela constante cosmológica. Na analogia, ele se torna um termo de energia elástica de uma mola, com a diferença importante de ser um termo de energia negativa. O segundo termo será, então, representado por $U_G = -1/R$ e o terceiro por $U_\Lambda = -1/2R^2$.

As forças associadas a estas energias potenciais podem ser calculadas por $F = -dU/dR$, resultando em $F_G = -1/R^2$ e $F_\Lambda = +R$, a primeira, uma força de atração - exercida pela gravitação - e a segunda, uma força de repulsão - exercida pela "elasticidade" cósmica, tal qual faria um lençol de borracha - o tecido espaço-temporal - em um corpo colocado sobre ele. No universo estático de Einstein estas duas forças se equilibram exatamente.

A conservação da energia, na analogia newtoniana, poderá, portanto, ser escrita como

$$\frac{1}{2}mv^2 + U_G + U_\Lambda = -E, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{R} - \frac{1}{2}R^2 = -E, \tag{12}$$

onde $-E < 0$ é a energia total do sistema. A Fig. 1 mostra a função energia potencial total $U = U_G + U_\Lambda$. Fica evidente que o ponto de equilíbrio - $F = -dU/dR = 0$ - é um ponto de equilíbrio instável. Exatamente como queríamos mostrar.

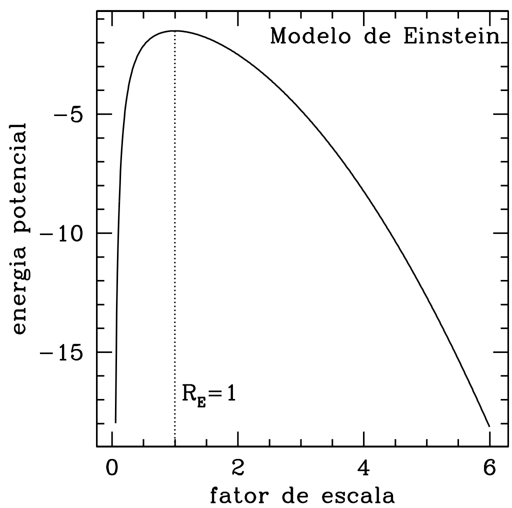

Figura 1 - Diagrama na forma da letra Λ: a energia potencial na analogia newtoniana do modelo estático de Einstein. Note que o ponto de equilíbrio em $R = R_E$ é um ponto de equilíbrio instável. Uma pequena perturbação em R_E resultará no colapso do universo ou na divergência para $R \to \infty$.

4. Considerações finais

Logo após a proposta de Einstein, dois acontecimentos, quase que simultâneos, no início da década de 1920, alteraram de forma dramática a visão científica do universo. Um deles foi a descoberta da sistemática apresentada pelos desvios espectrais da radiação emitida pelas galáxias, realizada por Edwin Hubble. O outro foi a descoberta de novas soluções das equações de campo de Einstein, por Friedmann (a Eq. (1) utilizada na seção 2), que resultavam em modelos dinâmicos. O universo poderia estar em expansão ou em contração, e a primeira possibilidade era consistente com as observações de Hubble. Não havia mais a necessidade de um modelo estático.

É já bastante conhecida a reação de Einstein a estes acontecimentos. O físico teórico norte-americano John Archibald Wheeler (1911-2008) relata que, certa vez, ainda jovem, acompanhava Einstein e George Gamow (1904-1968), no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, quando ouviu Einstein confidenciar a Gamow que a constante cosmológica havia sido "a maior mancada de minha vida" (cf. [11, p. G-11]).

Obviamente, Einstein não era tolo, e a inclusão de Λ nas suas equações de campo, definitivamente, não foi uma tolice. Aumentou de maneira substancial a aplicabilidade da TRG, sem causar perturbações do ponto de vista formal, como mencionado na seção 2.

Na verdade - e isto provavelmente Einstein não quis reconhecer -, a sua grande mancada foi propor um modelo que era claramente instável. O fato dele não ter percebido isto é que nos causa uma grande surpresa. Como vimos, na seção 3, uma simples analogia newtoniana evidencia esta gravíssima falha.

Agradecimento

Agradeço aos árbitros pela leitura cuidadosa e pelas sugestões, as quais certamente contribuíram para melhor compreensão do texto.

Referências

[1] R.E. de Souza, *Introdução à Cosmologia* (EDUSP, São Paulo, 2004).

[2] B.W. Carroll and D.A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics* (Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, 1996).

[3] E. Harrison, *Cosmology – The Science of the Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[4] I. Waga, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 157 (2005).

[5] D. Soares, *O Efeito Hubble* (2009), disponível em `http://www.fisica.ufmg.br/~dsoares/ensino/efhub.pdf`.

[6] A. Pais, *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein* (Oxford University Press, Oxford, 1982).

[7] A.S. Eddington, MNRAS **90**, 668 (1930).

[8] A. Viglioni e D. Soares, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 4702 (2011).

[9] W. Rindler, *Relativity – Special, General, and Cosmological* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).

[10] W.L. Freedman, B.F. Madore, B.K. Gibson, L. Ferrarese, D.D. Kelson, S. Sakai, J.R. Mould, R.C. Kennicutt Jr., H.C. Ford, J.A. Graham, J.P. Huchra, S.M.G. Hughes, G.D. Illingworth, L.M. Macri and P.B. Stetson, ApJ **553**, 47 (2001).

[11] E.F. Taylor and J.A. Wheeler, *Exploring Black Holes, Introduction to General Relativity* (Addison Wesley Longman, San Francisco, 2000).