*Revista Brasileira de Ensino de Física,* v. 35, n. 3, 3604 (2013)
www.sbfisica.org.br

# Função de Wigner-80 anos e as origens da geometria não-comutativa

*(Wigner function at 80 years and the origins of noncommutative geometry)*

R.G.G. Amorim[1], M.C.B. Fernandes[2], A.R. Queiroz[2], A.E. Santana[2,*], J.D.M. Viana[2,3]

[1] *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Campus de Luziânia, Luziânia, GO, Brasil*
[2] *Centro Internacional de Física da Matéria Condensada, Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil*
[3] *Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Campus de Ondina, Salvador, BA, Brasil*
Recebido em 30/11/2012; Aceito em 11/01/2013; Publicado em 26/9/2013

O conceito de espaços não-comutativos tem origem com a formulação de Wigner da mecânica quântica no espaço de fase, em 1932. Em paralelo, Heisenberg foi o primeiro a propor relações de não-comutação entre as componentes do operador de posição. Essa possibilidade ganha formulação matemática com Snyder, ao estudar representações do grupo de De Sitter (4+1). Uma síntese desses trabalhos é o conceito de geometria não-comutativa, estabelecida a partir do produto de Moyal, que aparece no formulismo de Wigner. Além disso, este tipo de não-comutatividade é reencontrada em certos limites das teorias de cordas, gerando expectativas da mensuração da não-comutatividade espacial na física de altas energias. Neste trabalho, apresentamos uma revisão pedagógica sobre teorias físicas em espaços não-comutativos, a partir de uma perpectiva histórica. Destacamos as teorias de representação de grupos de simetria no espaço de fase, apontando dois aspectos de interesse, mas pouco conhecidos: (a) a noção de amplitude de probabilidade e a representação da equação de Schrödinger no espaço de fase (usualmente a representação no espaço de fase da mecânica quântica é construída através da matrix de densidade e da equação de Liouville-von Neumann); e (b) um trabalho de Dirac de 1930, onde foi introduzida pela primeira vez uma formulação da física quântica no espaço de fase.
**Palavras-chave:** mecânica quântica, funções de Wigner, espaços não comutativos.

The concept of noncommutative space originates from the Wigner formulation of quantum mechanics in phase space in 1932. In parallel, Heisenberg was the first to propose noncommutative commutation relations between the components of the position operator. Such a possibility was mathematically described by Snyder, studying representations of the (4+1)-De Sitter group. A synthesis of such works is the concept of noncommutative geometry, established with the Moyal product, that arises in the Wigner formalism. In addition, such noncommutativity is found in some limits of string theory, giving rise to the possibility of measurements of spatial noncommutativity in high-energy physics. In this work, we present a pedagogical review of physical theories in noncommutative spaces, from a historical perspective. We emphasize the theory of symmetry group representations in phase space, and point out two important, but not so well-known, aspects: (a) the notion of amplitude of probability and the representation of the Schrödinger equation in phase space (usually, the phase space representation of quantum mechanics is derived from the density matrix and the Liouville-von Neumann equation); and (b) a work of Dirac in 1930, where a formulation of quantum physics was introduced by the first time.
**Keywords:** quantum mechanics, Wigner functions, noncommutative spaces.

## 1. Introdução

Um ingrediente fundamental da mecânica quântica é a não-comutatividade das quantidades observáveis posição e momento, expressa nas relações de incerteza. Ou seja, o espaço de fase da mecânica Hamiltoniana clássica é mapeado em um espaço de fase quântico através da substituição das variáveis posição e momento $x$ e $p$, por operadores Hermitianos $\widehat{x}$ e $\widehat{p}$, respectivamente, que satisfazem a relação de comutação de Heisenberg, isto é $[\widehat{x},\widehat{p}] = i\hbar$ [1]. A constante de Planck, $\hbar$, dimensiona assim uma área mínima para o espaço de fase. Isto significa que a noção de ponto é perdida e fala-se então de células de Bohr com área da ordem de $\hbar$. A noção de ponto é recuperada com o limite clássico, quando formalmente consideramos $\hbar \to 0$.

Partindo de uma analogia com a quantização do espaço de fase, um outro tipo de discretização pode ser aplicado sobre as coordenadas de posição. Para tanto, estabelecemos que as coordenadas $x^{\mu}$ do espaço

[2,*] E-mail: a.berti.santana@gmail.com.

ou espaço-tempo passem a ser representadas por operadores Hermitianos $\widehat{x}^{\mu}$ de uma álgebra não-comutativa definida em um espaço de Hilbert; ou seja, satisfazem uma relação de comutação do tipo $[\widehat{x}^{\mu}, \widehat{x}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}$, onde $\theta^{\mu\nu}$ são componentes de um tensor antissimétrico, com dimensão de comprimento ao quadrado. Desse modo, a noção de ponto no espaço é perdida: os pontos do espaço-tempo habitual são substituídos por células de tamanho $|\theta^{\mu\nu}|$ e as flutuações quânticas evitam a localização exata dos eventos dentro desta célula área. Assim a relação de incerteza entre as medidas de posição conduz a uma teoria não local, cujas propriedades são de crescente interesse como objetos de estudo, em particular em teorias de campos.

A hipótese de campos não-comutativas no $\mathbb{R}^3$ inicia-se com Heisenberg [2], em 1930, que observou a possibilidade de introduzir relações de incerteza para coordenadas espaciais, com o objetivo de evitar singularidades presentes na auto-energia de partículas pontuais. Heisenberg comentou sobre esta possibilidade com Pauli que, por sua vez, envolveu Oppenheimer na discussão [2]. Foi Snyder [3, 4], orientando de Oppenheimer, em 1947, quem primeiro construiu uma teoria consistente para coordenadas espaciais não-comutativas. Apoiado nos trabalhos de Snyder, Yang publicou um artigo no qual sugeria a aplicação do formalismo de não-comutatividade a espaços curvos, como por exemplo, o espaço de De Sitter [5]. A tentativa de contornar as divergências da eletrodinâmica quântica, utilizando para isso a não-comutatividade em escalas de comprimento muito pequeno, introduziria um corte na região de altos valores do momento (região ultravioleta). Apesar da utilidade demonstrada, a adoção das coordenadas não-comutativas em teoria quântica de campos foi abandonada, devido ao desenvolvimento e predição experimental dos procedimentos de renormalização. Todavia, devido a mecânica quântica, a investigação sobre a não-comutatividade prosseguiu principalmente entre matemáticos.

Um resultado importante foi observar que a informação sobre um espaço de pontos está codificada na álgebra de funções sobre este espaço. Como consequência, pode-se obter o espaço a posteriori a partir de uma álgebra de funções. Por exemplo, a estrutura diferencial de uma variedade diferencial $M$ está encriptada na álgebra de funções, $C^{\infty}(M)$. Em 1943 Gelfand e Naimark [6] apresentaram os resultados que atualmente são conhecidos como teoremas de Gelfand-Naimark. Esses teoremas formam a base matemática da geometria não-comutativa dos espaços originados de uma álgebra não-comutativa de funções [7, 8].

Os teoremas de Gelfand e Naimark mostraram que uma álgebra comutativa de funções aponta para duas direções. Em um caso, partindo de um espaço (variedade diferenciável) ambiente, com uma topologia *a priori* e uma estrutura métrica, encontra-se a álgebra que governa as equações de campos sobre essa variedade. Esta é a formulação usual na física clássica. Em outro caso, com a álgebra deduz-se as propriedades da variedade diferencial *a posteriori*. Contanto que a álgebra seja comutativa, existe uma relação dual entre a álgebra dos campos e a variedade ambiente de suporte desses campos. Em mecânica quântica, o que se tem é a álgebra dos campos definida em termos de operadores, que também são os geradores das simetrias do sistema. O que não se tem são as propriedades da variedade suporte, isto é, o espaço de fase que carrega esta estrutura algébrica. A pergunta natural é então a seguinte: podemos obter as propriedades desta variedade suporte utilizando informações codificadas na álgebra dos campos? A resposta a esta questão leva ao conceito de espaço não-comutativo. Utilizando os teoremas de Gelfand-Naimark, agora para uma algebra não-comutativa de funções, temos um resultado surpreendente: não existe uma única variedade suporte. Uma maneira de lidar com esta multiplicidade de espaços suporte é definir o que tem sido chamado de *variedades vestígio* (do inglês, "shadow manifolds") [9]. Pode-se construir uma variedade vestígio projetando-se a álgebra em um subespaço. Isto é equivalente a projetar ou escolher uma representação do espaço de Hilbert [9]. O interesse em geometrias não-comutativa, na física, ressurgiu a partir da década de 1990 em teorias de campos em espaços não-comutativos, em gravitação, em teoria de cordas e em matéria condensada [8, 10]. Estes resultados sugeriam que o espaço e o tempo na sua forma usual poderiam não existir. Todavia os modelos conhecidos até então diziam muito pouco sobre o que seria uma física sem espaço e sem tempo. Nenhuma estrutura matemática, que podia descrever adequadamente em sua mais ampla generalidade tais situações, era conhecida. O estado da arte mudou significantemente com os trabalhos de Connes e colaboradores que elaboraram uma coleção consistente de resultados matemáticos e batizara-na de *Noncommutative Geometry* [7]. O interesse nesta teoria advém de aplicações em teorias de campos abelianas e não-abelianas [11–20], gravitação [21–23], modelo padrão [24–26], supersimetria [27, 28] e no efeito Hall Quântico [29]. Esta análise levou, recentemente, à formulação das teorias não-comutativas *torcidas* (do inglês: "twisted"), que apresenta a característica de ser compatível com a simetria do espaço-tempo (como as simetrias definidas por exemplo pelo grupo de Galilei ou o grupo de Lorentz) [30–42]. Entretanto, este tipo de compatibilidade com uma teoria não-comutativa é muito mais antiga, e iniciou-se com o trabalho de Wigner de 1932 [43].

O objetivo de Wigner era efetuar correções quânticas à mecânica estatística, sem abandonar o conceito de espaço de fase; um elemento fundamental para uma teoria cinética quântica [43, 44]. No formalismo de Wigner cada operador, representado por $A$, e definido em um espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, é associado a uma função, denotada por $A_w(q, p)$, no espaço de fase,

$\Gamma$ [44]. Esta associação consiste em uma aplicação $\Omega_w : A \to A_w(q,p)$, tal que a álgebra associativa de operadores em $\mathcal{H}$ corresponde a uma álgebra também associativa (mas não-comutativa) em $\Gamma$. Ou seja, o produto de operadores, em $\mathcal{H}$, fica definido em $\Gamma$ pelo chamado produto-estrela, ou produto de Moyal, de modo que para o produto de dois operadores temos $\Omega_w : AB \to A_w(q,p) \star B_w(q,p)$. Este produto emerge de uma álgebra de Poisson deformada com a constante de Planck sendo o parâmetro de deformação [45]. Uma vantagem na análise dos resultados de Wigner-Moyal é que a mecânica clássica aparece no limite de uma expansão em termos do parâmetro de deformação dado por $\hbar$. Dessa forma pode-se dizer que o conceito de espaços não-comutativos nasce com a formulação de Wigner-Moyal da mecânica quântica que é então uma generalização não-comutativa do espaço de fase da mecânica clássica.

Apesar de, historicamente, o método de Wigner ter surgido na mecânica estatística, o formalismo é utilizado na análise de sistemas compostos de poucas partículas, como àquelas submetidas a potenciais harmônicos e de Liouville [46, 47]. No decorrer das décadas o método de Wigner-Moyal adquire o status de uma outra representação da mecânica quântica, com aplicações em diferentes áreas, tais como física nuclear, óptica quântica, física da matéria condensada e geometrias comutativas [44, 48–77]. É importante destacar o uso do formalismo de Wigner em experimentos envolvendo a reconstrução de estados quânticos, na medida direta da função de Wigner e em problemas de tomografia quântica [78–84], assim como a relação com o teorema do limite central e processos estocásticos, o que leva a novas possibilidades interpretativas dos fundamentos da mecânica quântica, com amplas possibilidades de aplicações [85–89].

A estrutura algébrica de Wigner e Moyal tem sido desenvolvida como uma teoria de representação fisicamente consistente. Representações de grupos como o de Galilei e Poincaré tem sido estudadas em $\Gamma$ a partir de operadores do tipo $\widehat{A} = a_W\star$ atuando sobre um espaço de Hilbert de funções complexas como $b_W$, o que leva a $\widehat{A}b_W(q,p) = a_W(q,p) \star b_W(q,p)$. Para o grupo de Galilei, esta *-representação simplética leva a uma equação de Schrödinger no espaço de fase, onde as funções de onda (chamadas de quasi-amplitudes de probabilidades) estão associadas com a função de Wigner [90]. Esta associação supera as dificuldades com uma outra tentativa de escrever a equação de Schrödinger no espaço de fase, onde a função de onda não possui interpretação física imediata [57, 58]. A *-representação simplética garante um modo de deduzir funções de Wigner sem a estrutura intricada da equação de Liouville-von Neumann, o ponto de patida original do método de Wigner. Utilizando a simetria de Poincaré, as equações de Klein-Gordon e de Dirac foram então deduzidas no espaço de fase [91, 92].

No presente trabalho, apresentamos uma revisão, de caráter pedagógico, de métodos das teorias não-comutativas, usando a quantização de Weyl, enfatizando o método de Wigner por seu carácter histórico e por se tratar de um protótipo de teorias não-comutativas. Detalhamos o formalismo de Wigner, com destaque a sua natureza algébrica e as representações de grupos de simetria que levam à equação de Schrödinger no espaço de fase [90]. Estes resultados são consequências da natureza não-comutativa subjacente ao formalismo de Wigner. Destacamos também um outro elemento histórico importante e pouco conhecido: a primeira tentativa de se escrever a mecânica clássica no espaço de fase deve-se a Dirac em um trabalho de 1931 [93]. Como outro exemplo de aplicação da quantização de Weyl discutimos o modelo de Landau [94]. Por ter uma natureza de revisão (embora não exaustiva), apresentamos várias referências úteis àquele que se inicia na área.

A apresentação está disposta da seguinte maneira. Na seção 2, estudamos o processo de quantização de Weyl. Na seção 3, revisitamos o método da função de Wigner, analizando suas principais propriedades. Na seção 4, estudamos uma teoria de representação no espaço de fase para o grupo de Galilei. Na seção 5, o problema de Landau é descrito. Na seção 6, as conclusões e considerações finais são apresentadas.

## 2. A prescrição de Weyl, não-comutatividade e o produto de Moyal

O formalismo que descreve a não-comutatividade no espaço parte de uma analogia com as ideias fundamentais da mecânica quântica. Uma técnica introduzida por Weyl associa as variáveis $z^i$ definidas no espaço Euclidiano $D$-dimensional, $\mathbb{R}^D$, a operadores $\widehat{z}^i$ definidos no espaço Euclidiano não-comutativo. Isto forneceu um caminho sistemático para descrever espaços não-comutativos em geral e para o estudo de teorias de campos. Nesse processo, consideremos a álgebra comutativa em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^D$ com funções $f$ que possam ser descritas por transformadas de Fourier,

$$\widetilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_i z^i} f(z), \tag{1}$$

onde $i = 1, 2, 3, ..., D$. A construção de um espaço não-comutativo se dá pela substituição das coordenadas locais $z^i$ por operadores Hermitianos $\widehat{z}^i$, que obedecem a relação de comutação

$$[\widehat{z}^i, \widehat{z}^j] = i\theta^{ij}, \tag{2}$$

onde os operadores $\widehat{z}^i$ são geradores de uma álgebra não-comutativa. Assim, dada uma função $f$ e sua correspondente transformada de Fourier $\widetilde{f}$, introduzimos operadores de Weyl por

$$\widehat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \widetilde{f}(k) e^{-ik_i \widehat{z}^i}. \tag{3}$$

A partir da Eq. (3), vemos que existe uma correspondência biunívoca entre as funções $f(z)$, com $z$ pertencente ao espaço comutativo, e $\widehat{\mathcal{W}}[f]$ no espaço não-comutativo.

Um operador de Weyl pode ser reescrito em termos de um operador $\widehat{\Delta}(z)$, dado por

$$\widehat{\Delta}(z) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i \widehat{z}_i} e^{-ik_i z^i}. \tag{4}$$

De fato, com essa definição, a Eq. (3) fica escrita como

$$\widehat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D z}{(2\pi)^D} f(z) \widehat{\Delta}(z). \tag{5}$$

Esta equação fornece os operadores de Weyl, a partir dos campos; ou seja, temos um mapeamento dos campos $f(z)$, no espaço comutativo, com operadores de Weyl, $\widehat{\mathcal{W}}[f]$ no espaço não-comutativo.

O produto de dois operadores no espaço não-comutativo é dado por

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(z)]\widehat{\mathcal{W}}[g(z)] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \widetilde{f}(k_1) \widetilde{g}(k_2) e^{-ik_{1i}\widehat{z}^i} e^{-ik_{2i}\widehat{z}^i}, \tag{6}$$

Utilizando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^{-ik_{1i}\widehat{z}^i} e^{-ik_{2i}\widehat{z}^i} = e^{-\frac{i}{2}k_{1i}\theta^{ij}k_{2j}} e^{(k_{1j}+k_{2j})\widehat{z^j}},$$

a Eq. (6) fica dada como

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(z)]\widehat{\mathcal{W}}[g(z)] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \widetilde{f}(k_1) \times \widetilde{g}(k_2) e^{-\frac{i}{2}k_{1i}\theta^{ij}k_{2j}} e^{(k_1+k_j)\widehat{z}}. \tag{7}$$

A partir da Eq. (7), define-se o produto (estrela) de Moyal por

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(z)]\widehat{\mathcal{W}}[g(z)] = \widehat{\mathcal{W}}[f(z) \star g(z)], \tag{8}$$

onde

$$f(z) \star g(z) = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \widetilde{f}(k_1) \times \widetilde{g}(k_2) e^{-\frac{i}{2}k_{1i}\theta^{ij}k_{2j}} e^{(k_{j1}+k_{j2})z^j}.$$

O produto de Moyal pode ser escrito na forma diferencial como

$$f(z) \star g(z) = f(z) exp\left[\frac{i}{2}\theta^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j\right] g(z). \tag{9}$$

Além disso, associado a função $f(z)$, pode-se introduzir uma função $f_w(z)$ através da relação

$$f_w(z) = Tr\left(\widehat{\mathcal{W}}[f(z)]\widehat{\Delta}(z)\right). \tag{10}$$

A função $f_w(z)$ assim obtida é denominada função de Wigner e o mapeamento realizado através de $\widehat{\Delta}(z)$ é o análogo da correspondência da teoria quântica usual. Esse fato sugere que a formulação utilizada por Weyl guarda alguma relação com o método da função de Wigner, pois a função de Wigner é o traço do operador de Weyl. Isto será explorado nas duas próximas seções.

## 3. Função de Wigner-realização simplética

O propósito de Wigner, em seu trabalho de 1932, era efetuar correções quânticas à mecânica estatística, sem abandonar o conceito de espaço de fase, que é a variedade natural na qual uma teoria cinética é escrita. Cabe ressaltar, entretanto, que antes de Wigner, Dirac em 1930 [93], motivado pelo estudo da distribuição de elétrons em átomos em regime semi-clássico, havia introduzido uma representação da mecânica quântica no espaço de fase, através de uma transformada de Fourier da matriz densidade. Dirac estuda em particular a representação de operdores no espaço de fase e também escreve a equação de evolução para a densidade de elétrons que veio a ser conhecida como equação de Liouville-von Neumann.

O trabalho de Wigner segue um procedimento similar ao de Dirac, mas com peculiaridades que levam à estrutura da geometria não-comutativa. Vejamos como este método pode ser construído a partir da prescrição não-comutativa de Weyl. Para tanto escolhemos as variáveis $z^i$ como $z \equiv (q^1, \cdots, q^f, p_1, \cdots, p_f)$, onde $q^i$ e $p_i$ representam variáveis definidas no espaço de fase com dimensão de posição e momentum respectivamente. Matematicamente, podemos entender este espaço de fase como sendo o produto cartesiano $\Gamma = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^d$ de espaços vetoriais de dimensão $n$ cada, onde $(\mathbb{R}^n)^d$ é o espaço dual de $\mathbb{R}^n$. Note que, com essa escolha, D será par. Chamaremos a prescrição de Weyl com essa escolha de realização simplética. Vamos também denotar $k \equiv (u_1, \cdots, u_f, v^i, \cdots, v^f)$ as coordenadas no espaço dual de $\Gamma$.

Nesta realização, o operador $\widehat{\Delta}(z)$ assume a forma

$$\widehat{\Delta}(z) = \int \frac{d^{2n} k}{(2\pi)^{2n}} e^{-ik_i \cdot (z^i - \widehat{z}^i)}, \tag{11}$$

onde o produto "$\cdot$" na exponencial é agora o produto simplético proveniente de uma forma simplética $\omega$ definida no espaço $\Gamma$, isto é,

$$\begin{aligned} \omega(z', z) &= \omega_{ij} z'^j z^i = k_i . z^i \\ &= q^1 u_1 + \cdot\cdot + q^n u_n - p_1 v^1 - \cdots - p_{2n} v^{2n}. \end{aligned}$$

onde $k_i := \omega_{ij} z'^j$ para $z, z' \in \Gamma$. Assim, podemos escrever explicitamente,

$$\widehat{\Delta}(q,p) = \int \frac{dudv}{(2\pi)^{2n}} e^{iu_i(q^j - \widehat{q}^j)} e^{-iv^j(p_j - \widehat{p}_j)} \tag{12}$$

Para simplificar a exposição, sem comprometer a generalidade, vamos prosseguir com o caso $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

O valor esperado de um observável $A$ é expresso, na formulação usual da mecânica estatística quântica, por

$$\langle A \rangle = Tr \rho A,$$

onde $\rho$ é a matriz densidade, definida pela expressão,

$$\rho = \sum_i w_i |\phi_i(t)\rangle\langle\phi_i(t)|,$$

em que $w_i$ é a probabilidade de o sistema se encontrar no estado $|\phi_i(t)\rangle$. A evolução temporal da matriz densidade é expressa pela equação de Liouville-von Neumann

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)], \tag{13}$$

onde $H$ é o hamiltoniano do sistema considerado. A partir de $\rho$ podemos introduzir uma formulação da mecâcnica quântica no espaço de fase, conhecida como método da função de Wigner.

Nesse sentido, a função de Wigner, $f_w(q,p)$, é definida como uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade, isto é,

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\int dz \exp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle, \tag{14}$$

ou de forma equivalente,

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\int dk \exp(\frac{-iqk}{\hbar})\langle p-\frac{k}{2}|\rho|p+\frac{k}{2}\rangle. \tag{15}$$

No caso de o sistema quântico ser descrito por um estado puro, a função de Wigner pode ser escrita como,

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\int e^{\frac{ipz}{\hbar}}\psi^\dagger(q+\frac{z}{2})\psi(q-\frac{z}{2})dz.$$

A funçao de Wigner, Eq. (10), pode ser reescrita utilizando a notação de espaço de fase como [73],

$$f_W(q,p) = Tr\rho\Delta(q,p), \tag{16}$$

onde $\rho$ é o operador densidade e o operador $\Delta(q,p)$ é definido da seguinte forma,

$$\Delta(q,p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dudv}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}[u(q-\widehat{q})-v(p-\widehat{p})]}.$$

Os operadores $\widehat{q}$ e $\widehat{p}$ da última equação satisfazem a relação de comutação de Heisenberg, $[\widehat{q},\widehat{p}] = i\hbar$. Pode-se mostrar que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidades, pois pode assumir valores positivos e negativos. Este e outros aspectos da Função de Wigner são interpretados a partir da análise de suas propriedades.

### 3.1. Propriedades da função de Wigner

- **Propriedade 1**

$$\int f_w(q,p)dp = |\psi(q)|^2 = \langle q|\rho|q\rangle. \tag{17}$$

Essa propriedade mostra que a partir da função de Wigner podemos obter a densidade de probabilidade para se encontrar uma partícula entre $q$ e $q+dq$.

**Demonstração**

Para demonstrar esta propriedade, o ponto de partida será a definição da função de Wigner. Substituindo a Eq. (14) na Eq. (17), obtemos

$$\int dp f_w(q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dpdz\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}.$$

Integrando na variável $p$ , temos

$$\int dp f_w(q,p) = \int dz\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}}),$$

onde o termo entre parênteses é a função delta de Dirac, $\delta(z)$. Assim

$$\int dp f_w(q,p) = \int dz\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle\delta(z).$$

Utilizando a propriedade da função delta, $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$, temos

$$\int dp f_w(q,p) = \langle q|\rho|q\rangle = |\psi(q)|^2,$$

que descreve a densidade de probabilidade no espaço de configurações.

- **Propriedade 2**

$$\int f_w(q,p)dq = |\widetilde{\psi}(p)|^2 = \langle p|\rho|p\rangle. \tag{18}$$

Essa propriedade expressa que a densidade de probabilidade para se encontrar uma partícula entre $p$ e $p+dp$ é dada por $|\widetilde{\psi}(p)|^2$.

**Demonstração**

Substituindo a Eq. (15) na (18), temos

$$\int dq f_w(q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dpdk\langle p-\frac{k}{2}|\rho|p+\frac{k}{2}\rangle e^{\frac{-iqk}{\hbar}}.$$

Integrando em $q$, segue

$$\int dq f_w(q,p) = \int dk\langle p-\frac{k}{2}|\rho|p+\frac{k}{2}\rangle(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dq e^{\frac{-iqk}{\hbar}}),$$

onde o termo entre parênteses é a função delta de Dirac, $\delta(k)$, e assim

$$\int dq f_w(q,p) = \int dk\langle p-\frac{k}{2}|\rho|p+\frac{k}{2}\rangle\delta(k).$$

Isto leva a

$$\int dq f_w(q,p) = \langle p|\rho|p\rangle = |\psi(p)|^2.$$

- **Propriedade 3**

$$\int f_w(q,p)dqdp = Tr\rho = 1. \tag{19}$$

Isto estabelece que a função de Wigner é normalizada.
**Demonstração**
Substituindo a Eq. (14) na Eq. (19), obtém-se

$$\int f_w(q,p)dqdp = (2\pi\hbar)^{-3}\int dzdqdp\,\exp(\frac{ipz}{\hbar})\times$$
$$\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle.$$

Calculando a integral na variável $p$, temos

$$\int f_w(q,p)dqdp = \int dzdq\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle\times$$
$$\left((2\pi\hbar)^{-3}\int dpe^{\frac{ipz}{\hbar}}\right).$$

O termo entre parênteses é a função delta de Dirac. Com isso, encontramos

$$\begin{aligned}\int f_w(q,p)dqdp &= \int dzdq\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle\delta(z)\\ &= \int dq\langle q|\rho|q\rangle = Tr\rho = 1,\end{aligned}$$

que expressa a normalização da função de Wigner; uma condição de consistência com a normalização com a matriz densidade.

- **Propriedade 4**

A função de Wigner não é positiva definida. Este resultado é importante para estabelecer a natureza estatística da função de Wigner.
**Demonstração**
Considere que $f_\alpha$ e $f_\beta$ são duas funções de Wigner associadas, respectivamente, aos estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$; então

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^{-3}\int f_\alpha(q,p)f_\beta(q,p)dqdp.$$

O lado esquerdo dessa equação é positivo ou nulo (se os kets forem ortogonais). No último caso, temos, como consequência, a integral de $f_\alpha f_\beta$ nula. Como $f_\alpha$ e $f_\beta$ não são necessariamente nulas, resulta que $f_\alpha$ e $f_\beta$ podem assumir valores negativos e positivos, de tal modo a anular a referida integral. Considerando que qualquer probabilidade deve ser positiva, fica justificada a afirmação de que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade no espaço de fase. Entretanto, devido as Propriedades 1 a 3, a função de Wigner é chamada de *quasi densidade de probabilidade*.

### 3.2. Propriedade dos operadores na representação de Wigner

Tal como se define operadores de Weyl, pode-se em analogia às equações Eqs.(14) e (15) definir operadores com a forma

$$a_w(q,p) = \int dz\,\exp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|A(\widehat{q},\widehat{p})|q+\frac{z}{2}\rangle, \tag{20}$$

ou

$$a_w(q,p) = \int dk\,\exp(\frac{-iqk}{\hbar})\langle p-\frac{k}{2}|A(\widehat{q},\widehat{p})|p+\frac{k}{2}\rangle. \tag{21}$$

Vamos chamar o conjunto de operadoes escritos nesta forma de representação de Wigner. Com estas definições, note que $f_w(q,p)$ é simplesmente $(2\pi\hbar)^{-3}$ vezes o equivalente em Wigner da matriz densidade $\rho$, isto é,

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\rho_w.$$

Outras propriedades, satisfeitas pelos operadores na representação de Wigner e que também podem ser demonstradas pelos mesmos procedimentos, são as seguintes.

- $TrA = (2\pi\hbar)^{-3}\int dqdqa_w(q,p)$.
- $\int dpa_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\langle q|A|q\rangle$.
- $\int dqa_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\langle p|A|p\rangle$.
- Se $A = A(P)$, então $a_w = A(p)$.
- Se $A = A(Q)$, então $a_w = A(q)$.
- Se $A = constante$, então $a_w = A$.

Em seguida, utilizando o resultado expresso na Eq. (20), o valor esperado de um observável, $A$, em um estado $|\psi\rangle$ fica dado por

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \int dqdpa_w(q,p)f_w(q,p) = Tr\rho A. \tag{22}$$

Para demonstrar este resultado, vamos primeiro calcular

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \int dqdpa_w(q,p)f_w(q,p).$$

Substituindo as Eqs. (14) e (20) na Eq. (22), temos

$$\langle A\rangle = (\frac{1}{2\pi\hbar})^3\int dqdpdz'dz''\,\exp(\frac{ipz'}{\hbar})\times$$
$$\langle q-\frac{z'}{2}|A(Q,P)|q+\frac{z'}{2}\rangle\exp(\frac{ipz''}{\hbar})\langle q-\frac{z''}{2}|\rho|q+\frac{z''}{2}\rangle.$$

Integrando na variável $p$, obtém-se

$$\langle A\rangle = (\frac{1}{2\pi\hbar})^3\int dp\,\exp(\frac{ip(z'+z'')}{\hbar})\times$$
$$\int dqdz'dz''\langle q-\frac{z'}{2}|A(Q,P)|q+\frac{z'}{2}\rangle\langle q-\frac{z''}{2}|\rho|q+\frac{z''}{2}\rangle,$$

onde o termo entre parenteses é a função delta de Dirac. Com isso,

$$\langle A\rangle = \int dqdz'dz''\langle q-\frac{z'}{2}|A(Q,P)|q+\frac{z'}{2}\rangle \times \langle q-\frac{z''}{2}|\rho|q+\frac{z''}{2}\rangle\delta(z'+z'')$$
$$= \int dqdz'\langle q-\frac{z'}{2}|A(Q,P)|q+\frac{z'}{2}\rangle\langle q+\frac{z'}{2}|\rho|q-\frac{z'}{2}\rangle.$$

Introduzindo a mudança de variáveis,

$$\overline{q} = \frac{1}{2}(q-\frac{z}{2})$$

$$\overline{z} = \frac{1}{2}(q+\frac{z}{2}),$$

temos,

$$\langle A\rangle = \int d\overline{q}d\overline{z}\langle\overline{q}|A(Q,P)|\overline{z}\rangle\langle\overline{z}|\rho|\overline{q}\rangle = Tr\rho A = \langle A\rangle.$$

### 3.3. Produto de Moyal na representação de Wigner

Uma característica da representação de Wigner é que associado a um produto de operadores quânticos $A(\widehat{q},\widehat{p})$ tem-se

$$(AB)_w = a_w(q,p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}b_w(q,p) = a_w(q,p)\star b_w(q,p), \tag{23}$$

onde $\Lambda = \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q} - \overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}$. A Eq. (23) define o produto estrela (produto de Moyal), que induz uma geometria não-comutativa e relaciona o formalismo proposto por Wigner com o formalismo de quantização proposto por Weyl [73, 74]. O produto estrela possue várias propriedades e dentre as mais importantes destacamos:

- Produto estrela é não-comutativo.

$$f(q,p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}g(q,p) \neq g(q,p)e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}}f(q,p).$$

Esse é um resultado básico em geometrias não-comutativas.

- O produto estrela entre duas funções no espaço de fase eleva uma delas a categoria de operador.

$$f(q,p)\star g(q,p) = f(q+\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p}, p-\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p})g(q,p) =$$
$$f(q,p)\star g(q,p) = f(q,p)g(q-\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p}, p+\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_q}).$$

- Produto estrela é associativo, isto é,

Se $f$, $g$ e $h$ forem funções no espaço de fase, então,

$$(f(q,p)\star g(q,p))\star h(q,p) = f(q,p)\star(g(q,p)\star h(q,p)).$$

- A conjugação complexa inverte a ordem do produto estrela, ou seja,

$$(f\star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger.$$

- A integral entre duas funções no espaço de fase se trivializa. É evidente que para essa propriedade fazer sentido é necessário a convergência da integral. A condição necessária para que a convergência ocorra é a anulação das funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$ no infinito.

$$\int f(q,p)\star g(q,p)dqdp = \int dqdpf(q,p)g(q,p).$$

### 3.4. Evolução temporal da função de Wigner

Suponha agora que conhecemos a função de Wigner ou qualquer operador na representação de Wigner num dado instante, e desejamos determinar os correspondentes operadores num instante posterior. Para isso, é preciso que conheçamos uma equação que dê a evolução temporal da função de Wigner. Esta equação existe e para obtê-la consideraremos a Eq. (13), e aplicando o operador,

$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dz\ \exp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|.|q+\frac{z}{2}\rangle,$$

em ambos os lados. Resultando então em

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\{(2\pi\hbar)^{-3}\int dz\ \exp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle\} =$$
$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dz\ \exp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|H\rho|q+\frac{z}{2}\rangle$$
$$-(2\pi\hbar)^{-3}\int dz\ \exp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|\rho H|q+\frac{z}{2}\rangle;$$

o que leva, considerando a relação Eq. (23), à

$$i\hbar\frac{\partial f_w(q,p)}{\partial t} = H_w(q,p)\star f_w(q,p,t) - f_w(q,p,t)\star H_w(q,p,t).$$

Definindo o parêntese de Moyal como $\{a,b\}_M = a\star b - b\star a$, tem-se

$$i\hbar\frac{\partial f_w(q,p,t)}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M, \tag{24}$$

onde se observa que essa equação dinâmica é análoga à equação de Liouville-von Neumman, onde o estado do sistema é descrito pela função de Wigner e o comutador foi substituído pelo parêntesis de Moyal. O parêntese de Moyal pode ser escrito da seguinte forma,

$$\{a(q,p), b(q,p)\} = \frac{2}{\hbar} a(q,p) \sin[\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q} - \overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p})] b(q,p), \tag{25}$$

onde usamos

$$e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} - e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}} = 2i\sin(\frac{\hbar\Lambda}{2}).$$

Um resultado interessante é obtido através da expansão em série de potências da função seno desta expressão; ou seja

$$\sin(\frac{\hbar\Lambda}{2}) = \frac{\hbar\Lambda}{2} - \frac{1}{3!}(\frac{\hbar\Lambda}{2})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\hbar\Lambda}{2})^5 + ....$$

No limite em que $\hbar \to 0$, obtemos como resultado que a função de Wigner obedece a equação de Liouville clássica, com $H_w$ no lugar da função Hamiltoniana, isto é

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial H_w}{\partial q}\frac{\partial f_w}{\partial p} - \frac{\partial H_w}{\partial p}\frac{\partial f_w}{\partial q} = \{H_w, f_w\},$$

e ainda,

$$-\frac{\partial H_w}{\partial q} = \dot{p} \quad e \quad \frac{\partial H_w}{\partial p} = \dot{q}.$$

Há casos em que o Hamiltoniano coincide com a sua transformada de Weyl. O que leva a concluir que o fromalismo de Wigner é compatível com o princípio da correspondência. Este fato justifica a aplicação do formalismo de Wigner em estudos de sistemas caóticos semiclássicos.

## 4. O grupo de Galilei e a equação de Schroedinger no espaço de fase

Conforme vimos no formalismo de Wigner, cada operador, $A(\widehat{q},\widehat{p})$, definido no espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, é associado com uma função, $a_w(q,p)$, definida no espaço de fase $\Gamma$. Podemos ainda considerar, que o produto estrela pode ser visto como um operador $\widehat{A} = a_w\star$ atuando na função $b_w$, tal que $\widehat{A}(b_w) = a_w \star b_w$. Esses operadores-estrela mostram-se interessantes para se estudar representações unitárias e irredutíveis de grupos cinemáticos. Nesta seção, definiremos um conjunto de operadores-estrela e chegaremos à equação de Schroedinger escrita no espaço de fase, baseados numa representação do Grupo de Galilei num espaço de Hilbert, $\mathcal{H}_\Gamma$, associado ao espaço de fase, .

A introdução da noção de espaço de Hilbert associado ao espaço de fase $\Gamma$, pode ser feita considerando o conjunto das funções complexas de quadrado integrável, $\phi(q,p)$ em $\Gamma$, tal que

$$\int dpdq\phi^*(q,p)\phi(q,p) < \infty,$$

é uma forma bilinear real. Neste caso podemos escrever $\phi(q,p) = \langle q,p|\phi\rangle$, com

$$\int dpdq|q,p\rangle\langle q,p| = 1,$$

sendo $\langle\phi|$ o vetor dual de $|\phi\rangle$. Vamos denominar este espaço de Hilbert por $\mathcal{H}_\Gamma$.

Para construir uma representação da álgebra de Galilei estendida em $\mathcal{H}_\Gamma$, assumiremos as seguites representações dos operadores $\widehat{q}$ e $\widehat{p}$,

$$\widehat{q} = q\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \tag{26}$$

$$\widehat{p} = p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q, \tag{27}$$

$$\widehat{K} = k_i\star = mq_i\star - tp_i\star = m\widehat{q_i} - t\widehat{p_i}, \tag{28}$$

$$\widehat{L_i} = \epsilon_{ijk}\widehat{q_j}\widehat{p_k} = \epsilon_{ijk}q_jp_k - \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}q_j\frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}p_k\frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial p_k}, \tag{29}$$

e

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\widehat{p}_1^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2) = \frac{1}{2m}[(p_1 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_1})^2 + (p_2 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_2})^2 + (p_3 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_3})^2]. \tag{30}$$

Pode-se mostrar que esses operadores satisfazem a álgebra de Galilei-Lie dada pelas seguintes relações de comutação,

$$[\widehat{L_i}, \widehat{L_j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{L_k},$$

$$[\widehat{L_i}, \widehat{K_j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K_k},$$

$$[\widehat{L_i}, \widehat{P_j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P_k},$$

$$[\widehat{K_i}, \widehat{K_j}] = 0,$$

$$[\widehat{K_i}, \widehat{P_j}] = i\hbar m\delta_{ij}\mathbf{1},$$

$$[\widehat{K_i}, \widehat{H}] = i\hbar\widehat{P_i};$$

as outras relações de comutação são nulas.

E ainda, definindo os operadores multiplos da unidade,

$$\overline{P} = 2p\mathbf{1} \quad e \quad \overline{Q} = 2q\mathbf{1}, \tag{31}$$

podemos reescrever as Eqs. (26) e (27) da seguinte forma,

$$\widehat{p} = \frac{1}{2}(\overline{P} - i\hbar\partial_q), \qquad \widehat{q} = \frac{1}{2}(\overline{Q} + i\hbar\partial_p). \tag{32}$$

É possível mostrar que os operadores $\overline{Q}$ e $\overline{P}$ se transformam, de acordo com a transformação pura de Galilei, o *boost*, como posição e momentum. Isto é,

$$\exp(-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar})2\overline{Q}\,\exp(iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = 2\overline{Q} + vt\mathbf{1},$$

e

$$\exp(-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar})2\overline{P}\,\exp(iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = 2\overline{P} + mv\mathbf{1}.$$

Como $[\overline{Q}, \overline{P}] = 0$, percebemos que $\overline{Q}$ e $\overline{P}$ não podem ser vistos como observáveis, contudo eles podem ser usados para construir um referencial de espaço de fase associado a um espaço de Hilbert. Então, um conjunto de autovetores normalizados, $|q,p\rangle$, são definidos com $\{q\}$ e $\{p\}$ , sendo um conjunto de autvalores, que satisfazem

$$\overline{Q}|q,p\rangle = q|q,p\rangle,$$

e

$$\overline{P}|q,p\rangle = p|q,p\rangle,$$

com

$$\langle q,p|q',p'\rangle = \delta(q-q')\delta(p-p'),$$

e

$$\int dqdp|q,p\rangle\langle q,p| = 1.$$

Os operadores $\overline{Q}$ e $\overline{P}$, com autovalores $\{q,p\}$ são coordenadas de um espaço de fase $\Gamma$, onde a estrutura simplética é usada para definir o produto de Moyal.

Considere $|\psi(t)\rangle$ em $\mathcal{H}_\Gamma$ como uma quantidade que representa o estado de um sistema quântico, tal que com os kets $\{|q,p\rangle\}$, temos

$$\psi(q,p,t) = \langle q,p|\psi(t)\rangle. \tag{33}$$

É importante notar que $\psi(q,p,t)$ é uma função de onda, mas não com o conteúdo da mecânica quântica usual, pois aqui $q$ e $p$ são autovalores dos operadores $\overline{Q}$ e $\overline{P}$. Este aspecto será esclarecido na sequência.

A evolução no tempo da função de onda é dada por

$$\psi(q,p,t) = \exp\frac{-itH}{\hbar}\star\psi(q,p,0), \tag{34}$$

Se derivarmos com relação ao tempo a equação anterior (usando a forma usual para o Hamiltoniano, $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$), obtemos

$$i\hbar\partial_t\psi(q,p,t) = (\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{i\hbar p}{2m}\frac{\partial}{\partial q})\times \\ \psi(q,p,t) + V(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p})\psi(q,p,t), \tag{35}$$

que é a equação de Schroedinger no espaço de fase.

Um ponto crucial desse formalsimo é a sua associação com a função de Wigner, que é estabelecida a partir da relação

$$f_w(q,p) = \psi(q,p,t)\star\psi^\dagger(q,p,t). \tag{36}$$

Com este resultado, a média de um obervável $A$ fica estabelecida de modo fisicamente consistente, isto é

$$\begin{aligned} < A > &= \int dpdq\phi^*(q,p)A(\widehat{q},\widehat{p})\phi(q,p) \\ &= \int dpdq\phi^*(q,p)A_w(q,p)\star\phi(q,p) \\ &= \int dqdp f_w(q,p)A_w(q,p). \end{aligned}$$

Ademais, as funções de onda, $\psi(q,p)$, obedecem a seguinte equação de autovalores,

$$H\star\psi(q,p) = E\psi(q,p),$$

onde $H$ é o Hamiltoniano. Estes resultados estabelecem o significado físico das funções de onda no espço de fase, que são chamadas de *quasi-amplitudes de probabilidade*.

Como um exemplo, tratamos do problema da equação de Schroedinger no espaço de fase submetida ao potencial oscilador harmônico. Para isso, tomemos a equação de autovalores escrita no espaço de fase,

$$h(q,p)\star\psi(q,p) = E\psi(q,p),$$

aqui $h(q,p) = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 q^2$.

Resolveremos esse exemplo mediante um método algébrico a partir da álgebra dos operadores-estrela. Para isso, escrevemos a equação de Schoedinger no espaço de fase para esse potencial da seguinte forma

$$(\frac{m\omega^2}{2}(q\star + \frac{i}{m\omega}p\star)(q\star - \frac{i}{m\omega}p\star) - \frac{\hbar\omega}{2})\psi(q,p) = \\ E\psi(q,p).$$

Para encontrar uma solução, definimos os seguintes operadores

$$a\star = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(q\star + \frac{i}{m\omega}p\star) \quad \text{e} \quad a^\dagger\star = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(q\star - \frac{i}{m\omega}p\star). \tag{37}$$

Dessa forma, a Eq. (37) fica,

$$\hbar\omega(a^\dagger\star a\star + \frac{1}{2})\psi(q,p) = E\psi(q,p), \tag{38}$$

onde $[a\star, a^\dagger\star] = 1$.

Para estudo dessa equação de autovalores, consideraremos a equação

$$a^\dagger\star a\star\psi_n(q,p) = \lambda_n\psi_n(q,p).$$

Os autovalores $\lambda_n$ são positivos definidos e esse fato é claramente notado considerando

$$\int dqdp(a\star\psi_n(q,p))^\dagger\star(a\star\psi_n(q,p)) = \\ \lambda_n\int dqdp\psi_n^\dagger(q,p)\star\psi_n(q,p),$$

o que resulta em

$$\|a \star \psi_n(q,p)\|^2 = \lambda_n \|\psi_n(q,p)\|^2,$$

e confirmando que $\lambda_n$ são positivos. Com as propriedades algébricas apresentadas, podemos concluir que nesse espaço de Hilbert, $a\star$ e $a^\dagger\star$ são operadores de aniquilação e criação, respectivamente, tal que podemos escrever $\lambda_n = n$, e $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$.

Para o estado de vácuo $\psi_0(q,p)$, temos $a\star\psi_0(q,p) = 0$, o que pode ser explicitamente escrito como

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}[q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p + \frac{i}{m\omega}(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q)]\psi_0(q,p) = 0,$$

isto é,

$$(q + \frac{\hbar}{2m\omega}\partial_q)\psi_0(q,p) + i(\frac{p}{m\omega} - \frac{\hbar}{2}\partial_p)\psi_0(q,p) = 0. \quad (39)$$

A procura de soluções reais da Eq. (39), temos que resolver o conjunto de equações

$$(q + \frac{\hbar}{2m\omega}\partial_q)\psi_0(q,p) = 0, \quad (40)$$

$$(\frac{p}{m\omega} - \frac{\hbar}{2}\partial_p)\psi_0(q,p) = 0. \quad (41)$$

Uma solução geral das Eqs. (40) e (41) é dada por

$$\psi_0(q,p) = \sqrt{\frac{e}{\pi\hbar}}\exp(\frac{-m\omega}{\hbar}q^2 + \frac{p^2}{m\omega\hbar}) = \sqrt{\frac{e}{\pi\hbar}}\exp(\frac{-2h(q,p)}{\hbar\omega}), \quad (42)$$

onde $h(q,p) = H_w = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}q^2$ é o Hamiltoniano clássico.

Para $n \geq 1$ as autofunções $\psi_n(q,p)$ são determinadas pelo operador de criação, isto é,

$$\psi_n(q,p) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger\star)^n\psi_0. \quad (43)$$

Com a definição de $a^\dagger\star$ obtemos,

$$\psi_n(q,p) = \frac{3^n}{\sqrt{n}}[\sqrt{\frac{e}{\pi\hbar}}(q - \frac{ip}{m\omega})]^n \exp(\frac{-2h(q,p)}{\hbar\omega}). \quad (44)$$

A partir da Eq. (44), escrevemos a função de Wigner associada a cada $\psi_n(q,p)$, isto é

$$f_w(q,p) = \psi_n(q,p) \star \psi_n^\dagger(q,p).$$

Em particular, para $n = 1,2,3$, encontramos

$$f_w^(1)(q,p) \sim [1 - \frac{4h(q,p)}{\hbar\omega}]\exp(\frac{-2h(q,p)}{\hbar\omega}),$$

$$f_w^{(2)}(q,p) \sim [2 - 4(\frac{4h(q,p)}{\hbar\omega}) + (\frac{4h(q,p)}{\hbar\omega})^2] \times \exp(\frac{-2h(q,p)}{\hbar\omega}),$$

$$f_w^{(3)}(q,p) \sim [6 - 18(\frac{4h(q,p)}{\hbar\omega}) + 9(\frac{4h(q,p)}{\hbar\omega})^2 - (\frac{4h(q,p)}{\hbar\omega})^3]\exp(\frac{-2h(q,p)}{\hbar\omega}).$$

E, para $n$ arbitrário, temos o resultado bem conhecido

$$f_w^n(q,p) \sim L_n(\frac{4h(q,p)}{\hbar\omega})\exp(\frac{-2h(q,p)}{\hbar\omega}), \quad (45)$$

onde $L_n$ são os polinômios de Laguerre. Essas soluções são coincidentes com as soluções encontradas para as quasi-amplitudes de probabilidades. Esse fato é consistente, uma vez que tanto as quasi-densidades de probabilidades como as quasi-amplitudes de probabilidades obedecem a mesma equação de autovalores. O comportamento de alguns casos para as amplitudes e das respectivas funções de Wigner podem vistos nas Figs. 1-6.

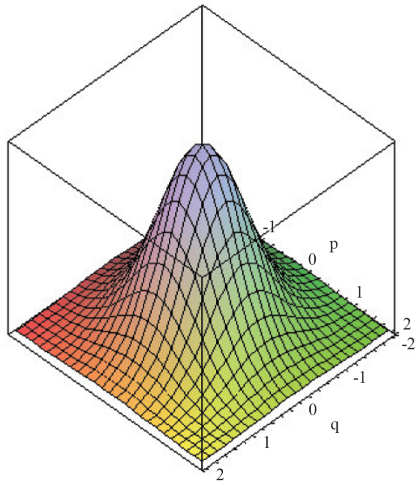


Figura 1 - Amplitude para o oscilador harmônico, ordem zero.

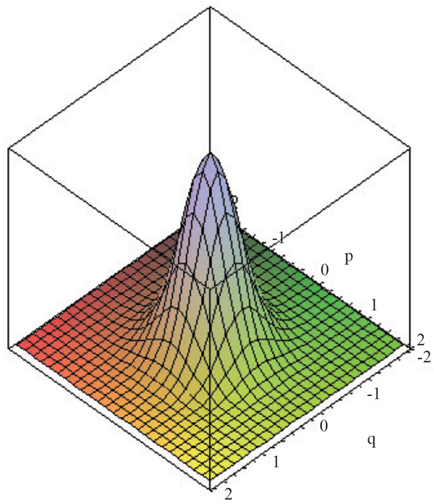


Figura 2 - Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem zero.

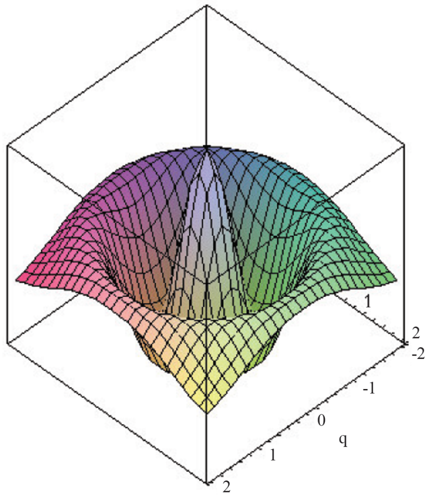


Figura 3 - Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 2.

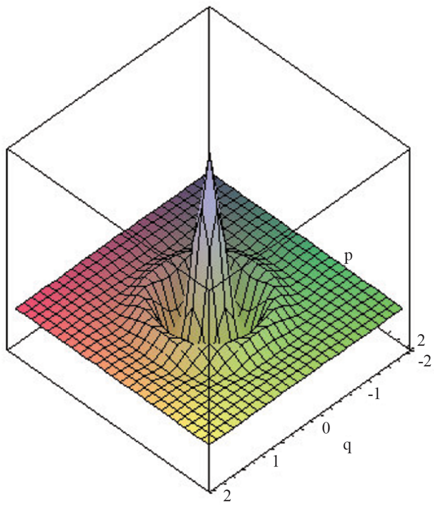


Figura 4 - Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 2.

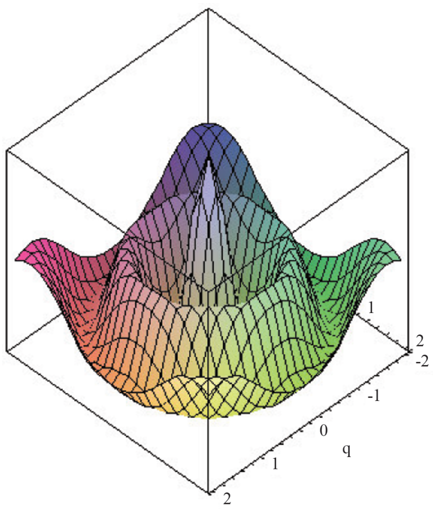


Figura 5 - Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 4.

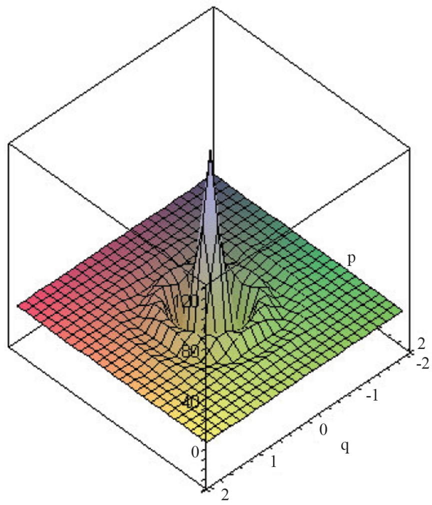


Figura 6 - Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 4.

Os desenvolvimentos apresentados nesta seção foram generalizadas para o espaço de fase relativístico, por meio de representações do grupo de Poincaré num espaço de Hilbert associado ao espaço de fase, utilizando para esse fim, operadores-estrela. Como resultado da não comutatividade, escrevemos as equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço de fase [90–92]. Na próxima seção, como um outro exemplo de teorias não comutativas, analisaremos o problema de Landau.

## 5. O problema de Landau

O problema de Landau [94] consiste de uma partícula carregada com massa $m$ movendo-se no plano $\widehat{r} = (\widehat{q}_1, \widehat{q}_2)$ na presença de um campo magnético $B$ perpendicular e constante. A Lagrangiana para esse modelo é dada por,

$$L_m = \frac{m}{2}(\dot{\widehat{q}}^i)^2 + \frac{B}{2}\epsilon_{ij}\dot{\widehat{q}}^i\widehat{q}^j.$$

No limite $B \to \infty$ (ou $m \to 0$), o termo cinético pode ser negligenciado e o Lagrangiano é simplificado para

$$L_0 = \frac{B}{2}\epsilon_{ij}\dot{\widehat{q}}^i_a\widehat{q}^j_a.$$

Os momenta canônicos associados a $\widehat{q}^i$ são dados por

$$\widehat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}^i} = B\epsilon_{ij}\widehat{q}^j.$$

Observe que neste caso o Hamiltoniano é dado por $H_0 = 0$.

Podemos quantizar esse modelo canonicamente, desde que

$$\left[\widehat{p}_i, \widehat{q}^j\right] = -\frac{B}{2}\epsilon_{ik}\left[\widehat{q}^k, \widehat{q}^j\right] = i\delta_i^j,$$

o que leva a

$$\left[\widehat{q}^k, \widehat{q}^j\right] = i\theta^{kj},$$

onde $\theta^{kj} = \frac{2}{B}\epsilon^{kj}$. Dessa forma, vemos que as coordenadas das partículas obedecem a relação de comutação do tipo dada na Eq. (2). Podemos concluir ainda que, no regime de um campo magnético forte, as coordenadas da partícula passam a ser não-comutativas. É útil mencionar que o problema de Landau já foi abordado no espaço de fase e a respectiva função de Wigner foi calculada [61].

Considerando a não-comutatividade das coordenadas, podemos demostrar o teorema de Ehrenfest [19]. Seja então um sistema em um espaço de configuração n-dimensional e descrito por variáveis canônicas $(\widehat{q}^k, \widehat{p}_k)$ obedecendo as regras de comutação:

$$[\widehat{q}^k, \widehat{q}^j] = i\theta^{kj}, [\widehat{q}^k, \widehat{p}_j] = i\hbar\delta^k_j, [\widehat{p}_k, \widehat{p}_j] = 0,$$

com $\theta^{kj}$ um tensor anti-simétrico cuja dimensão é $[L]^2$, como no caso do problema de Landau. Suponha que o Hamiltoniano $H$ depende de $\widehat{q}^k$ e $\widehat{p}_k$, isto é,

$$H = \frac{\widehat{p}^k\widehat{p}_k}{2m} + V(\widehat{q}^k), \tag{46}$$

e que o sistema seja descrito por vetores de estado $|\psi\rangle$ em um espaço de Hilbert tal que a evolução temporal do estado $|\psi\rangle$ seja dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle.$$

Fazendo a mudança de variáveis $(\widehat{q}, \widehat{p}) \to (\widetilde{q}, \widetilde{p})$ dada por [19]

$$\widetilde{q}^k = \widehat{q}^k + \frac{i}{2\hbar}\theta^{kl}\widehat{p}_l, \quad \widetilde{p}^k = \widehat{p}_k,$$

segue que

$$[\widetilde{q}^k, \widetilde{q}^j] = 0, \quad [\widetilde{q}^k, \widetilde{p}_j] = i\hbar\delta^k_j, \quad [\widetilde{p}_k, \widetilde{p}_j] = 0, \tag{47}$$

ou seja, tem-se as relações de comutação usuais. Com essas variáveis a Eq. (46) fica escrita como

$$H = \frac{\widetilde{p}_k\widetilde{p}^k}{2m} + V(\widetilde{q}^k - \frac{1}{2\hbar}\theta^{kl}\widetilde{p}_l). \tag{48}$$

Com a hipótese que $\theta^{kl}$ seja pequeno, podemos expandir $V$ como

$$V(\widetilde{q}^k - \frac{1}{2\hbar}\theta^{kl}\widetilde{p}_l) = V(\widetilde{q}^k) - \frac{1}{2\hbar}\theta^{kl}\widetilde{p}_l\frac{\partial V}{\partial\widetilde{q}^k} + o(\theta^2); \tag{49}$$

e assim determinar o valor esperado nessas variáveis como no caso de variáveis comutativas. Segue que a variação no tempo do valor esperado de um observável $A$ é

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, A]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle.$$

Usando as Eqs. (47) e (49), resulta em

$$\frac{d}{dt}\langle\widetilde{q}^k\rangle = \frac{\langle\widetilde{p}_k\rangle}{m} - \frac{\theta^{lk}}{2\hbar}\langle\frac{\partial V}{\partial\widetilde{q}^l}\rangle, \tag{50}$$

e

$$\frac{d}{dt}\langle\widetilde{p}_k\rangle = \langle-\frac{\partial V}{\partial\widetilde{q}^k}\rangle + \frac{\theta^{jl}}{2\hbar}\langle\widetilde{p}_l\frac{\partial^2 V}{\partial\widetilde{q}^j\partial\widetilde{q}^l}\rangle. \tag{51}$$

Estas equações constituem o teorema de Ehrenfest nesta formulação. Nota-se que para $\frac{\theta^{kl}}{\hbar} \to 0$ tais relações se reduzem às expressões usuais, relacionadas com a mecânica clássica; no entanto, até primeira ordem em $\theta$, os valores médios das coordenadas e dos momenta seguem equações modificadas pelo parâmetro que caracteriza a não-comutatividade. O problema de Landau no espaço de fase tem sido estudado também no estudado e a função de Wigner calculada [61].

## 6. Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos uma breve revisão sobre dois tópicos da física contemporânea: a geometria não-comutativa e a função de Wigner. Partimos da formulação geral de Weyl, para estudar, como primeiro exemplo de uma teoria não comutativa, o formalismo de Wigner da mecânica quântica. Introduzimos, com detalhes pedagógicos, a função de Wigner e analisamos suas propriedades. A relação entre o formalismo proposto por Wigner e a geometria não-comutativa é então discutida. Através da análise de uma teoria de representação de grupos de Lie no espaço de fase, e com o uso da noção de quasi-amplitude de probabilidade, mostramos uma descrição da equação de Schrödinger no espaço de fase. Como exemplo de teorias de coordenadas espaciais não comutativas, seguindo ainda a formulação de Weyl, estudamos o problema de Landau.

Um aspecto de interesse histórico é o destaque ao trabalho de Dirac de 1930, anterior portanto ao de Wigner mas pouco conhecido, onde a noção de espaço de fase em mecânica quântica é obtido por uma transformada de Fourier. Nesta perspectiva, o trabalho de Dirac é pioneiro quando se trata da mecânica quântica no espaço de fase.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

## Referências


[1] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. A **73**, 977 (2001).

[2] W. Pauli, *Scientific Correspondence*, Vol II, p.15, Ed. K. von Meyenn (Spring-Verlag, Berlin, 1985).

[3] H.S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

[4] H.S. Snyder, Phys. Rev. **72**, 68 (1947).

[5] C.N. Yang, Phys. Rev. **72**, 874 (1947).

[6] I.M. Gelfand and M.A. Naimark, Mat. Sbornik **12**, 197 (1943).

[7] A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, San Diego, 1990).

[8] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909**, 32 (1999), hep-th/9908142.

[9] B.J. Hiley, *Phase Space Description of Quantum Mechanics and Non-commutative Geometry: Wigner-Moyal and Bohm in a wider context*, in Beyond the Quantum, eds Th.M. Nieuwenhuizen, V. Spicka, B. Mehmani, M. Jafar-Aghdami and A. Yu Khrennikov (Singapura, World Scientific, 2007).

[10] R.J. Szabo, Phys. Rep. **378**, 207 (2003).

[11] A.H. chanseddine, G. Felder and J. Frohlich, Commun. Math. Phys. **155**, 205 (1993).

[12] F.A. Schaposnik, Braz. J. Phys. **34**, 1349 (2004)

[13] T. Mariz, J.R. Nascimento and V.O. Rivellis, Phys. Rev. D **75**, 025020 (2007).

[14] M.L. Costa, A.R. Queiroz and A.E. Santana, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3209 (2010).

[15] L. Barosi, F.A. Brito and A.R. Queiroz, J. Cosmol. Astropart. **0804**, 005 (2008).

[16] C.R. Das, S. Digal and T.R. Govindarajan, Mod. Phys. Lett. A **23**, 1781 (2008).

[17] M.L. Costa, A.R. Queiroz, A.E. Santana and C.A. Siqueira, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 2569 (2011).

[18] R. Gurau, A.P.C. Malbouisson, V. Rivasseau and A. Tanasa, Lett. Math. Phys. **81**, 161 (2007).

[19] I. Cabrera-Carnero, L.A. Correa Borbonet and G.C.S. Valadares, Phys. Lett. A **372** 2541 (2008).

[20] A.V. Strelchenko and D.V. Vassilevich, Phys. Rev. D **76**, 065014 (2007).

[21] W. Kalau and M. Walze, J. Geom. Phys. **16**, 327 (1955).

[22] D. Kastler, Commun. Math Phys. **166**, 633 (1995).

[23] A.H. Chanseddine and A. Connes, Commun. Math. Phys. **186**, 731 (1997).

[24] A. Connes and J. Loot, Nucl. Phys. Proc. Suppl. B **18**, 29 (1991).

[25] J.C. Varilly and J.M. Garcia-Bondia, J. Geom. Phys. **12**, 223 (1993).

[26] C.P Martin, J.C. Varilly and J.M. Garcia-Bondia, Phys. Rep. **294**, 363 (1998).

[27] V.O. Rivelles, Braz. J. Phys. **31**, 255 (2001).

[28] H.O. Girotti, M. Gomes, V.O. Rivelles and A.J. da Silva, Nucl.Phys. B **587**, 299 (2000).

[29] J. Belissard, A. van Elst and H. Schulz-Baldes, J. Math. Phys. **35**, 53 (1994).

[30] A.P. Balachandran, T.R. Govindarajan, G. Mangano, A. Pinzul, B.A. Qureshi and S. Vaidya, Phys. Rev. D **75**, 045009 (2007) [hep-th/0608179].

[31] A.P. Balachandran, A.M. Marques, A.R. Queiroz and P. Teotonio-Sobrinho, J. Phys. A **40**, 7789 (2007) [hep-th/0608081].

[32] A.P. Balachandran and S.G. Jo, Int. J. Mod. Phys. A **22**, 6133 (2007) [arXiv:0704.0921 [hep-th]].

[33] A.P. Balachandran, A. Pinzul, B.A. Qureshi and S. Vaidya, Phys. Rev. D **76**, 105025 (2007) [arXiv:0708.0069 [hep-th]].

[34] A.P. Balachandran, A. Pinzul and B.A. Qureshi, Phys. Rev. D **77**, 025021 (2008) [arXiv:0708.1779[hep-th]].

[35] A.P. Balachandran, A. Pinzul and A.R. Queiroz, Phys. Lett. B **668**, 241 (2008) [arXiv:0804.3588 [hep-th]].

[36] A.P. Balachandran, T.R. Govindarajan and S. Vaidya, Phys. Rev. D **79**, 105020 (2009) [arXiv:0901.1712 [hep-th]].

[37] A.P. Balachandran and B.A. Qureshi, Phys. Rev. D **81**, 065006 (2010) [arXiv:0903.0478 [hep-th]].

[38] A.P. Balachandran and T.R. Govindarajan, Phys. Rev. D **82**, 105025 (2010) [arXiv:1006.1528 [hep-th]].

[39] A.P. Balachandran, A. Joseph and P. Padmanabhan, Found. Phys. **40**, 692 (2010) [arXiv:0905.0876 [hep-th]].

[40] A.P. Balachandran, A. Joseph and P. Padmanabhan, Phys. Rev. Lett. **105**, 051601 (2010) [arXiv:1003.2250 [hep-th]].

[41] A.P. Balachandran and P. Padmanabhan, JHEP **1012**, 001 (2010) [arXiv:1006.1185 [hep-th]].

[42] A.P. Balachandran, P. Padmanabhan and A.R. de Queiroz, Phys. Rev. D **84**, 065020 (2011) [arXiv:1104.1629 [hep-th]].

[43] E.P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).

[44] M. Hillery, R.F.O 'Connell, M.O. Scully and E.P. Wigner, Phys. Rep. **106**, 121 (1984).

[45] V. Chari and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups* (Cambridge, England, 1995).

[46] A. Isar, *Wigner distribution function and entropy of the damped harmonic oscillator within the theory of open quantum systems*, (1994) [hep-th/9404129].

[47] A. Isar, *Damped quantum harmonic oscillator: and related quantities*, (1994) [hep-th/9406142].

[48] Y.S. Kim and M.E. Noz, *Phase Space Picture and Quantum Mechanics - Group Theoretical Approach* (W. Scientific, London, 1991).

[49] T. Curtright, D. Fairlie and C. Zachos, Phys. Rev. D **58** 25002 (1998).

[50] C.K. Zachos, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 297 (2002).

[51] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson and A.E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (W. Scientific, Singapore, 2009).

[52] H. Weyl, Z. Phys. **46**, 1 (1927).

[53] J.E. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. **45**, 99 (1949).

[54] S.A. Smolyansky, A.V. Prozorkevich, G. Maino and S.G. Mashnic, Ann. Phys. (N.Y.) **277**, 193 (1999).

[55] T. Curtright and C. Zachos, J. Phys. A **32**, 771 (1999).

[56] I. Galaviz, H. García-Compeán, M. Przanowski and F.J. Turrubiates, *Weyl-Wigner-Moyal for Fermi Classical Systems*, arXiv: hep-th/0612245v1.

[57] J. Dito, J. Math. Phys. **33**, 791 (1992).

[58] G. Torres-Vega and J.H. Frederick, J. Chem. Phys. **93**, 8862 (1990).

[59] D. Galetti and A.F.R.T. Piza, Physica A **214**, 207 (1995).

[60] D. Galetti, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, Notas do Curso Apresentado na III Escola Mário Schenberg de Pós-Graduação, João Pessoa, (1996).

[61] O.F. Dayi and L.T. Kelleyane, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1937 (2002) [hep-th/0202062].

[62] M.C.B. Fernandes and J.D.M. Vianna, Braz. J. Phys. **28**, 2 1999).

[63] M.C.B. Fernandes, A.E. Santana and J.D.M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 3841 (2003).

[64] A.E. Santana, A. Matos Neto, J.D.M. Vianna and F.C. Khanna, Physica A **280**, 405 (2001).

[65] D. Bohm, B.J. Hiley, Found. Phys. **11**, 179 (1981).

[66] M.C.B. Andrade, A.E. Santana and J.D.M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 4015 (2000).

[67] M.A. Alonso, G.S. Pogosyan and K.B. Wolf, J. Math. Phys. **43**, 5857 (2002).

[68] M.A. de Gosson, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 1 (2000).

[69] M.A. de Gosson, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 095202 (2008).

[70] V.V. Dodonov, Phys. Lett. A **364**, 368 (2007).

[71] V.V. Dodonov, O.V. Man'ko and V.I. Man'ko, Phys. Rev. A **50**, 813 (1994).

[72] V.V. Dodonov, O.V. Man'ko and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **49**, 2993 (1994).

[73] M.A. Marchiolli, Rev. Bras. Ens. Fis. **24**, 421 (2002).

[74] M. Novaes, Rev. Bras. Fis. **24**, 437 (2002).

[75] S. Chountassis and A. Vourdas, Phys. Rev. A **58**, 1794 (1998).

[76] T. Curtright, D. Fairlie and C. Zachos, Phys. Rev. D **58**, 25002 (1998).

[77] M. Berkowitz, Chem. Phys. Lett. **129**, 486 (1986).

[78] D.T. Smithey, M. Beck, M.G. Raymer and A. Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).

[79] D. Leibfried, D.M. Meekhof, B.E. King, C. Monroe, W.M. Itano and D.J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).

[80] L.G. Lutterbach and L. Davidovich, Phys. Rev. Lett. **78**, 2547 (1997).

[81] R.L. de Matos Filho and W. Vogel, Phys. Rev. A **58**, R1661 (1998).

[82] A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni and F. Ventriglia, Phys. Scripta **79**, 065013 (2009) [arXiv:0904.4439 [quant-ph]].

[83] A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni and F. Ventriglia, Phys. Lett. A **374**, 2614 (2010) [arXiv:1004.0102 [quant-ph]].

[84] A. Ibort, A. Lopez-Yela, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, E.C.G. Sudarshan and F. Ventriglia, arXiv:1202.3275 [math-ph].

[85] L.S.F. Olavo, Physica A **262**, 197 (1999).

[86] L.S.F. Olavo, Physica A **271**, 260 (1999).

[87] L.S.F. Olavo, Found. Phys. **34**, 891 (2004).

[88] L.S.F. Olavo, Phys. Rev. A, **61**, 052109 (2000).

[89] L.S.F. Olavo, L.C. Lapas and A.D. Figueiredo, Ann. Phys. (N.Y.), **327**, 1391 (2012).

[90] M.D. Oliveira, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana and J.D.M. Vianna, Ann. Phys. (N.Y.) **312**, 492 (2004).

[91] R.G.G. Amorim, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana and J.D.M. Vianna, Phys. Lett. A **361**, 464 (2007).

[92] R.G.G. Amorim, F.C. Khanna, A.E. Santana and J.D.M. Vianna, Physica A **388**, 3771 (2009).

[93] P.A.M. Dirac, Proc. Camb. Phil. Mag. **26**, 376 (1930). Durante a elaboração deste texto, o Professor Viktor Dodonov trouxe-nos esta referência de Dirac, na qual está registrada a definição de uma função no espaço de fase obtida a partir da transformada de Fourier da matriz de densidade. Este artigo parece ser o primeiro registro de uma tentativa de formulação da mecânica quântica no espaço de fase. Somos gratos ao Prof. Dodonov pela referência.

[94] L.D. Landau and L.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Pergamon Press, Oxford, 1977).