

Exemplos de configurações centrais planares encaixantes

(Examples of nested planar central configurations)

Antonio Carlos Fernandes¹, Luis Fernando Mello, Malú Maira da Silva

Instituto de Matemática e Computação, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil

Recebido em 27/7/2012; Aceito em 2/2/2013; Publicado em 24/4/2013

Neste artigo estudamos configurações centrais planares encaixantes para o problema de n corpos em mecânica celeste quando $n = 4$, $n = 8$ e $n = 12$. Determinamos condições suficientes para a existência de tais configurações com os corpos nos vértices de quadrados com centros coincidentes e os comprimentos dos lados satisfazendo relações analíticas explícitas. As massas dos corpos nos vértices de cada quadrado devem ser iguais.

Palavras-chave: problema de n corpos, configuração central planar, configuração central encaixante.

In this paper we study nested planar central configurations for the n -body problem when $n = 4$, $n = 8$ and $n = 12$. We show the existence of such configurations with the bodies at the vertices of squares with common centers. The masses of the bodies are equal at the vertices of each square.

Keywords: n -body problem, planar central configuration, nested central configuration.

1. Introdução

O clássico problema Newtoniano de n corpos em mecânica celeste consiste no estudo da dinâmica de n corpos de massas positivas m_i ocupando posições $r_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \dots, n$, interagindo de acordo com Lei da Gravitação Universal proposta por Newton [1]. Usualmente $d = 2$ ou $d = 3$.

Uma configuração do sistema é definida como sendo $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{nd}$. O centro de massa do sistema, dado por $\sum_{j=1}^n m_j r_j / M$, onde $M = m_1 + \dots + m_n$ é a massa total, será considerado na origem de nosso referencial inercial, o qual é usualmente chamado *referencial inercial baricêntrico*.

As equações diferenciais que regem o problema de n corpos são dadas por

$$\ddot{r}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j), \quad (1)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, onde $r_{ij} = |r_i - r_j|$ é a distância Euclidiana entre os corpos localizados em r_i e r_j . Na Eq. (1) estamos adotando um referencial em relação ao qual a constante de gravitação universal tem 1 unidade e as derivadas são tomadas com relação à variável independente t , denominada tempo. Observe que as equações em (1) estão definidas apenas quando $r_{ij} \neq 0$. Assim, daqui em diante, nosso espaço de configurações

será tomado como sendo $\mathbb{R}^{nd} - \Delta$, sendo Δ o conjunto das colisões, onde $r_{ij} = 0$ para algum par i, j com $i \neq j$.

Dizemos que os n corpos formam uma *configuração central* se o vetor aceleração de cada corpo é proporcional ao seu vetor posição relativo ao centro de massa do sistema, ou seja, se existir $\lambda < 0$ tal que

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i, \quad (2)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Pode-se mostrar [2] que neste caso

$$\lambda = -\frac{U}{I}, \quad U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad I = \sum_{i=1}^n m_i |r_i|^2,$$

sendo U a função potencial de Newton e I o momento de inércia dos n corpos. Assim, numa configuração central, o vetor aceleração de todo corpo aponta para a origem do referencial com magnitude proporcional à sua distância da origem. Deste modo, se os corpos numa configuração central tiverem velocidades iniciais nulas, os mesmos se moverão em direção à origem de modo que a configuração tenderá a um colapso homotético.

As configurações centrais permitem obter as únicas soluções explícitas do problema de n corpos conhecidas até hoje, que são as chamadas *soluções homográficas*, para as quais as razões das distâncias mútuas entre os corpos permanecem constantes. Para o caso onde os corpos estão num mesmo plano ($d = 2$) as configurações centrais são chamadas de equilíbrios relativos. Vale observar que uma configuração central planar dá origem

¹E-mail: acfernandes@unifei.edu.br.

a uma família de órbitas na qual cada corpo descreve uma cônica com um foco no centro de massa.

Das Eqs. (1) e (2), as equações que regem o problema de n corpos numa configuração central são dadas por

$$\lambda r_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j), \quad (3)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplos clássicos de configurações centrais podem ser obtidos das soluções colineares encontradas por Euler [3] para o problema de três corpos, bem como das soluções triangulares equiláteras encontradas por Lagrange [4] para o problema de três corpos, para cada instante de tempo. Os livros de Wintner [5] e Hagiwara [6] e o artigo de Moeckel [2] fornecem um estudo abrangente das configurações centrais.

A importância dada ao estudo das configurações centrais pode ser expressa pelo sexto problema da lista proposta por Smale [7] como desafios matemáticos para o século *XXI*. Smale coloca uma questão levantada por Wintner para as configurações centrais planares: para um dado conjunto de n corpos com massas positivas, o número de configurações centrais planares não equivalentes (módulo rotações, translações e dilatações) é finito?

Para três corpos há somente cinco classes de equivalência de configurações centrais, sendo três de Euler e duas de Lagrange. Hampton e Moeckel em [8] responderam afirmativamente a questão acima para quatro corpos, mostrando que o número de configurações centrais planares não equivalentes está entre 32 e 8472. Recentemente, Albouy e Kaloshin em [9] mostraram a finitude para cinco corpos para quase todos os valores de massas positivas. A questão acima ainda está em aberto para $n > 5$.

Pouco se sabe a respeito das configurações centrais para n arbitrário. Para o caso colinear, Moulton [10] mostrou que existem $n!/2$ possíveis configurações centrais, uma para cada ordenação dos corpos, para qualquer escolha de massas positivas.

Neste artigo estudamos uma interessante família de configurações centrais, chamada configurações centrais *encaixantes*. Na Seção 2. estudamos uma configuração central planar para o problema de quatro corpos, mostrando a existência de uma tal configuração para o caso em que os quatro corpos tem massas iguais e estão localizados nos vértices de um quadrado. Na Seção 3. mostramos a existência de uma configuração central para o problema de oito corpos, estando quatro corpos de massas iguais localizados nos vértices de um quadrado e os outros quatro corpos também de massas iguais localizados nos vértices de outro quadrado. Os dois quadrados tem centros coincidentes. Por fim, na Seção 4., mostramos a existência de uma configuração central para o problema de doze corpos os quais estão distribuídos sobre os vértices de três quadrados encaixantes com cen-

tros coincidentes. Sobre os vértices de cada um dos quadrados os corpos possuem massas iguais.

Configurações centrais encaixantes para o problema de seis corpos e para o problema de nove corpos foram estudadas por Mello e Fernandes em [11] e por Llibre e Mello em [12], respectivamente. Em 2009, Corbera, Delgado e Llibre em [13] apresentaram argumentos para a existência de $p \geq 2$ n -ágonos, $n \geq 3$, encaixantes para o problema de pn corpos. Cabe destacar que nos vértices de cada n -ágono os corpos possuem massas iguais. Neste sentido, o que estudamos aqui, explicitamente, são os casos $n = 4$ e $p = 1, 2, 3$.

2. Problema de quatro corpos

As Eqs. (3) formam um conjunto de $2n$ equações para o caso de configurações planares. Alternativamente, vamos trabalhar aqui com um sistema equivalente de $n(n-1)/2$ equações, conhecido por *equações de Laura-Andoyer-Dziobek* (veja, por exemplo as Refs. [6, p. 241] ou [14])

$$f_{i,j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^n m_k (R_{i,k} - R_{j,k}) \Delta_{i,j,k} = 0, \quad (4)$$

para $1 \leq i < j \leq n$, onde $R_{i,j} = 1/r_{ij}^3$, $\Delta_{i,j,k} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$. Observe que em (4), $\Delta_{i,j,k}$ é o dobro da área orientada do triângulo com vértices em r_i , r_j e r_k , nesta ordem. Assim, $\Delta_{i,j,k} = \Delta_{k,i,j}$ e $\Delta_{i,j,k} = -\Delta_{i,k,j}$, para todo i, j, k . É claro que $R_{i,j} = R_{j,i}$, para todo i, j .

Demonstraremos a seguir o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Quatro corpos de massas iguais nos vértices de um quadrado constitui uma configuração central.*

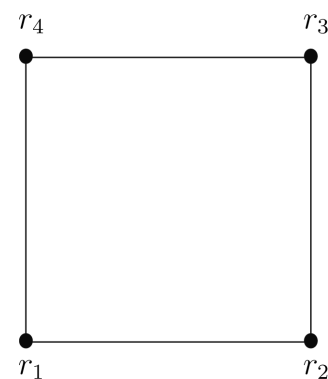


Figura 1 - Quatro corpos sobre os vértices de um quadrado.

Demonstração. Precisamos mostrar que as seis equações de Laura-Andoyer-Dziobek (4) são satisfeitas. Considere a Fig. 1. É simples verificar que as equações $f_{1,3} = 0$ e $f_{2,4} = 0$ são trivialmente satisfeitas. Por outro lado, as equações $f_{1,2} = 0$, $f_{1,4} = 0$, $f_{2,3} = 0$

e $f_{3,4} = 0$ são equivalentes às seguintes equações, respectivamente

$$\begin{aligned}(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3}(m_3 - m_4) &= 0, \\ (R_{1,2} - R_{1,3})\Delta_{1,3,2}(m_2 - m_3) &= 0, \\ (R_{1,2} - R_{1,3})\Delta_{1,2,3}(m_1 - m_4) &= 0, \\ (R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3}(m_1 - m_2) &= 0.\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, as equações acima são satisfeitas e o teorema está demonstrado. \square

3. Problema de oito corpos

Considere quatro corpos de massas positivas m_1, m_2, m_3 e m_4 nos vértices um quadrado de lado 1. No interior desse quadrado há um outro de lado b , cujo centro coincide com o do primeiro, nos vértices do qual encontram-se quatro corpos de massas positivas m_5, m_6, m_7 e m_8 . Veja Fig. 2.

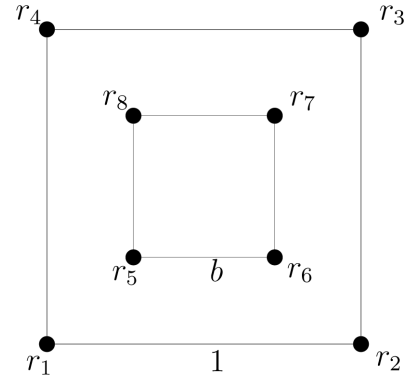


Figura 2 - Oito corpos sobre os vértices de dois quadrados encaixantes.

Devemos obter posições e valores positivos para as massas dos oito corpos de modo que satisfaçam as 28 equações de (4). Devido às simetrias presentes no problema em estudo, verifica-se que as igualdades do Apêndice 1 são satisfeitas.

Obtém-se imediatamente que as equações de $f_{1,3} = 0, f_{2,4} = 0, f_{5,7} = 0$ e $f_{6,8} = 0$ são trivialmente satisfeitas. As equações $f_{2,6} = 0$ e $f_{4,8} = 0$ são equivalentes, o mesmo ocorrendo com as equações $f_{4,6} = 0$ e $f_{2,8} = 0, f_{1,5} = 0$ e $f_{3,7} = 0, f_{1,7} = 0$ e $f_{3,5} = 0$, as quais podem ser escritas, respectivamente, das seguintes formas

$$\begin{aligned}(m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,5,6} &= 0, \\ (m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,7,6} &= 0, \\ (m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,5,6} &= 0, \\ (m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,7,6} &= 0.\end{aligned}$$

Usando as simetrias, as oito equações $f_{1,2} = 0, f_{1,4} = 0, f_{2,3} = 0, f_{3,4} = 0, f_{5,6} = 0, f_{5,8} = 0, f_{6,7} = 0$ e $f_{7,8} = 0$ assumem, respectivamente, as formas

$$\begin{aligned}(m_3 - m_4)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_6 - m_5)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_8 - m_7)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\ (m_2 - m_3)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_5 - m_8)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_7 - m_6)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\ (m_4 - m_1)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_7 - m_6)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_5 - m_8)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\ (m_1 - m_2)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_8 - m_7)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_6 - m_5)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\ (m_1 - m_2)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_3 - m_4)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_7 - m_8)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0, \\ (m_4 - m_1)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_2 - m_3)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_6 - m_7)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0, \\ (m_2 - m_3)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_4 - m_1)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_8 - m_5)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0, \\ (m_3 - m_4)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_1 - m_2)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_5 - m_6)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0.\end{aligned}$$

É fácil ver que se $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ e $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$, as dezesseis equações acima são satisfeitas e as oito equações restantes $f_{1,6} = 0, f_{2,5} = 0, f_{2,7} = 0, f_{1,8} = 0, f_{3,6} = 0, f_{3,8} = 0, f_{4,5} = 0$ e $f_{4,7} = 0$ (considerando as simetrias do problema) reduzem-se à seguinte equação

$$M[(R_{1,2} - R_{1,5})\Delta_{1,5,2} + (R_{1,3} - R_{1,6})\Delta_{1,6,3} + (R_{1,7} - R_{1,2})\Delta_{1,7,2}] + m[(R_{6,7} - R_{1,5})\Delta_{1,5,6} + (R_{1,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,3} + (R_{1,6} - R_{5,7})\Delta_{1,6,8}] = 0. \quad (5)$$

Temos, assim, o seguinte teorema.

Teorema 3..1. *Para cada b satisfazendo*

$$0 < b < 0,53177\dots$$

existem massas positivas $M = M_b$ e $m = m_b$, tais que se $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ e $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$, então os oito corpos estão numa configuração central encaixante conforme a Fig. 2.

Demonstração. Denote por r o raio da circunferência circunscrita ao quadrado de lado b da Fig. 2. Vamos mostrar que, para cada r satisfazendo

$$0 < r < 0,37602\dots, \tag{6}$$

existem massas positivas M e m , tais que se $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ e $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$, então os oito corpos estão numa configuração central encaixante conforme a Fig. 2. Isto implicará na demonstração do teorema, visto que $b = \sqrt{2}r$. Denotemos por $A(r)$ o coeficiente de M e por $B(r)$ o coeficiente de m na Eq. (5), ou seja,

$$A(r) = (R_{1,2} - R_{1,5})\Delta_{1,5,2} + (R_{1,3} - R_{1,6})\Delta_{1,6,3} + (R_{1,7} - R_{1,2})\Delta_{1,7,2},$$

$$B(r) = (R_{6,7} - R_{1,5})\Delta_{1,5,6} + (R_{1,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,3} + (R_{1,6} - R_{5,7})\Delta_{1,6,8}.$$

Devemos obter os valores de r para os quais $A(r)$ e $B(r)$ possuem sinais opostos, pois assim a razão M/m será positiva. Consideremos um sistema de coordenadas no qual $r_1 = (0,0)$, $r_2 = (1,0)$, $r_3 = (1,1)$ e $r_4 = (0,1)$. Podemos obter as coordenadas dos outros corpos em função de r :

$$\begin{aligned} r_5 &= \left(\frac{1 - \sqrt{2}r}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}r}{2} \right), \\ r_6 &= \left(\frac{1 + \sqrt{2}r}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}r}{2} \right), \\ r_7 &= \left(\frac{1 + \sqrt{2}r}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}r}{2} \right), \\ r_8 &= \left(\frac{1 - \sqrt{2}r}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}r}{2} \right). \end{aligned}$$

A partir das posições dos corpos, podemos encontrar as distâncias e as áreas orientadas que aparecem em $A(r)$ e $B(r)$. Estudando as funções $A(r)$ e $B(r)$, podemos verificar que $A(r)$ é crescente e positiva, enquanto que $B(r)$ é crescente e troca de sinal. Veja as Figs. 3 e 4. Assim, para r em (6) temos $A(r) > 0$ e $B(r) < 0$. \square

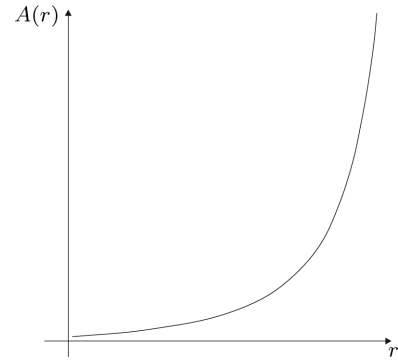


Figura 3 - Gráfico de $A(r)$.

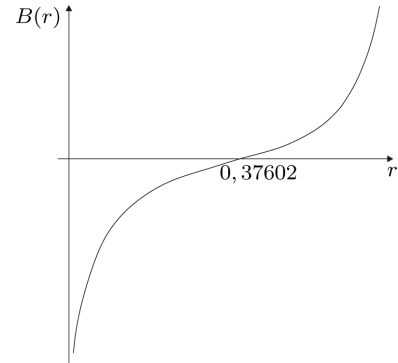


Figura 4 - Gráfico de $B(r)$.

4. Problema de doze corpos

Considere três quadrados de centros coincidentes. Admita que um quadrado possua lado 1 e que sobre seus vértices se encontrem corpos com massas positivas m_1, m_2, m_3 e m_4 . Do mesmo modo, admita que os outros dois quadrados tenham lados x e y com $0 < y < x < 1$ e corpos com massas positivas m_5, m_6, m_7, m_8 e $m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}$, respectivamente, conforme Fig. 5.

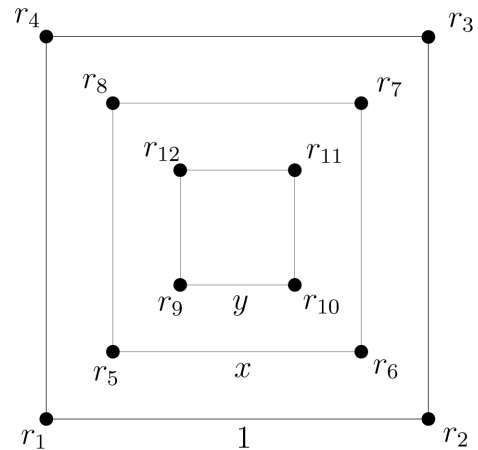


Figura 5 - Doze corpos sobre os vértices de três quadrados encaixantes.

Nosso objetivo é encontrar posições e massas positivas que satisfaçam as 66 Eqs. (4), as quais podem ser trabalhadas considerando as simetrias que o problema apresenta. Veja Apêndice 2.

As equações $f_{1,3} = 0$, $f_{2,4} = 0$, $f_{5,7} = 0$, $f_{6,8} = 0$, $f_{9,11} = 0$ e $f_{10,12} = 0$ são trivialmente satisfeitas. Podemos observar também que $f_{1,5} = 0$ é equivalente a $f_{3,7} = 0$, do mesmo modo $f_{2,6} = 0$ e $f_{4,8} = 0$, $f_{2,8} = 0$ e $f_{4,6} = 0$, $f_{1,7} = 0$ e $f_{1,5} = 0$, $f_{1,9} = 0$ e $f_{3,11} = 0$, $f_{2,10} = 0$ e $f_{4,12} = 0$, $f_{1,11} = 0$ e $f_{3,9} = 0$, $f_{2,12} = 0$ e $f_{4,10} = 0$, $f_{5,9} = 0$ e $f_{7,11} = 0$, $f_{6,10} = 0$ e $f_{8,12} = 0$, $f_{5,11} = 0$ e $f_{7,9} = 0$, $f_{6,12} = 0$ e $f_{8,10} = 0$ também o são. Essas equações podem ser escritas das seguintes formas, respectivamente

$$\begin{aligned}
(m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,5,6} + (m_{10} - m_{12})(R_{2,9} - R_{6,9})\Delta_{1,5,10} &= 0, \\
(m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,5,6} + (m_9 - m_{11})(R_{2,9} - R_{6,9})\Delta_{1,5,10} &= 0, \\
(m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,7,6} + (m_9 - m_{11})(R_{2,9} - R_{6,9})\Delta_{2,9,8} &= 0, \\
(m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,7,6} + (m_{10} - m_{12})(R_{2,9} - R_{6,9})\Delta_{2,9,8} &= 0, \\
(m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{2,9})\Delta_{1,9,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{6,9})\Delta_{1,9,6} + (m_{10} - m_{12})(R_{2,9} - R_{9,10})\Delta_{1,9,10} &= 0, \\
(m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{2,9})\Delta_{1,9,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{6,9})\Delta_{1,9,6} + (m_9 - m_{11})(R_{2,9} - R_{9,10})\Delta_{1,9,10} &= 0, \\
(m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{2,9})\Delta_{1,11,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{6,9})\Delta_{1,11,6} + (m_{10} - m_{12})(R_{2,9} - R_{9,10})\Delta_{1,11,10} &= 0, \\
(m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{2,9})\Delta_{1,11,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{6,9})\Delta_{1,11,6} + (m_9 - m_{11})(R_{2,9} - R_{9,10})\Delta_{1,11,10} &= 0, \\
(m_2 - m_4)(R_{1,6} - R_{2,9})\Delta_{5,9,2} + (m_6 - m_8)(R_{5,6} - R_{6,9})\Delta_{5,9,6} + (m_{10} - m_{12})(R_{6,9} - R_{9,10})\Delta_{5,9,10} &= 0, \\
(m_1 - m_3)(R_{1,6} - R_{2,9})\Delta_{5,9,2} + (m_5 - m_7)(R_{5,6} - R_{6,9})\Delta_{5,9,6} + (m_9 - m_{11})(R_{6,9} - R_{9,10})\Delta_{5,9,10} &= 0, \\
(m_2 - m_4)(R_{1,6} - R_{2,9})\Delta_{5,11,2} + (m_6 - m_8)(R_{5,6} - R_{6,9})\Delta_{5,11,6} + (m_{10} - m_{12})(R_{6,9} - R_{9,10})\Delta_{5,11,10} &= 0, \\
(m_1 - m_3)(R_{1,6} - R_{2,9})\Delta_{5,11,2} + (m_5 - m_7)(R_{5,6} - R_{6,9})\Delta_{5,11,6} + (m_9 - m_{11})(R_{6,9} - R_{9,10})\Delta_{5,11,10} &= 0.
\end{aligned}$$

As equações $f_{1,2} = 0$, $f_{2,3} = 0$, $f_{3,4} = 0$, $f_{1,4} = 0$, $f_{5,6} = 0$, $f_{6,7} = 0$, $f_{7,8} = 0$, $f_{5,8} = 0$, $f_{9,10} = 0$, $f_{10,11} = 0$, $f_{11,12} = 0$ e $f_{9,12} = 0$ também podem ser simplificadas e resultam, respectivamente, em

$$\begin{aligned}
(m_3 - m_4)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_6 - m_5)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_8 - m_7)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_{10} - m_9)(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,2} + (m_{12} - m_{11})(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,2} &= 0, \\
(m_4 - m_1)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_7 - m_6)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_5 - m_8)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_{11} - m_{10})(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,2} + (m_9 - m_{12})(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,2} &= 0, \\
(m_1 - m_2)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_8 - m_7)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_6 - m_5)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_{12} - m_{11})(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,2} + (m_{10} - m_9)(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,2} &= 0, \\
(m_2 - m_3)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_5 - m_8)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_7 - m_6)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_9 - m_{12})(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,2} + (m_{11} - m_{10})(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,2} &= 0, \\
(m_1 - m_2)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_4 - m_3)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,6} + (m_7 - m_8)(R_{5,7} - R_{5,6})\Delta_{5,6,7} + (m_9 - m_{10})(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,6,9} + (m_{12} - m_{11})(R_{5,11} - R_{6,9})\Delta_{5,11,6} &= 0, \\
(m_2 - m_3)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_1 - m_4)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,6} + (m_8 - m_5)(R_{5,7} - R_{5,6})\Delta_{5,6,7} + (m_{10} - m_{11})(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,6,9} + (m_9 - m_{12})(R_{5,11} - R_{6,9})\Delta_{5,11,6} &= 0, \\
(m_3 - m_4)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_2 - m_1)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,6} + (m_5 - m_6)(R_{5,7} - R_{5,6})\Delta_{5,6,7} + (m_{11} - m_{12})(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,6,9} + (m_{10} - m_9)(R_{5,11} - R_{6,9})\Delta_{5,11,6} &= 0, \\
(m_4 - m_1)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_3 - m_2)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,6} + (m_6 - m_7)(R_{5,7} - R_{5,6})\Delta_{5,6,7} + (m_{12} - m_9)(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,6,9} + (m_{11} - m_{10})(R_{5,11} - R_{6,9})\Delta_{5,11,6} &= 0, \\
(m_1 - m_2)(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,10} + (m_4 - m_3)(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,10} + (m_5 - m_6)(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,9,10} + (m_8 - m_7)(R_{5,11} - R_{6,9})\Delta_{5,11,10} + (m_{11} - m_{12})(R_{9,11} - R_{9,10})\Delta_{9,10,11} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(m_2 - m_3)(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,10} + (m_1 - m_4)(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,10} + (m_6 - m_7)(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,9,10} + (m_5 - m_8)(R_{5,11} - R_{6,9}) \\
\Delta_{5,11,10} + (m_{12} - m_9)(R_{9,11} - R_{9,10})\Delta_{9,10,11} = 0, \\
(m_3 - m_4)(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,10} + (m_2 - m_1)(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,10} + (m_7 - m_8)(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,9,10} + (m_6 - m_5)(R_{5,11} - R_{6,9}) \\
\Delta_{5,11,10} + (m_9 - m_{10})(R_{9,11} - R_{9,10})\Delta_{9,10,11} = 0, \\
(m_4 - m_1)(R_{1,9} - R_{2,9})\Delta_{1,9,10} + (m_3 - m_2)(R_{1,11} - R_{2,9})\Delta_{1,11,10} + (m_8 - m_5)(R_{5,9} - R_{6,9})\Delta_{5,9,10} + (m_7 - m_6)(R_{5,11} - R_{6,9}) \\
\Delta_{5,11,10} + (m_{10} - m_{11})(R_{9,11} - R_{9,10})\Delta_{9,10,11} = 0.
\end{aligned}$$

Se supusermos que $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$ e $\mu = m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12}$ todas as equações anteriores são satisfeitas e as 24 equações restantes se reduzem a

$$\begin{aligned}
A_1(x, y)M + A_2(x, y)m + A_3(x, y)\mu &= 0, \\
B_1(x, y)M + B_2(x, y)m + B_3(x, y)\mu &= 0, \\
C_1(x, y)M + C_2(x, y)m + C_3(x, y)\mu &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_1(x, y) &= (R_{1,2} - R_{2,6})\Delta_{1,6,2} + (R_{1,3} - R_{3,6})\Delta_{1,6,3} + (R_{1,4} - R_{4,6})\Delta_{1,6,4}, \\
A_2(x, y) &= (R_{1,5} - R_{5,6})\Delta_{1,6,5} + (R_{1,7} - R_{6,7})\Delta_{1,6,7} + (R_{1,8} - R_{6,8})\Delta_{1,6,8}, \\
A_3(x, y) &= (R_{1,9} - R_{6,9})\Delta_{1,6,9} + (R_{1,10} - R_{6,10})\Delta_{1,6,10} + (R_{1,11} - R_{6,11})\Delta_{1,6,11} + (R_{1,12} - R_{6,12})\Delta_{1,6,12}, \\
B_1(x, y) &= (R_{1,2} - R_{2,10})\Delta_{1,10,2} + (R_{1,3} - R_{3,10})\Delta_{1,10,3} + (R_{1,4} - R_{4,10})\Delta_{1,10,4}, \\
B_2(x, y) &= (R_{1,5} - R_{5,10})\Delta_{1,10,5} + (R_{1,6} - R_{6,10})\Delta_{1,10,6} + (R_{1,7} - R_{7,10})\Delta_{1,10,7} + (R_{1,8} - R_{8,10})\Delta_{1,10,8}, \\
B_3(x, y) &= (R_{1,9} - R_{9,10})\Delta_{1,10,9} + (R_{1,11} - R_{10,11})\Delta_{1,10,11} + (R_{1,12} - R_{10,12})\Delta_{1,10,12}, \\
C_1(x, y) &= (R_{1,5} - R_{1,10})\Delta_{5,10,1} + (R_{2,5} - R_{2,10})\Delta_{5,10,2} + (R_{3,5} - R_{3,10})\Delta_{5,10,3} + (R_{4,5} - R_{4,10})\Delta_{5,10,4}, \\
C_2(x, y) &= (R_{5,6} - R_{6,10})\Delta_{5,10,6} + (R_{5,7} - R_{7,10})\Delta_{5,10,7} + (R_{5,8} - R_{8,10})\Delta_{5,10,8}, \\
C_3(x, y) &= (R_{5,9} - R_{9,10})\Delta_{5,10,9} + (R_{5,11} - R_{10,11})\Delta_{5,10,11} + (R_{5,12} - R_{10,12})\Delta_{5,10,12}.
\end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(x, y) &= (A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{B}(x, y) = (B_1, B_2, B_3), \quad \mathbf{C}(x, y) = (C_1, C_2, C_3), \\
(T_1, T_2, T_3) &= \mathbf{A}(x, y) \times \mathbf{B}(x, y) = (A_2B_3 - A_3B_2, A_3B_1 - A_1B_3, A_1B_2 - A_2B_1).
\end{aligned}$$

Tomando um sistema de coordenadas onde $r_1 = (0, 0)$, $r_2 = (1, 0)$, $r_3 = (1, 1)$, $r_4 = (0, 1)$, temos

$$\begin{aligned}
r_5(x, y) &= \left(\frac{1-x}{2}, \frac{1-x}{2} \right), & r_6(x, y) &= \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2} \right), \\
r_7(x, y) &= \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+x}{2} \right), & r_8(x, y) &= \left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2} \right), \\
r_9(x, y) &= \left(\frac{1-y}{2}, \frac{1-y}{2} \right), & r_{10}(x, y) &= \left(\frac{1+y}{2}, \frac{1-y}{2} \right), \\
r_{11}(x, y) &= \left(\frac{1+y}{2}, \frac{1+y}{2} \right), & r_{12}(x, y) &= \left(\frac{1-y}{2}, \frac{1+y}{2} \right).
\end{aligned}$$

As distâncias e áreas envolvidas podem ser facilmente calculadas. As funções T_1 , T_2 e T_3 assumem as formas

$$T_1(x, y) = T_{11}(x, y) T_{12}(x, y) - 2y T_{13}(x, y) T_{14}(x, y), \tag{8}$$

$$T_2(x, y) = \frac{1}{4} (T_{21}(x, y) T_{22}(x, y) - x T_{23}(x, y) T_{24}(x, y)), \tag{9}$$

$$T_3(x, y) = \frac{y}{4} (T_{31}(x, y) T_{32}(x, y) + \sqrt{2}x T_{33}(x, y) T_{34}(x, y)), \tag{10}$$

onde

$$\begin{aligned}
 T_{11}(x, y) &= \frac{2\sqrt{2}(x^2+1)x}{(x^2-1)^2} + \frac{2\sqrt{2}x}{(x^2+1)^{3/2}} - \frac{4+\sqrt{2}}{4x^2}, \\
 T_{12}(x, y) &= \frac{2\sqrt{2}(y^2+1)y}{(y^2-1)^2} + \frac{2\sqrt{2}y}{(y^2+1)^{3/2}} - \frac{4+\sqrt{2}}{4y^2}, \\
 T_{13}(x, y) &= \frac{4x}{(x^2-y^2)^2} + \frac{2}{(x^2+1)^{3/2}} - \frac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}, \\
 T_{14}(x, y) &= 2x \left(\frac{y^2+1}{(y^2-1)^2} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(y^2+1)^{3/2}} \right) - \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}, \\
 T_{21}(x, y) &= \sqrt{2}y \left(\frac{16\sqrt{2}}{(y^2-1)^2} + \sqrt{2} + 4 - \frac{8\sqrt{2}}{(y^2+1)^{3/2}} \right), \\
 T_{22}(x, y) &= 2x \left(\frac{y^2+1}{(y^2-1)^2} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(y^2+1)^{3/2}} \right) - \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}, \\
 T_{23}(x, y) &= \frac{16\sqrt{2}}{(x^2-1)^2} + \sqrt{2} + 4 - \frac{8\sqrt{2}}{(x^2+1)^{3/2}}, \\
 T_{24}(x, y) &= \frac{2\sqrt{2}(y^2+1)y}{(y^2-1)^2} + \frac{2\sqrt{2}y}{(y^2+1)^{3/2}} - \frac{4+\sqrt{2}}{4y^2}, \\
 T_{31}(x, y) &= -\frac{2\sqrt{2}(x^2+1)x}{(x^2-1)^2} - \frac{2\sqrt{2}x}{(x^2+1)^{3/2}} + \frac{4+\sqrt{2}}{4x^2}, \\
 T_{32}(x, y) &= \frac{16\sqrt{2}}{(y^2-1)^2} + \sqrt{2} + 4 - \frac{8\sqrt{2}}{(y^2+1)^{3/2}}, \\
 T_{33}(x, y) &= \frac{16\sqrt{2}}{(x^2-1)^2} + \sqrt{2} + 4 - \frac{8\sqrt{2}}{(x^2+1)^{3/2}}, \\
 T_{34}(x, y) &= \frac{4x}{(x^2-y^2)^2} + \frac{2}{(x^2+1)^{3/2}} - \frac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}.
 \end{aligned}$$

Teorema 4.1. *Considere $x = 1/2$ e $y = 1/4$. Existem massas positivas M , m e μ , tais que os doze corpos com massas $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$ e $\mu = m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12}$ estão numa configuração central encaixante de acordo com a Fig. 5.*

Demonstração. Substituindo $x = 1/2$ e $y = 1/4$ nas expressões obtidas anteriormente, podemos calcular facilmente as distâncias entre os corpos, bem como as áreas orientadas dos triângulos com vértices nos corpos. Uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções diferentes da trivial no sistema homogêneo (7) é que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Fazendo esse cálculo para o sistema na Eq. (7), com $x = 1/2$ e $y = 1/4$, temos que essa condição é satisfeita. Por fim, para garantir a existência de soluções positivas (massas positivas), devemos tomar o produto vetorial de quaisquer dois vetores dentre \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} e este, por sua vez, deve possuir todas as suas compo-

nentas positivas. Tomando, arbitrariamente, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, devemos ter $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ e $T_3 > 0$. Substituindo $x = 1/2$ e $y = 1/4$ nas Eqs. (8), (9) e (10) obtemos $T_1 = 573,9578$, $T_2 = 55,2356$ e $T_3 = 86,7871$, o que conclui a prova do teorema. \square

Pela continuidade das funções envolvidas na demonstração do Teorema 4.1, é possível obter uma vizinhança V de $(x, y) = (1/2, 1/4)$, tal que, para cada $(x_0, y_0) \in V$ existem massas positivas $M(x_0, y_0) = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, $m(x_0, y_0) = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$ e $\mu(x_0, y_0) = m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12}$, de modo que os doze corpos como ilustrado na Fig. 5 estão numa configuração central encaixante.

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema (7) é sempre nulo para $0 < y < x < 1$. As Figs. 6 e 7 ilustram regiões onde $T_1(x, y) > 0$ e $T_2(x, y) > 0$, respectivamente. Por outro lado, $T_3(x, y) > 0$ para todo $0 < y < x < 1$. Na Fig. 8 está ilustrada a vizinhança V de interesse.

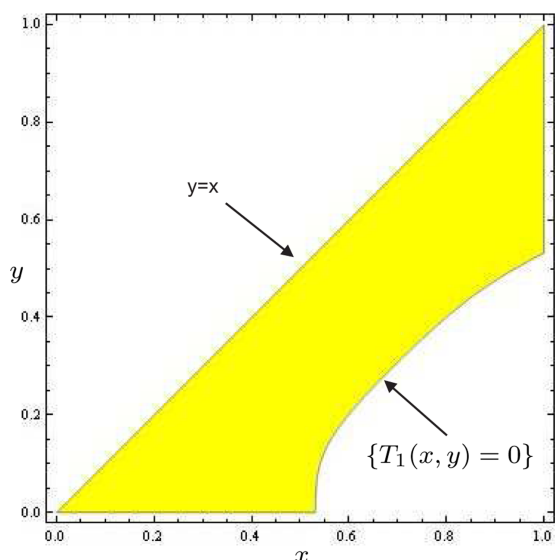


Figura 6 - Conjunto de nível zero da função T_1 , a reta $y = x$ e a região onde $T_1(x, y) > 0$ em amarelo na versão online.

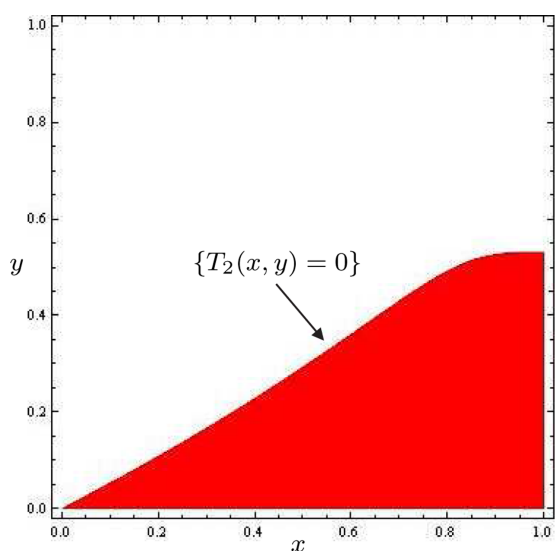


Figura 7 - Conjunto de nível zero da função T_2 e a região onde $T_2(x, y) > 0$ em vermelho.

5. Comentários finais

Neste artigo estudamos configurações centrais planares encaixantes no problema de n corpos em mecânica celeste quando $n = 4$, $n = 8$ e $n = 12$. Condições suficientes para a existência de tais configurações estão

Apêndices

1. Equações do problema de oito corpos

Devido às simetrias presentes no problema de oito corpos estudado aqui, verifica-se que as seguintes igualdades são satisfeitas

$$R_{1,2} = R_{2,3} = R_{3,4} = R_{1,4}, \quad R_{5,6} = R_{6,7} = R_{7,8} = R_{5,8}, \quad R_{1,5} = R_{2,6} = R_{3,7} = R_{4,8},$$

$$R_{1,6} = R_{1,8} = R_{2,5} = R_{2,7} = R_{3,6} = R_{3,8} = R_{4,5} = R_{4,7},$$

sintetizadas nos Teoremas 2.1, 3.1 e 4.1, respectivamente.

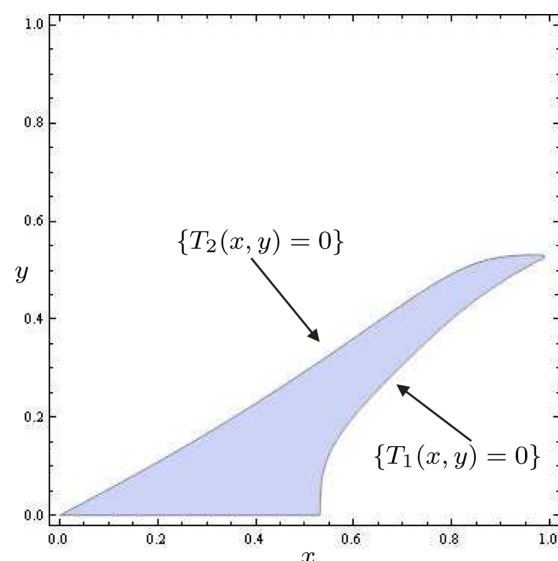


Figura 8 - Região V em cinza na qual $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ e $T_3 > 0$.

Em resumo, na Seção 2. (veja Teorema 2.1) mostramos a existência de uma configuração central planar para o caso em que quatro corpos de massas iguais estão localizados nos vértices de um quadrado. Na Seção 3. (veja Teorema 3.1) mostramos a existência de uma configuração central para o problema de oito corpos, estando quatro corpos de massas iguais localizados nos vértices de um quadrado e os outros quatro corpos também de massas iguais localizados nos vértices de outro quadrado. Os dois quadrados tem centros coincidentes e seus lados tem comprimentos satisfazendo relações analíticas explícitas. Por fim, na Seção 4. (veja Teorema 4.1), mostramos a existência de uma configuração central para o problema de doze corpos os quais estão distribuídos sobre os vértices de três quadrados encaixantes com centros coincidentes. Sobre os vértices de cada um dos quadrados os corpos possuem massas iguais e os lados tem comprimentos também satisfazendo relações analíticas explícitas.

Como observação final, cabe destacar que os estudos das Seções 3. e 4. podem ser adaptados para provar a existência de configurações centrais encaixantes para os casos $p = 2$, $n = 4$ e $p = 3$, $n = 4$ estando os quadrados de lados b e x com uma rotação de ângulo $\pi/4$. Veja as Figs. 2 e 5.

$$\begin{aligned}
R_{1,7} &= R_{2,8} = R_{1,9} = R_{3,5} = R_{4,6}, & R_{1,3} &= R_{2,4}, & R_{5,7} &= R_{6,8}, \\
\Delta_{1,2,3} &= \Delta_{1,2,4} = \Delta_{1,3,4} = \Delta_{2,3,4}, & \Delta_{5,6,7} &= \Delta_{5,6,8} = \Delta_{5,7,8} = \Delta_{6,7,8}, \\
\Delta_{1,2,5} &= \Delta_{1,2,6} = \Delta_{1,5,4} = \Delta_{1,8,4} = \Delta_{2,3,7} = \Delta_{2,3,6} = \Delta_{3,4,7} = \Delta_{3,4,8}, \\
\Delta_{1,2,7} &= \Delta_{1,2,8} = \Delta_{2,3,8} = \Delta_{2,3,5} = \Delta_{3,4,6} = \Delta_{3,4,5} = \Delta_{1,6,4} = \Delta_{1,7,4}, \\
\Delta_{1,6,8} &= \Delta_{2,7,5} = \Delta_{3,8,6} = \Delta_{4,5,7} = \Delta_{1,6,3} = \Delta_{1,3,8} = \Delta_{2,7,4} = \Delta_{2,4,5}, \\
\Delta_{1,6,5} &= \Delta_{2,6,5} = \Delta_{2,7,6} = \Delta_{6,3,7} = \Delta_{3,8,7} = \Delta_{4,8,7} = \Delta_{4,5,8} = \Delta_{1,5,8}, \\
\Delta_{1,6,7} &= \Delta_{1,7,8} = \Delta_{2,7,8} = \Delta_{2,8,5} = \Delta_{5,6,3} = \Delta_{8,5,3} = \Delta_{4,6,7} = \Delta_{4,5,6}, \\
\Delta_{1,3,5} &= \Delta_{1,3,7} = \Delta_{2,4,6} = \Delta_{2,4,8} = \Delta_{5,7,1} = \Delta_{5,7,3} = \Delta_{6,8,2} = \Delta_{6,8,4}.
\end{aligned}$$

2. Equações do problema de doze corpos

Devido às simetrias presentes no problema de doze corpos estudado aqui, verifica-se que as seguintes igualdades são satisfeitas

$$\begin{aligned}
R_{1,2} &= R_{2,3} = R_{3,4} = R_{1,4}, & R_{5,6} &= R_{6,7} = R_{7,8} = R_{5,8}, \\
R_{9,10} &= R_{10,11} = R_{11,12} = R_{9,12}, & R_{5,9} &= R_{6,10} = R_{7,11} = R_{8,12}, \\
R_{1,5} &= R_{2,6} = R_{3,7} = R_{4,8}, & R_{1,9} &= R_{2,10} = R_{3,11} = R_{4,12}, \\
R_{1,3} &= R_{2,4}, & R_{5,7} &= R_{6,8}, & R_{10,12} &= R_{9,11}, & R_{1,11} &= R_{3,9} = R_{2,12} = R_{4,10}, \\
R_{1,7} &= R_{3,5} = R_{2,8} = R_{4,6}, & R_{5,11} &= R_{6,12} = R_{7,9} = R_{8,10}, \\
R_{1,8} &= R_{1,6} = R_{2,5} = R_{2,7} = R_{3,6} = R_{3,8} = R_{4,7} = R_{4,5}, \\
R_{1,10} &= R_{1,12} = R_{2,9} = R_{2,11} = R_{3,10} = R_{3,12} = R_{4,11} = R_{4,9}, \\
R_{5,10} &= R_{5,12} = R_{6,9} = R_{6,11} = R_{7,10} = R_{7,12} = R_{8,11} = R_{8,9}. \\
\Delta_{1,2,3} &= \Delta_{1,2,4} = \Delta_{1,3,4} = \Delta_{2,3,4}, \\
\Delta_{1,2,5} &= \Delta_{1,2,6} = \Delta_{1,5,4} = \Delta_{1,8,4} = \Delta_{2,3,7} = \Delta_{2,3,6} = \Delta_{3,4,7} = \Delta_{3,4,8}, \\
\Delta_{1,2,7} &= \Delta_{1,2,8} = \Delta_{2,3,8} = \Delta_{2,3,5} = \Delta_{3,4,6} = \Delta_{3,4,5} = \Delta_{1,6,4} = \Delta_{1,7,4}, \\
\Delta_{1,6,8} &= \Delta_{2,7,5} = \Delta_{3,8,6} = \Delta_{4,5,7} = \Delta_{1,6,3} = \Delta_{1,3,8} = \Delta_{2,7,4} = \Delta_{2,4,5}, \\
\Delta_{1,6,5} &= \Delta_{2,6,5} = \Delta_{2,7,6} = \Delta_{6,3,7} = \Delta_{3,8,7} = \Delta_{4,8,7} = \Delta_{4,5,8} = \Delta_{1,5,8}, \\
\Delta_{1,6,7} &= \Delta_{1,7,8} = \Delta_{2,7,8} = \Delta_{2,8,5} = \Delta_{5,6,3} = \Delta_{8,5,3} = \Delta_{4,6,7} = \Delta_{4,5,6}, \\
\Delta_{1,10,5} &= \Delta_{1,5,12} = \Delta_{2,6,9} = \Delta_{2,11,6} = \Delta_{3,12,7} = \Delta_{3,7,10} = \Delta_{4,8,11} = \Delta_{4,9,8}, \\
\Delta_{1,6,9} &= \Delta_{1,9,8} = \Delta_{2,10,5} = \Delta_{2,7,10} = \Delta_{3,11,6} = \Delta_{3,8,11} = \Delta_{4,12,7} = \Delta_{4,5,12}, \\
\Delta_{1,6,10} &= \Delta_{1,12,8} = \Delta_{2,7,11} = \Delta_{2,9,5} = \Delta_{3,10,6} = \Delta_{3,8,12} = \Delta_{4,11,7} = \Delta_{4,5,9}, \\
\Delta_{1,10,7} &= \Delta_{1,7,12} = \Delta_{2,11,8} = \Delta_{2,8,9} = \Delta_{3,5,10} = \Delta_{3,12,5} = \Delta_{4,6,11} = \Delta_{4,9,6}, \\
\Delta_{1,6,11} &= \Delta_{1,11,8} = \Delta_{2,7,12} = \Delta_{2,12,5} = \Delta_{3,9,6} = \Delta_{3,8,9} = \Delta_{4,10,7} = \Delta_{4,5,10}, \\
\Delta_{2,11,5} &= \Delta_{2,7,9} = \Delta_{1,6,12} = \Delta_{1,10,8} = \Delta_{3,12,6} = \Delta_{3,8,10} = \Delta_{4,9,7} = \Delta_{4,5,11}, \\
\Delta_{5,6,7} &= \Delta_{5,6,8} = \Delta_{5,7,8} = \Delta_{6,7,8}, & \Delta_{9,10,11} &= \Delta_{9,10,12} = \Delta_{9,11,12} = \Delta_{10,11,12}, \\
\Delta_{1,2,9} &= \Delta_{1,2,10} = \Delta_{1,9,4} = \Delta_{1,12,4} = \Delta_{2,3,11} = \Delta_{2,3,10} = \Delta_{3,4,11} = \Delta_{3,4,12}, \\
\Delta_{5,6,9} &= \Delta_{5,6,10} = \Delta_{5,9,8} = \Delta_{5,12,8} = \Delta_{6,7,11} = \Delta_{6,7,10} = \Delta_{7,8,11} = \Delta_{7,8,12}, \\
\Delta_{1,2,11} &= \Delta_{1,2,12} = \Delta_{2,3,12} = \Delta_{2,3,9} = \Delta_{3,4,10} = \Delta_{3,4,9} = \Delta_{1,10,4} = \Delta_{1,11,4}, \\
\Delta_{5,6,11} &= \Delta_{5,6,12} = \Delta_{6,7,12} = \Delta_{6,7,9} = \Delta_{7,8,10} = \Delta_{7,8,9} = \Delta_{5,10,8} = \Delta_{5,11,8}, \\
\Delta_{1,10,12} &= \Delta_{2,11,9} = \Delta_{3,12,10} = \Delta_{4,9,11} = \Delta_{1,10,3} = \Delta_{1,3,12} = \Delta_{2,11,4} = \Delta_{2,4,9}, \\
\Delta_{5,10,12} &= \Delta_{6,11,9} = \Delta_{7,12,10} = \Delta_{8,9,11} = \Delta_{5,10,7} = \Delta_{5,7,12} = \Delta_{6,11,8} = \Delta_{6,8,9}, \\
\Delta_{1,10,9} &= \Delta_{2,10,9} = \Delta_{2,11,10} = \Delta_{10,3,11} = \Delta_{3,12,11} = \Delta_{4,12,11} = \Delta_{4,9,12} = \Delta_{1,9,12}, \\
\Delta_{5,10,9} &= \Delta_{6,10,9} = \Delta_{6,11,10} = \Delta_{10,7,11} = \Delta_{7,12,11} = \Delta_{8,12,11} = \Delta_{8,9,12} = \Delta_{5,9,12}, \\
\Delta_{1,10,11} &= \Delta_{1,11,12} = \Delta_{2,11,12} = \Delta_{2,12,9} = \Delta_{9,10,3} = \Delta_{12,9,3} = \Delta_{4,10,11} = \Delta_{4,9,10}, \\
\Delta_{5,10,11} &= \Delta_{5,11,12} = \Delta_{6,11,12} = \Delta_{6,12,9} = \Delta_{9,10,7} = \Delta_{12,9,7} = \Delta_{8,10,11} = \Delta_{8,9,10}.
\end{aligned}$$

Agradecimentos

Os dois primeiros autores são parcialmente apoiados pela FAPEMIG, processo número APQ00015/12. O segundo autor tem auxílios do CNPq, processo 304926/2009-4, e da FAPEMIG, processo PPM-00204-11. O terceiro autor teve auxílios da CAPES e FAPEMIG.

Referências

- [1] I. Newton, *Philosophi Naturalis Principia Mathematica* (Royal Society, London, 1687).
- [2] R. Moeckel, *Math. Z.* **205**, 499 (1990).
- [3] L. Euler, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* **11**, 144 (1767).
- [4] J.L. Lagrange, *Essai Sur le Problème de Trois Corps*, Oeuvres v. 6, (Gauthier-Villars, Paris, 1873).
- [5] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* (Princeton University Press, 1941).
- [6] Y. Hagihara, *Celestial Mechanics* (MIT Press, Massachusetts, 1970), v. 1.
- [7] S. Smale, *Math. Intelligencer* **20**, 7 (1998).
- [8] M. Hampton and R. Moeckel, *Invent. Math.* **163**, 289 (2006).
- [9] A. Albouy and V. Kaloshin, *Ann. of Math.* **176**, 535 (2012).
- [10] F.R. Moulton, *Ann. of Math.* **12**, 1 (1910).
- [11] L.F. Mello e A.C. Fernandes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 385 (2007).
- [12] J. Llibre and L.F. Mello, *Physica D* **238**, 563 (2009).
- [13] M. Corbera, J. Delgado and J. Llibre, *Qual. Theory Dyn. Syst.* **8**, 255 (2009).
- [14] L.F. Mello, F.E. Chaves e A.C. Fernandes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 13021 (2009).