Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 1, 1304 (2014)
www.sbfisica.org.br

O paradoxo cinemático de Galileu

(Galileo's kinematical paradox)

M.F.B. Francisquini, V. Soares, A.C. Tort[1]

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil
Recebido em 16/4/2013; Aceito em 27/5/2013; Publicado em 6/2/2014

Descrevemos um aparato de baixo custo e apresentamos um vídeo curto que podem ser utilizados pelo professor em sala de aula para demonstrar e ilustrar um paradoxo cinemático aparente descrito por Galileu Galilei em uma carta para Guidobaldo del Monte e também em *Duas Novas Ciências*. A solução cinemática desse paradoxo aparente também é discutida.
Palavras-chave: paradoxo de Galileu, paradoxo cinemático.

We describe a low-cost demonstration setup and present a short video that can be used by the teacher to discuss an apparent kinematical paradox described by Galileo in a letter to his friend Guidobaldo del Monte and also in *Two New Sciences*. The kinematical solution of this apparent paradox is also discussed.
Keywords: Galileo paradox, kinematical paradox.

1. Introdução

Em uma carta datada de 29 de novembro de 1602, destinada a seu amigo e admirador Guidobaldo del Monte (1545-1606), Galileu Galilei (1564-1642) descreve um paradoxo cinemático aparente que decorre de seus estudos da cinemática dos corpos em queda livre [1]. Eis o trecho relevante na tradução livre dos autores:

> *Seja o diâmetro AB no círculo BDA* [Fig. 1] *perpendicular ao horizonte, e a partir do ponto A sejam desenhadas linhas ao longo da circunferência, tais como AF, AE, AD, AC: eu provo que corpos iguais caem em tempos iguais ao longo da vertical BA e nos planos inclinados CA, DA, EA, FA. Assim, se eles começarem o movimento no mesmo momento a partir das posições B, C, D, E, F, eles chegarão no mesmo momento no ponto A, sendo a linha FA tão pequena quanto se desejar.*

Em outras palavras: dado um círculo vertical, um corpo que cai livremente ao longo do diâmetro e um corpo que desliza ao longo de uma corda chegam ao pé do círculo ao mesmo tempo. Evidentemente as forças resistivas devem ser ignoradas e ambos os corpos devem ser abandonados a partir do repouso. Além da carta a del Monte, o paradoxo também é descrito no último livro de Galileu, *Duas Novas Ciências* [2].

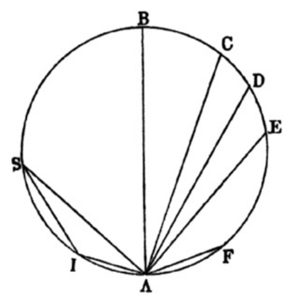

Figura 1 - Diagrama que ilustra a descrição de Galileu do paradoxo aparente.

A apresentação e discussão em sala de aula deste paradoxo (aparente) parece-nos muito interessante e de grande valor pedagógico por sua capacidade em motivar nossos alunos [3]. Com esta finalidade os presentes autores idealizaram uma demonstração de baixo custo deste paradoxo cinemático e um vídeo curto que pode ser visualizado no endereço `http://www.youtube.com/watch?v=Jdcd1lSxc0w`.[2] O vídeo ilustra duas demonstrações realizadas com o aparato, ambas exibidas primeiramente em tempo real e depois em câmera lenta. A Fig. 2 apresenta a superposição de quadros correspon-

[1]E-mail: tort@if.ufrj.br.

[2]O vídeo foi produzido por um dos autores (M.F.B.F.) como parte de sua monografia de final de curso de Licenciatura em Física do IF-UFRJ [4].

dentes a cinco momentos distintos do vídeo em duas configurações diferentes. Na primeira configuração, o ângulo entre a corda é a horizontal vale 40°, e na segunda, o ângulo entre a corda e a horizontal vale 67°.

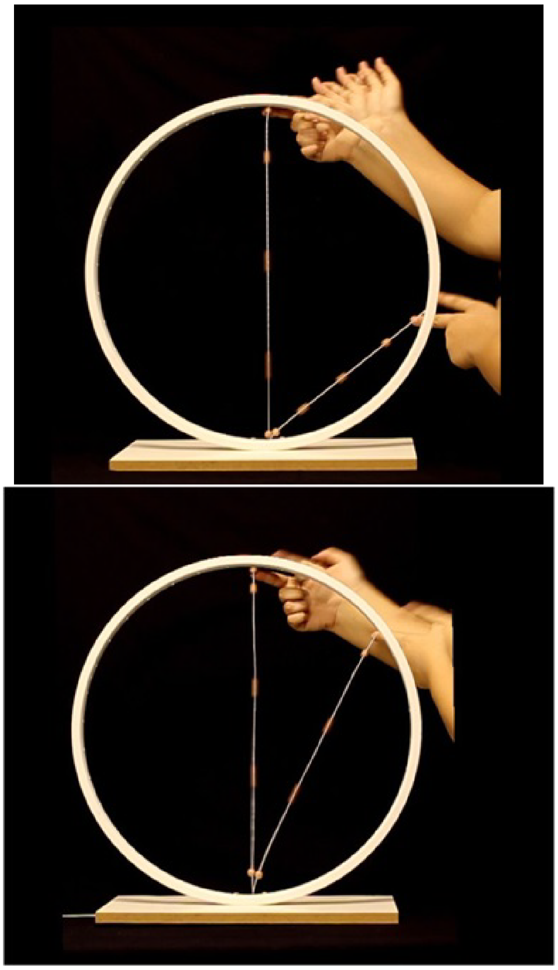

Figura 2 - Superposições de quadros extraídas do vídeo demonstrativo.

2. A descrição do aparato

Os materiais utilizados para a construção do aparato utilizado na produção do vídeo (e que também pode ser facilmente levado para a sala de aula para uma demonstração ao vivo) são:

(a) um aro de bicicleta de 50 cm de diâmetro (novo ou usado);

(b) um cabo de freio de bicicleta (mas outros tipos de fio podem ser utilizados);

(c) duas contas de madeira (ou mais se o professor assim o desejar).

Como o aro de bicicleta já vem com vários furos originalmente destinados aos raios da roda, a montagem do aparato consiste essencialmente em passar o cabo de aço através desses furos e manter a tensão mecânica do cabo. O custo é baxíssimo, da ordem de 30 reais ou menos caso um aro de bicicleta usado seja aproveitado.

3. A solução do paradoxo

A resolução teórica do paradoxo começa com uma mirada atenta ao esquema mostrado na Fig. 3. Ela nos mostra um círculo vertical de diâmetro H e duas cordas, BE e EA, de comprimentos L e ℓ, respectivamente. De acordo com o teorema de Tales sobre um triângulo inscrito em um semicírculo, s, veja o Apêndice, Fig. 5, o triângulo ABE inscrito no círculo vertical é reto. Portanto, podemos escrever

$$\ell = H\,\cos\left(90^{\circ} - \theta\right) = H\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{1}$$

onde θ é o ângulo entre a corda EA e a horizontal. A projeção da aceleração da gravidade g ao longo da corda EA é

$$a = g\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2}$$

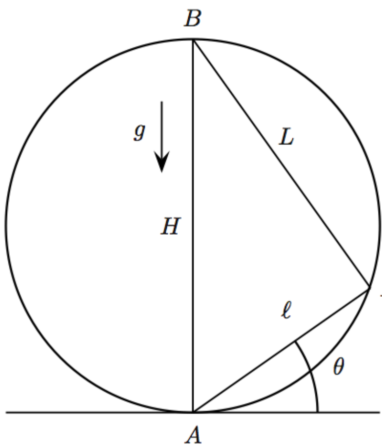

Figura 3 - O sistema de referência, o círculo e três cordas empregadas na discussão do paradoxo.

Considere agora dois corpos que partem do repouso simultaneamente, um do topo do círculo vertical, ponto B, e o outro da extermidade E da corda EA. As equações horárias se escrevem

$$H = \frac{1}{2}\,g\,t_{\mathrm{H}}^{2}\,, \tag{3}$$

e

$$\ell = \frac{1}{2}\,a\,t_{\ell}^{2}\,, \tag{4}$$

onde t_{H} e t_{ℓ} são os tempos de queda-livre ao longo do diâmetro e de deslizamento ao longo da corda respectivamente. Se agora substituirmos as Eqs. (1) e (2) na Eq. (4) obteremos

$$H = \frac{1}{2}\,g\,t_{\ell}^{2}\,, \tag{5}$$

logo, $t_{\mathrm{H}} = t_{\ell}$!

O mesmo procedimento pode ser utilizado para mostrar que se os dois corpos forem abandonados simultaneamente no topo do círculo vertical e um deles cair livremente ao longo do diâmetro e o outro deslizar ao longo da corda BE, os mesmos atingirão a circunferência do círculo vertical ao mesmo tempo. Generalizar o procedimento abrangendo a descrição original de Galileu é imediato.

4. Uma abordagem alternativa

Há um outro modo de visualizar o paradoxo que consiste em aproveitar a superposição dos quadros obtidos a partir do vídeo e comparar visualmente a queda ao longo do diâmetro e o deslizamento ao longo de uma corda, veja a Fig. 4. Na Fig. 4, à esquerda, subdividimos o diâmetro BA em 16 partes iguais, embora tenhamos representado somente cinco, e construímos segmentos de reta paralelos à corda BE. Isto permite dividir a corda EA também em 16 partes proporcionais. Portanto, se o movimento vertical ao longo do diâmetro BA for uniformemente acelerado, o movimento ao longo da corda BE também o será: os segmentos paralelos à corda BE unem os dois corpos no mesmo instante de tempo. O mesmo raciocínio pode ser feito para o segmento BE e, em consequência, o intervalo de tempo para percorrer BE é igual ao intervalo de tempo para percorrer BA.

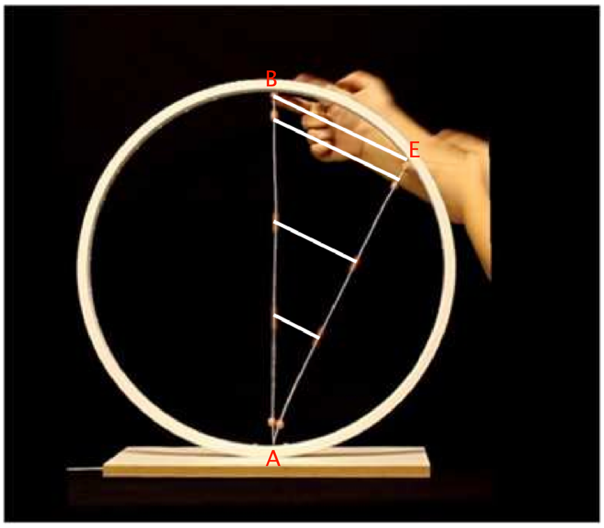

Figura 4 - Resolvendo o paradoxo visualmente.

5. Comentários finais

O paradoxo cinemático aparente que discutimos aqui foi resolvido por Galileu na carta a Guidobaldo del Monte e em *Duas Novas Ciências*. A solução que apresentamos é simples e imediata. A solução de Galileu é mais complexa e isto tem uma explicação simples: Galileu não tinha ao seu dispor as linguagens e notações modernas da álgebra comum e da álgebra vetorial. As demonstrações matemáticas que acompanham os raciocínios físicos fazem uso de razões e proporções, médias geométricas e da regra de Merton.

A experiência dos presentes autores mostra que a discussão deste paradoxo cinemático em sala de aula seja por meio da utilização do aparato descrito ou pela exibição do vídeo atrai imediatamente a atenção dos estudantes. As discussões que se seguem enriquecem os alunos e seus professores. Há vários modos de apresentar este material. Por exemplo, o vídeo pode ser exibido em primeiro lugar e a partir dele toda uma discussão sobre a queda-livre pode ser desenvolvida pelo professor. Finalmente, ressaltamos que duas variantes mais complexas que ilustram o paradoxo cinemático de Galileu são descritas na Ref. [5].

Apêndice: o teorema de Tales sobre um triângulo inscrito em um semicírculo

Se um triângulo inscrito em um semicírculo tem um lado que coincide com o diâmetro deste, então o triângulo é reto. Este resultado é conhecido como *teorema de Tales.*

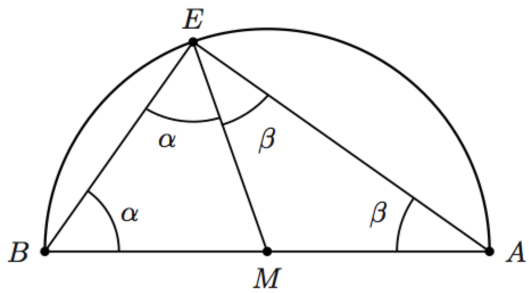

Figura 5 - O teorema de Tales de Mileto (c. 624-c. 547 a. E. C.).

A demonstração é simples. Os triângulos BEM e AEM são isósceles. Neste caso, para o triângulo BEM, as medidas dos ângulos EBM e BEM são iguais. Denotaremos esta medida por α. O mesmo raciocínio vale para o triângulo MAE. Denotaremos esta medida por β. Como a soma dos ângulos internos do triângulo BAE deve ser igual a π radianos,

$$2\alpha + 2\beta = \pi,$$

logo,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

isto é, o triângulo BAE é reto. Este é o teorema de Tales que, reza a lenda, sacrificou um boi aos deuses em agradecimento por sua descoberta.

Agradecimentos

Os autores agradecem os comentários e sugestões dos professores C.E. Aguiar e F.L. da Silveira, e em particular a este último pela sugestão do título deste trabalho, uma vez que a frase *Paradoxo de Galileu* como sugerido na Ref. [3] pode levar a uma confusão com um paradoxo matemático homônimo, ou mesmo com o paradoxo hidrostático de Galileu [6].

Referências

[1] G. del Monte. Epistolarium of Guidobaldo Del Monte (1545-1607). Centro Internazionale di Studi Urbino e la Prospettiva, 2006, p. 40. Acessível em `http://urbinoelaprospettiva.uniurb.it/biblioteca_eng.asp`. Acesso em 9/4/2013. O trecho original relevante se lê:

> Sia del cerchio BDA il diametro BA eretto all'orizonte, e dal punto A sino alla circonferenza tirale linee utcumque AF. AE, AD, AC; dimostro mobili uguali cadere in tempi uguali, e per la perpendicolare BA, e per piani inclinati secondo le linee CA, DA, EA, FA. Sicché partendosi nell'istesso momento dalli punti B, C, D, E, F, arriveranno in uno stesso momento al termine A, e sia la linea FA piccola quant'esser si voglia.

[2] G. Galilei, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, translated by Henry Crew and Alfonso de Salvio (Dover, New York, 1954). Ver também: G. Galilei *Two New Sciences*, 2nd edition, translated by S. Drake (Wall & Emerson, Toronto, 1989); G. Galilei *Duas Novas Ciências*, traduzido por Letizio e Pablo Mariconda (Nova Stela, São Paulo, 1986); S. Hawking *Os Gênios da Ciência: Sobre os Ombros de Gigantes: As Mais Importantes Idéias e Descobertas da Física e da Astronomia* (Elsevier, Rio de Janeiro,2005).

[3] T.B. Greenslade Jr., Phys. Teach. **46**, 294 (2008).

[4] M.F.B. Francisquini, *O Paradoxo de Galileu no Ensino Médio*, monografia de final de curso de Licenciatura em Física IF-UFRJ. UFRJ, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em formato PDF. O leitor interessado pode solicitar uma cópia à autora.

[5] R.M. Sutton, *Demonstrations Experiments in Physics* (McGraw-Hill, London, 1938), p. 42-43.

[6] F.L. Silveira e A. Medeiros, Cad. Bras. Ens. Fís. **26**, 273 (2009).