Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, nº 2, e2317 (2016)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034

Análise crítica da segunda lei de Newton na forma $\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ com $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e m variável

Critical analisys of Newton's second law in the form $\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ with $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ and variable m

Dêivid Rodrigo da Silva, Paulo Peixoto*

Núcleo de Formação Docente, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, PE, Brasil

Recebido em 30 de dezembro de 2015. Revisado em 3 de fevereiro de 2016. Aceito em 20 de fevereiro de 2016

Na mecânica clássica, a segunda lei de Newton na forma $\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$, com $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, não admite massa variável. Verificamos que há uma certa confusão no meio acadêmico e na literatura quanto a isso, e fizemos um esforço para discutir essa questão de forma tanto acessível como rigorosa. Este artigo também possui um caráter prático, fornecendo auxílio para a resolução de problemas de mecânica clássica em que há variação de massa por acréscimo ou perda de matéria. Discutimos ainda o conceito de massa variável na teoria da relatividade especial − o que pode ser desconsiderado, por quem estiver interessado apenas na mecânica clássica.
Palavras-chave: segunda lei de Newton, momento linear, massa variável, massa relativística.

In classical mechanics, variable mass is not allowed in Newton's second law in the form $\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$, with $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. We think there is some confusion about it both in academia and also in the literature, and we made some effort to discuss this matter in an accessible and rigorous manner. This paper has also a practical nature, providing some help for problem solving in classical mechanics when there is mass variation by increase and/or loss of matter. The concept of variable mass in the special theory of relativity is also discussed − which can be disregarded by those who are interested only in classical mechanics.
Keywords: Newton's second law, linear momentum, variable mass, relativistic mass.

1. Introdução

A mecânica clássica, em sua formulação newtoniana, lagrangeana ou hamiltoniana, é uma teoria que trata do movimento dos corpos em geral, no domínio de dimensões macroscópicas e velocidades não comparáveis à da luz. Ela dá conta, incrivelmente bem, de movimentos tão diversos quanto o giro de um pião, a oscilação de um pêndulo e a translação de um planeta em torno do Sol − isso para não citar um grande número de sistemas muito mais complexos (e não necessariamente periódicos).

Na mecânica clássica, fazemos uso do conceito de *partícula*. Trata-se de uma *abstração* bastante útil, que leva a um desenvolvimento sólido e rigoroso da teoria a partir de uma fundação relativamente simples. Uma partícula seria algo como um corpo, com massa, mas de "tamanho nulo" (um ponto, no sentido geométrico), ou com dimensões infinitesimais (como adequado para a integração de um volume finito). O mais importante: em uma partícula, não há graus de liberdade internos. Assim, uma partícula não gira, nem se deforma, e é precisamente isso que simplifica muito as coisas, ao fazermos uso dessa abstração que é o conceito de partícula. Para estudar o movimento de corpos reais, podemos então modela-los como um sistema de partículas. Se o corpo gira, ou se deforma, é devido ao movimento das partículas que o constituem. (Na ausência de graus de liberdade internos relevantes para o movimento estudado, o corpo pode ser adequadamente modelado como uma partícula única.)

Agora, nessa teoria que chamamos de mecânica clássica, *partículas têm massa constante.* Na próxima seção exploraremos esta afirmação, e veremos também o que nos diz a teoria da relatividade especial sobre a constância ou não constância da massa,

*Endereço de correspondência: phrpeixoto@yahoo.com.br.

em conexão com a segunda lei de Newton. Em seguida, nas seções 3, 4 e 5, nossa atenção estará voltada para problemas da mecânica clássica em que há variação da massa − não de partículas, mas de corpos reais − por acréscimo ou perda de matéria. Concluiremos então o artigo resumindo o que de mais importante buscamos trazer ao leitor.

Podemos adiantar que há muita confusão e divergência, no meio acadêmico e na literatura, sobre a questão da constância ou não constância da massa de partículas e corpos em geral, especialmente quando se discute a segunda lei de Newton, que é o que particularmente nos interessa neste trabalho. Fizemos um esforço na tentativa de trazer um pouco mais de clareza a essa questão. Este artigo também possui um caráter prático, fornecendo auxílio para a resolução de problemas de mecânica clássica em que há variação de massa por acréscimo ou perda de matéria.

2. Sobre a constância ou não constância da massa e a segunda lei de Newton

Na a mecânica clássica, a massa de uma partícula não muda com o tempo, nem com sua posição, velocidade ou qualquer outra variável dinâmica. Assim, a única forma de mudar a massa de um corpo real seria por acréscimo ou perda de matéria, e podemos modelar isso como acréscimo ou perda de partículas. Mas esteja atento(a): isso é o que a teoria afirma, não se trata de uma conclusão definitiva sobre a realidade física. Compreender a diferença é da maior importância, em nossa opinião. Talvez a massa de um corpo, como medida de sua inércia, aumente com sua velocidade (sem que haja acréscimo ou perda de matéria), mas de forma apreciável apenas para velocidades muito altas (do contrário, isso poderia ser facilmente percebido em nosso dia-a-dia, supomos). Se é assim, precisamos de uma outra teoria para descrever o movimento de corpos com tais níveis de velocidade, porque, na mecânica clássica, a massa de uma partícula é constante. Se você mudar isso, terá outra teoria, não a mecânica clássica, entende? (Talvez você esteja se perguntando: e a teoria da relatividade especial? Iremos incluí-la na discussão logo adiante.)

A constância da massa (m) de uma partícula, na mecânica clássica, faz com que a segunda lei de Newton para uma partícula com velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{a}$ (ambas variáveis no tempo, em geral) possa ser expressa, equivalentemente, nas formas

$$\mathbf{F_{res}} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

e

$$\mathbf{F_{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t, \tag{2}$$

em que $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e $\mathbf{F_{res}}$ é a força resultante sobre a partícula. Ou seja, na mecânica clássica, as Eqs. (1) e (2) são totalmente equivalentes. Está realmente incorreto escrevermos, *para uma partícula*, *quando estamos trabalhando com a mecância clássica*,

$$\mathbf{F_{res}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

supondo $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t \neq 0$.[1] Verificamos que isso é desconhecido por muitos estudantes de física, e até mesmo por vários professores (pertencíamos a esses grupos), e essa foi nossa maior motivação para escrevermos este artigo. Além disso, não encontramos na literatura nenhuma discussão com a abordagem que trazemos aqui. (Examinamos livros de nível introdutório [1-7], de nível intermediário [8-10] e de nível avançado [11-12], além de um livro antigo do Sommerfeld [13], e também fizemos uma busca por artigos em revistas de física e de ensino de física.)

E quanto à teoria da relatividade especial? O que ela nos diz sobre a constância ou não constância da massa de uma partícula? Vejamos...

Na relatividade especial, podemos trabalhar com a ideia de que partículas têm massa constante (exceto por uma possível conversão entre massa e energia). Expressando o momento linear de uma partícula de massa (constante) m e com velocidade $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ , \tag{4}$$

em que v é o módulo de $\mathbf{v}$ e c é a velocidade da luz, obtemos consistência entre a transformação de Lorentz e o princípio da conservação do momento linear (o que não ocorre se trabalharmos com $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$), e não queremos abrir mão desse princípio, dada a sua enorme importância para a física como um todo. (Veja, por exemplo, o capítulo sobre relatividade especial do Thornton-Marion [8] ou do Taylor [9].) Com isso, é claro, a segunda lei de Newton não pode mais ser equivalentemente expressa nas formas (1) e

[1] E com $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 0$, por que escreveríamos $\mathbf{F_{res}} = (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v} + m(\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t)$? Só para depois fazermos $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 0$? Em outras palavras: quando você deriva um produto em que um dos fatores é constante, você usa a regra do produto ou a da homogeneidade?

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034

(2). Agora, a segunda lei de Newton deve ser expressa na forma (2), com $\mathbf{p}$ dado pela expressão em (4). (Se você não quiser trabalhar com momento linear, substitua (4) em (2), mas não obterá $\mathbf{F_{res}} = m\mathbf{a}$.)

Embora a massa m, em (4), seja uma constante, podemos optar por uma outra interpretação para essa constante (sim, a princípio trata-se de uma opção mesmo, e isso diz muito sobre como a ciência funciona): podemos manter a definição clássica $\mathbf{p} = \mathcal{M}\mathbf{v}$, mas agora afirmando que a massa $\mathcal{M}$ da partícula é uma função de sua velocidade: $\mathcal{M}(v) = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, e a constante m é então denominada *massa de repouso* da partícula, pois $m = \mathcal{M}(0)$. Observe que, com isso, a equação $\mathbf{F_{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ fica exatamente a mesma, e, assim, trabalhando com a segunda lei de Newton não temos como "saber" se a massa da partícula varia ou não com sua velocidade. Tudo de que precisamos, para que não haja inconsistência entre teoria e experimentos, é que o fator $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ multiplique $m\mathbf{v}$, na expressão que define $\mathbf{p}$; mas se m é interpretada simplesmente como a massa da partícula, para qualquer velocidade menor que c, ou como sua massa de repouso (sendo, neste caso, a massa $\mathcal{M}$ denominada *massa relativística*), a escolha é livre − ao menos quando se trata da segunda lei de Newton. No que diz respeito à teoria da relatividade como um todo, a questão "massa *versus* massas relativística e de repouso" ainda suscita discussões. Na visão de Okun [14], por exemplo, os conceitos de massa relativística e massa de repouso não são interessantes porque não são compatíveis com a linguagem padrão (moderna) da teoria da relatividade, em que se faz uso de quadrivetores, e, em sua opinião, impedem a compreensão e a aprendizagem da teoria (em sua forma moderna) por iniciantes. (Veja também o trabalho de Adler [15].) Para Thornton e Marion [8], trabalhar com os conceitos de massa relativística e massa de repouso é, hoje, algo antiquado, e pode levar a equívocos com o uso de expressões clássicas. Por exemplo, a expressão relativística para a energia cinética de uma partícula não é $\mathcal{M}v^2/2$, com $\mathcal{M} = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, mas $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2$, que é algo bem diferente. (Para $v \ll c$ obtemos, em primeira aproximação, $mv^2/2$.) Taylor [9] e outros autores fazem uma crítica semelhante. Mas ainda há defesa do uso dos conceitos de massa relativística e massa de repouso atualmente (veja, por exemplo, o artigo de Sandin [16]). Em cada caso, vantagens e desvantagens podem ser apresentadas, mas não há, na teoria da relatividade, uma alternativa única e definitiva para o conceito de massa de uma partícula.[2] Contudo, na mecânica clássica, partículas têm massa constante. A teoria é assim.

Mas digamos que você insista na ideia de uma partícula (não um corpo real) com massa $\mathcal{M}$ variável, na mecânica clássica. (Como dissemos, não seria mais a mecânica clássica, mas vamos examinar no que isso dá.) Pois bem, neste caso, provavelmente teríamos uma relação entre $\mathcal{M}$ e v do tipo

$$\mathcal{M}(v) = m\,\xi(v), \tag{5}$$

em que $m = \mathcal{M}(0)$ e ξ é uma função da velocidade da partícula (na verdade, de seu módulo), com $\xi(0) = 1$. Pensamos tratar-se de uma hipótese razoável, se você insiste na ideia de partícula com massa variável na mecânica clássica, pois não esperaríamos que a massa de uma partícula fosse uma função explícita de sua posição, nem do tempo. Além disso, não iniciaríamos com uma relação entre $\mathcal{M}$ e v que fosse de um tipo mais complicado do que o que encontramos na relatividade especial. Porém, temos em (5) um problema bastante evidente: $\xi(v)$ deve ser adimensional, e como obter isso sem a presença de uma contante com unidade de velocidade, pela qual dividiríamos v? Ao contrário da transformação de Lorentez (usada na teoria da relatividade), em que temos a velocidade da luz (c), na transformação de Galileu (e se estamos falando de mecânica clássica, fazemos uso da transformação de Galileu) não há nenhuma constante com unidade de velocidade. Assim, como você resolveria este problema?

Tratando-se de mecânica clássica e variação de massa, o que nos resta então é analisar problemas em que a massa de um corpo varia por acréscimo ou perda de matéria. Se não há graus de liberdade internos relevantes para o problema, podemos modelar o corpo como uma partícula, com sua massa variando através de colisões com ou ejeções de outras partículas, com uma nova partícula modelando o corpo após cada colisão ou ejeção (novamente, se os graus de liberdade internos não forem relevantes

[2]Não deixaremos de expressar nossa opinião: os conceitos de massa relativística e massa de repouso podem ser interessantes em textos de divulgação científica, escritos para um público leigo, desde que não sejam expostos como "constatações experimentais" ou "verdades científicas", mas, para estudantes de física, pensamos ser bem mais vantajoso o conceito de massa (m) como uma propriedade da partícula, independente de sua velocidade − especialmente se o instrutor for trabalhar com a formulação de quadrivetores.

para o problema). É disso que tratam as seções 3, 4 e 5. *Veremos que o desenvolvimento apresentado no conjunto de igualdades (3) não está correto, na mecânica clássica, nem mesmo para corpos em que há variação de massa por acréscimo ou perda de matéria.* [Observe que, na teoria da relatividade, com os conceitos de massa relativística e massa de repouso, podemos fazer uso do desenvolvimento apresentado no conjunto de igualdades (3) (substituindo m por $\mathcal{M}$, já que escolhemos denotar massa relativística por $\mathcal{M}$). Na mecânica clássica, não.]

Começaremos considerando variação de massa por acréscimo de matéria, modelando o corpo que sofre variação de massa como uma partícula, e também modelando como uma partícula o elemento de massa que está sendo acrescentado ao corpo.

3. Corpo com massa variável por acréscimo ou perda de matéria

A Fig. 1 ilustra a colisão entre duas partículas − uma com massa finita m e a outra com massa infinitesimal $\mathrm{d}m$ − resultando na formação de uma nova partícula com massa $m+\mathrm{d}m$. Cada partícula é guiada por um determinado conjunto de forças até o ponto de colisão.

Imediatamente antes da colisão, as partículas de massas m e $\mathrm{d}m$ têm velocidades $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, respectivamente. Encarando a colisão como um acréscimo infinitesimal de matéria à partícula de massa finita, é razoável expressarmos a velocidade da nova partícula logo após a colisão como $\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}$. Nossa intuição física relacionada ao conceito de inércia nos diz (veja se você concorda) que devemos esperar que a colisão entre uma partícula com massa finita e uma partícula com massa infinitesimal (ambas com velocidades finitas e bem menores que a velocidade da luz) perturbe infinitesimalmente a velocidade da primeira.

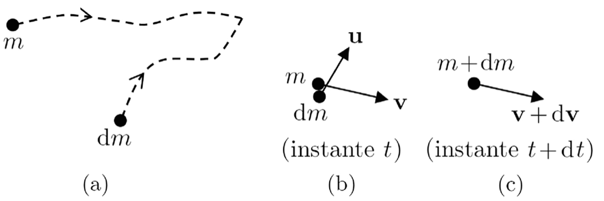

Figura 1: (a) partículas de massas m e $\mathrm{d}m$ rumo à colisão, (b) velocidades das partículas imediatamente antes da colisão e (c) velocidade da partícula composta logo após a colisão.

Agora vamos concentrar nossa atenção no intervalo de tempo infinitesimal $\mathrm{d}t$ em que se dá a colisão − ou seja, no intervalo de tempo infinitesimal $\mathrm{d}t$ em que se dá o acréscimo de massa $\mathrm{d}m$ à partícula de massa m.

Comecemos pela partícula de massa $\mathrm{d}m$. Seja $\mathbf{f_{res}}$ a força resultante sobre essa partícula no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$. A segunda lei de Newton nos dá:

$$\mathbf{f_{res}} = (\mathrm{d}m)\frac{\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v} - \mathbf{u}}{\mathrm{d}t}.$$

Temos em mente que a partícula de massa $\mathrm{d}m$ mantém sua identidade ao menos no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, e de tal forma que sua velocidade imediatamente após a colisão é $\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}$ (lembre-se disso em futuras aplicações). Observe que a aceleração da partícula no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ é praticamente infinita − como esperado, pois ela sofre uma mudança abrupta de velocidade em um intervalo de tempo infinitesimal. Contudo, porque a massa da partícula é infinitesimal, o produto *massa* $\times$ *aceleração* é finito, e, portanto, a força $\mathbf{f_{res}}$ é finita.

Pausa para comentário. É comum que físicos encarem diferenciais, como $\mathrm{d}m$ e $\mathrm{d}t$, como quantidades muito, muito pequenas (e usamos expressões como "massa *infinitesimal*" e "intervalo de tempo *infinitesimal*"). Embora essa ideia careça de rigor matemático, costuma ser bastante útil. O que precisamos ter em mente é que, quase sempre, em algum momento chegamos a uma integral ou a uma equação diferencial. Nesse processo, geralmente pensamos as variáveis envolvidas como grandezas contínuas. Não foi por acaso que usamos "m" para denotar a massa da primeira partícula envolvida na colisão e "$\mathrm{d}m$" para denotar a massa da segunda: a massa da nova partícula formada fica expressa como $m + \mathrm{d}m$, e daí podemos encarar $\mathrm{d}m$ como uma variação infinitesimal da massa da primeira partícula.

Continuando, a força resultante $\mathbf{f_{res}}$ não necessariamente envolve apenas a força de interação $\mathbf{f}$ entre as partículas de massas m e $\mathrm{d}m$; porém, as demais forças sobre a partícula de massa $\mathrm{d}m$ (caso existam) são desprezíveis em comparação com $\mathbf{f}$, pois elas não produzem uma aceleração infinitamente grande. Por isso, podemos substituir $\mathbf{f_{res}}$ por $\mathbf{f}$ na igualdade anterior. Além disso, denotando a diferença $(\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}) - \mathbf{u}$ por $\mathbf{v_{rel}}$ (discutiremos o significado

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034

desse vetor logo adiante), obtemos:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}. \tag{6}$$

Usando a definição $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}} \equiv (\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v})-\mathbf{u}$, temos que $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}$ é a velocidade da partícula de massa $m + \mathrm{d}m$, logo após a colisão, em relação à partícula de massa $\mathrm{d}m$, imediatamente antes da colisão (veja Fig. 1). São velocidades que se dão em instantes distintos (separados apenas por um intervalo de tempo infinitesimal $\mathrm{d}t$, contudo distintos), mas tudo bem. No entanto, é mais prático definirmos $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}$ como $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, que é a velocidade da partícula de massa m em relação à partícula de massa $\mathrm{d}m$ imediatamente antes da colisão. A questão é: é legítimo usarmos a definição $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}$, em vez da definição $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}} \equiv (\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}) - \mathbf{u}$? É legítimo sim, desde que tenhamos em mente que uma partícula de massa *infinitesimal* $\mathrm{d}m$ está colidindo inelasticamente com uma partícula de massa finita m no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, e que, com isso, a partícula de massa m sofre uma variação de velocidade *infinitesimal* $\mathrm{d}\mathbf{v}$, que é desprezível se a diferença $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ é finita (e se a diferença $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ é infinitesimal temos $\mathbf{f}_{\mathbf{res}}$ infinitesimal e, portanto, irrelevante para o problema). Contudo, como veremos na próxima seção, embora a Eq. (9) − a equação central desta seção, logo adiante − tenha sido derivada neste trabalho para sistemas sofrendo variação contínua de massa, ela pode ser aplicada mesmo a sistemas em que há variação abrupta de massa. *No caso de um aumento abrupto de massa* (trataremos o caso de uma diminuição abrupta de massa adiante)*, devemos substituir, em (9),* $\mathrm{d}m$ *por* Δm*,* $\mathrm{d}\mathbf{v}$ *por* $\Delta\mathbf{v}$ *e usar* $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}} \equiv (\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})-\mathbf{u}$ (porque como, neste caso, não temos mais uma variação infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{v}$ na velocidade da partícula de massa m, mas uma variação finita $\Delta\mathbf{v}$, não temos a opção de definir com sucesso $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}$ como $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, porque $\Delta\mathbf{v}$ não é desprezível). Mas para sistemas que não sofrem variação abrupta de massa, vamos manter a definição

$$\mathbf{v}_{\mathbf{rel}} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}. \tag{7}$$

(Nota: por "variação abrupta de massa" queremos dizer uma variação Δm que já não é infinitesimal, mas que se dá em um intervalo de tempo muito pequeno, modelado como um intervalo de tempo infinitesimal $\mathrm{d}t$.)

Passemos à partícula de massa m. Seja $\mathbf{F}_{\mathbf{res}}$ a força resultante sobre essa partícula no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$. A segunda lei de Newton nos dá:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = m\frac{\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v} - \mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

É claro que a força resultante $\mathbf{F}_{\mathbf{res}}$ inclui a força de interação $\mathbf{f}$ entre as partículas de massas m e $\mathrm{d}m$. No caso, sendo $\mathbf{f}$ a força que a partícula de massa m exerce sobre a partícula de massa $\mathrm{d}m$, o correto é dizer, de acordo com a terceira lei de Newton, que $\mathbf{F}_{\mathbf{res}}$ inclui a força $-\mathbf{f}$. Convém então definirmos $\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}}$ como a diferença entre $\mathbf{F}_{\mathbf{res}}$ e $-\mathbf{f}$, de modo que

$$\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = \mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}} + (-\mathbf{f}).$$

Ou seja, pense em $\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}}$ como a força resultante sobre a partícula de massa m, no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, excluída a força de interação $-\mathbf{f}$ exercida pela partícula de massa $\mathrm{d}m$. O que fizemos, ao escrevermos a igualdade acima, foi explicitar a força $-\mathbf{f}$, entre as que compõem $\mathbf{F}_{\mathbf{res}}$; o que sobra é $\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}}$. Combinando as duas últimas igualdades, obtemos:

$$\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}} = \mathbf{f} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

Agora, substituindo a Eq. (6) na Eq. (8), obtemos:

$$\boxed{\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_{\mathbf{rel}} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.} \tag{9}$$

Precisamos discutir esse resultado.

Vamos começar revisando o significado de cada elemento da Eq. (9). $\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}}$ é a força resultante sobre uma partícula de massa m que se move com velocidade $\mathbf{v}(t)$ (no sistema de referência inercial adotado), excluída a força exercida por um elemento de massa $\mathrm{d}m$ que está sendo acrescentado à mesma no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ (com $\mathrm{d}m > 0$, é claro). A grande vantagem da Eq. (9) é que você não precisa se preocupar com o cálculo dessa força de interação, porque esse cálculo já foi feito, e resultou na presença do termo $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}$ em (9). De fato, essa força é dada por $-(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}$ (em que $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}$ é a velocidade da partícula de massa m em relação à partícula de massa $\mathrm{d}m$ imediatamente antes da colisão), e reescrevendo a Eq. (9) como

$$\underbrace{\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}} + \left(-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}\right)}_{\mathbf{F}_{\mathbf{res}}} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

temos a boa e velha $\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = m\mathbf{a}$. Em outras palavras, na Eq. (9) realmente estamos fazendo uso da segunda lei de Newton na forma $\mathbf{F_{res}} = m\mathbf{a}$, mas com a comodidade de já termos explicitado, na composição da força resultante $\mathbf{F_{res}}$ *sobre a partícula de massa* m, a força $-(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel}}$ exercida pela partícula de massa dm. O que sobra de $\mathbf{F_{res}}$ está denotado como $\mathbf{F^{\star}_{res}}$. Trata-se de um formato bastante adequado a uma série de aplicações interessantes (algumas exploradas na próxima seção), em que um corpo, modelado como uma partícula, tem sua massa variada por acréscimo ou perda de matéria.

Não podemos deixar de notar que temos na Eq. (9) algo muito parecido com o que encontramos na sequência de igualdades (3), mas há entre (9) e (3) diferenças cruciais. Em primeiro lugar, onde em (3) temos $\mathbf{v}$, em (9) temos $\mathbf{v_{rel}}$. Apenas no referencial em que $\mathbf{u} = 0$ temos $\mathbf{v_{rel}} = \mathbf{v}$ (veja Eq. (7)). Contudo, mesmo nesse referencial (o único no qual o desenvolvimento em (3) seria válido, contrariando o princípio da relatividade de Galileu), ainda temos outra diferença crucial entre (3) e (9): em (3), $\mathbf{F_{res}}$ seria a soma de *todas* as forças que atuam sobre a partícula de massa m (e, consequentemente, o fator dm/dt não poderia estar associado a variação de massa por acréscimo ou perda de matéria, porque isso envolve uma interação − exceto no caso particular em que $\mathbf{v_{rel}} = 0$), enquanto em (9) − deixamos claro − $\mathbf{F^{\star}_{res}}$ não inclui a força de interação com a partícula de massa infinitesimal dm. Aliás, aqui está a origem de um equívoco frequente: alguns autores, como Alonso e Finn [4], fazem uso das igualdades em (3) dando a $\mathbf{F_{res}}$, inadvertidamente, o significado de $\mathbf{F^{\star}_{res}}$, e isso pode confundir bastante o leitor. Ou seja, eles na verdade fazem uso da Eq. (9), com $\mathbf{v_{rel}} = \mathbf{v}$, mas com o mesmo "$\mathbf{F_{res}}$" de sempre.

Muito bem, até aqui só trabalhamos com o caso em que m varia por acréscimo de matéria (d$m > 0$). E se a partícula de massa m estiver sofrendo perda de matéria (d$m < 0$)?

A Fig. 2 ilustra a perda de massa sofrida por uma partícula com massa inicial m através da ejeção, no intervalo de tempo dt, de uma partícula com massa infinitesimal $\mathrm{d}\widetilde{m}$ − restando, da partícula original, uma partícula com massa $m - \mathrm{d}\widetilde{m}$. Nesse processo, a variação de massa da partícula original é $\mathrm{d}m = (m - \mathrm{d}\widetilde{m}) - m = -\mathrm{d}\widetilde{m}$ (< 0, pois $\mathrm{d}\widetilde{m} > 0$). Podemos então substituir $\mathrm{d}\widetilde{m}$ por $|\mathrm{d}m|$ − e o faremos, a partir deste ponto.

Imediatamente antes da ejeção da partícula de massa $|\mathrm{d}m|$, a partícula original de massa m possui velocidade $\mathbf{v}$. Logo após a ejeção, a partícula de

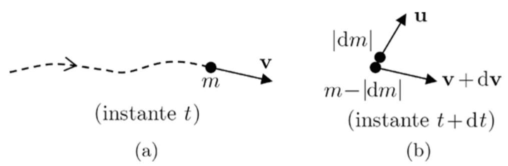

Figura 2: (a) velocidade da partícula de massa m imediatamente antes da perda de matéria e (b) separação da partícula original em duas: uma com massa infinitesimal $\mathrm{d}\widetilde{m} = |\mathrm{d}m|$ e velocidade inicial $\mathbf{u}$ e a outra com massa $m - \mathrm{d}\widetilde{m} = m - |\mathrm{d}m|$ e velocidade inicial $\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}$.

massa $|\mathrm{d}m|$ tem velocidade $\mathbf{u}$ (no mesmo referencial em que $\mathbf{v}$ é calculada − lembre-se disso para evitar confusão, porque alguns autores usam "$\mathbf{u}$" para denotar uma velocidade relativa à partícula de massa m). Porque a partícula ejetada possui massa infinitesimal, enquanto a partícula original possui massa finita, é razoável expressarmos a velocidade da partícula *restante* (de massa $m - |\mathrm{d}m|$), logo após a ejeção, como $\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}$, concorda?

Aplicando a segunda lei de Newton à partícula de massa $|\mathrm{d}m|$, para o intervalo de tempo dt, obtemos:

$$\mathbf{f_{res}} = |\mathrm{d}m|\frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Temos em mente que a partícula de massa $|\mathrm{d}m|$ mantém sua identidade ao menos no intervalo de tempo dt, e de tal forma que sua velocidade imediatamente antes da ejeção é $\mathbf{v}$ (lembre-se disso em futuras aplicações). A força resultante $\mathbf{f_{res}}$ não necessariamente envolve apenas a força de interação $\mathbf{f}$ entre as partículas de massas $m - |\mathrm{d}m|$ e $|\mathrm{d}m|$; porém, as demais forças sobre a partícula de massa $|\mathrm{d}m|$ (caso existam) são desprezíveis em comparação com $\mathbf{f}$, pois elas não produzem uma aceleração infinitamente grande (é o mesmo argumento usado no caso anterior, em que d$m > 0$). Logo, podemos substituir $\mathbf{f_{res}}$ por $\mathbf{f}$ na última igualdade, obtendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= |\mathrm{d}m|\frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel}}, \end{aligned} \tag{10}$$

em que $\mathbf{v_{rel}} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}$ é a velocidade da partícula de massa m, imediatamente antes da ejeção, em relação à partícula de massa $|\mathrm{d}m|$, logo após a ejeção. Note que estamos usando para $\mathbf{v_{rel}}$ a mesma expressão apresentada em (7), mas, aqui, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ têm significados

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034

ligeiramente diferentes (basta comparar as Figs. 1 e 2). A propósito, *no caso de uma diminuição abrupta da massa do corpo de massa* m*, devemos substituir, em (9),* $\mathrm{d}m$ *por* Δm*,* $\mathrm{d}\mathbf{v}$ *por* $\Delta\mathbf{v}$*, mas continuar usando* $\mathbf{v_{rel}} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}$*, porque essa é a expressão que aparece em (10).*

Aplicando a segunda lei de Newton à partícula de massa $m - |\mathrm{d}m|$, para o intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, obtemos (procure visualizar, na Fig. 2, as partículas de massas $m - |\mathrm{d}m|$ e $|\mathrm{d}m|$ juntas no instante t, ambas se movendo com velocidade $\mathbf{v}$, compondo a partícula de massa m):

$$\mathbf{F_{res}} = (m - |\mathrm{d}m|)\frac{\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v} - \mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Como, na diferença $m - |\mathrm{d}m|$, $|\mathrm{d}m|$ é absolutamente desprezível (*o que não é verdade se o corpo de massa* m *sofre uma diminuição abrupta de massa – e, nesse caso, devemos usar* $|\Delta m|$ *no lugar de* $|\mathrm{d}m|$), podemos reescrever:

$$\mathbf{F_{res}} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Como antes, podemos escrever:

$$\mathbf{F_{res}} = \mathbf{F^{\star}_{res}} + (-\mathbf{f}),$$

em que $\mathbf{f}$ é a força, expressa em (10), exercida pela partícula de massa $m - |\mathrm{d}m|$ sobre a partícula de massa $|\mathrm{d}m|$, e $\mathbf{F^{\star}_{res}}$ é a força resultante sobre a partícula de massa $m - |\mathrm{d}m|$, no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, excluída a força de interação $-\mathbf{f}$ exercida pela partícula de massa $|\mathrm{d}m|$. Juntando tudo isso, chegamos à Eq. (9).

Resumindo: a Eq. (9) vale tanto para o caso em que a massa m do corpo (modelado como uma partícula) varia por acréscimo de matéria como para o caso em que ela varia por perda de matéria. No primeiro caso temos $\mathrm{d}m > 0$, é claro, e a massa do corpo aumenta no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ pelo acréscimo de uma partícula de massa $\mathrm{d}m$, enquanto no segundo caso temos $\mathrm{d}m < 0$, e a massa do corpo diminui no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ pela perda de uma partícula de massa $|\mathrm{d}m|$. Em ambos os casos temos $\mathbf{v_{rel}} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, mas com os significados de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ indicados pelas Figs. 1 e 2, respectivamente. Pelas razões já expostas, *no caso de um aumento abrupto* (*não infinitesimal*) *da massa do corpo de massa* m (*no intervalo de tempo* dt) *devemos usar* $\mathbf{v_{rel}} = (\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) - \mathbf{u}$*, e no caso de uma diminuição abrupta da massa do corpo de massa* m *devemos usar, no último termo da Eq. (9),* $m - |\Delta m|$ *no lugar de* m. [Você pode buscar uma forma de se lembrar dessas modificações na Eq. (9), mas sugerimos que não se preocupe com isso, porque geralmente é mais fácil resolver problemas em que há variações abruptas de massa analisando a variação do momento linear do sistema. Os casos de variações abruptas de massa foram incluídos nesta seção (e um exemplo é explorado no Problema 3 da próxima seção) mais para mostrar a consistência do desenvolvimento apresentado.]

É hora de fazermos uso da Eq. (9).

4. Aplicações da equação (9)

Com a Eq. (9) podemos resolver, com uma mesma abordagem, vários problemas envolvendo variação de massa por acréscimo ou perda de matéria. Selecionamos alguns desses problemas para esta seção, e através de sua resolução temos uma oportunidade de aprofundar nossa compreensão da Eq. (9). Contudo, adiantamos que em alguns casos (mas não em todos os casos!) a resolução do problema é mais direta com o uso do teorema da conservação do momento linear (que, na mecânica clássica, é uma consequência das leis de movimento de Newton, como a Eq. (9)). Outro ponto que merece destaque é que as partículas de massa m nas Figs. 1 e 2 estarão modelando corpos macroscópicos – o que é algo legítimo, se não há nos mesmos rotações ou deformações apreciáveis de qualquer natureza.

Problema 1: Uma caixa aberta, com massa inicial m_0, se move com velocidade constante $\mathbf{v}_0$ sobre um piso horizontal, sem atrito. A partir de um certo ponto, a caixa recebe areia oriunda de um funil em repouso em relação ao piso. No interior da caixa há pequenos compartimentos, de forma que a areia que atinge determinada região da mesma ali permanece. O experimento está esquematizado na Fig 3. Sabendo que a areia é depositada na caixa a uma taxa R (em gramas por segundo, por exemplo), não necessariamente constante, calcule a aceleração da caixa para o instante em que sua massa é m e sua velocidade é $\mathbf{v}$.

Solução: Trabalhemos com um referencial fixo em relação ao piso. Como a aceleração da caixa é horizontal, só nos interessa a componente horizontal da Eq. (9). Definindo o eixo x como o eixo com a direção e o sentido de $\mathbf{v}$, na Fig. 3, obtemos

$$F^{\star}_{res\,x} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v_{rel\,x} + m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},$$

em que m é a massa total da caixa no instante considerado, incluindo a massa da areia que já foi nela depositada. Nesta igualdade, $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = a_x$ e $v_{rel\,x} = v$, pois a areia em queda não possui componente horizontal de velocidade. Como não há atrito e a caixa não interage com mais nada na direção x além da areia, temos $F^{\star}_{res\,x} = 0$. Daí, substituindo $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ por R (tomando seu valor para o instante considerado) obtemos $a_x = -Rv/m$. Vetorialmente, temos:

$$\mathbf{a} = -\frac{R}{m}\,\mathbf{v}. \tag{11}$$

Comentários:

1. Conhecendo a função $R(t)$, em princípio podemos calcular $m(t)$ $\left(= m_0 + \int_0^t R(t')\mathrm{d}t'\right)$, e com isso temos em (11) uma equação diferencial bem definida para $\mathbf{v}$. Resolvendo essa equação (sugerimos que tente), você irá obter $\mathbf{v}(t) = m_0\mathbf{v}_0/m(t)$ – que não é nada surpreendente, se você conhece o teorema da conservação do momento linear.

2. Qual é a importância dos pequenos compartimentos no interior da caixa? Como dito no enunciado, eles fazem com que a areia que atinge determinada região da caixa ali permaneça, e isso nos permite aplicar a Eq. (9) com segurança na resolução deste problema, porque em sua obtenção supusemos que a partícula de massa $\mathrm{d}m$ acrescentada ao corpo de massa m no instante t fica com a mesma velocidade desse corpo já no instante $t + \mathrm{d}t$ (veja Fig. (1)). Bem, rigorosamente teríamos que trabalhar com compartimentos com tamanho da ordem do tamanho de um grão de areia, mas isso não é necessário em um experimento com fins didáticos; um tamanho da ordem de 0,5 cm a 1,0 cm deve ser suficiente, trabalhando-se com uma caixa com 30 cm de comprimento.

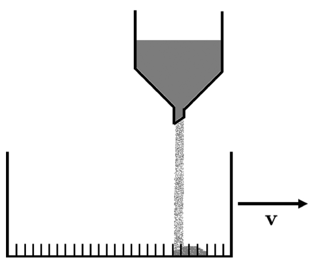

Figura 3: Caixa recebendo areia a uma taxa R (Problema 1). Não há atrito entre a caixa e o piso horizontal sobre o qual ela se move.

3. Podem ser exploradas uma série de variações deste problema. Por exemplo, podemos calcular com que força $\mathbf{F}$ devemos puxar horizontalmente a caixa para que ela se mova com velocidade constante $\mathbf{v}$. [Resposta: $\mathbf{F} = R\mathbf{v}$.] Adicionalmente, fazendo uso de um dinamômetro, podemos realizar um experimento com diferentes valores de R e v, comparando os valores obtidos para F com as previsões teóricas. Seria particularmente interessante repetir o experimento com a caixa sem os pequenos compartimentos internos; nesse caso, a expectativa é que a concordância entre previsões teóricas e resultados experimentais diminua, não acha? Nossa expectativa é que haja uma redução nos valores obtidos experimentalmente para F, especialmente para velocidades mais altas, porque muitos grãos de areia teriam uma aceleração menor pela ausência dos compartimentos que os arrastariam imediatamente.

4. Uma outra variação do Problema 1 – uma das mais interessantes – é fazer o funil se mover horizontalmente com a mesma velocidade da caixa (mas sem estar conectado a ela). Nesse caso temos $v_{rel\,x} = 0$ e, com isso, $\mathbf{a} = 0$. Assim, não é o aumento da massa de areia dentro da caixa que a faz desacelerar, mas o impacto horizontal da caixa com a areia em queda: a caixa empurra a areia para a direita e, de acordo com a terceira lei de Newton, a areia empurra a caixa para a esquerda. Isso não ocorre quando a areia atinge a caixa com a mesma componente horizontal de velocidade que ela, concorda? Observe que essa diferença não teria sido prevista com o uso da sequência de igualdades (3), na qual encontramos $\mathbf{v}$ em vez de $\mathbf{v_{rel}}$! Isso mostra, de uma outra forma, que a sequência de igualdades (3) está realmente incorreta, pois ela não distingue como a partícula de massa $\mathrm{d}m$ é acrescentada à partícula de massa m (além do problema, já comentado, em seu membro mais à esquerda). [Uma observação adicional:

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034

é claro que, havendo atrito entre a caixa e o piso, o aumento da massa de areia dentro da caixa leva ao aumento da força de atrito, devido ao aumento da força normal entre a caixa e o piso, resultando em uma maior desaceleração da caixa – mesmo no caso em que $v_{relx} = 0$.]

Problema 2: Neste problema analisaremos o movimento de um foguete a propulsão, em sua versão mais simples. Considere um foguete no espaço exterior, livre da ação de qualquer campo gravitacional apreciável, movendo-se em linha reta. No instante t_0 esse foguete possui massa total m_0 (incluindo o combustível em seu interior) e velocidade de módulo v_0, e ejeta combustível com velocidade constante, relativamente ao mesmo, de módulo u_e (denominada "velocidade de exaustão"). Com isso, a massa m do foguete é uma função decrescente do tempo. Calcule o módulo da velocidade do foguete, para $t \geq t_0$, em função de $m(t)$.

Solução: Trabalhemos com um sistema de referência inercial em que o movimento do foguete se dá na direção e no sentido do eixo x (veja Fig. 4). Tomando a componente x da Eq. (9), aplicada ao foguete, obtemos

$$F^{\star}_{resx} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v_{relx} + m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}.$$

Nesta equação temos $F^{\star}_{resx} = 0$, pois entre os instantes t e $t + \mathrm{d}t$ nada além da porção infinitesimal de combustível ejetado (de massa $|\mathrm{d}m|$) interage com o foguete. Multiplicando ambos os membros por $\mathrm{d}t$, segue então a igualdade

$$(\mathrm{d}m)\, v_{relx} + m\, \mathrm{d}v_x = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\mathrm{d}v_x = -v_{relx}\frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

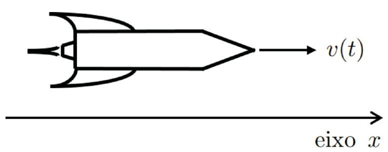

Figura 4: Foguete no espaço exterior.

Como v_{relx} – a componente x da velocidade da partícula de massa m (no caso, o foguete) relativamente à partícula de massa $|\mathrm{d}m|$ (no caso, o elemento de combustível ejetado) – é uma quantidade positiva, temos $v_{relx} = u_e$, concorda? Afinal, em módulo, a velocidade do foguete em relação ao combustível ejetado (v_{relx}) é igual à velocidade do combustível ejetado em relação ao foguete (u_e). [Se você preferir, podemos chegar à igualdade $v_{relx} = u_e$ de outra forma: $v_{relx} = v_x - u_x$, em que u_x é a componente x da velocidade do elemento de combustível ejetado, tomando-se o referencial inercial adotado; e $u_{relx} = u_x - v_x$; logo, $v_{relx} = -u_{relx}$; mas como $u_{relx} < 0$, temos $v_{relx} = |u_{relx}| = u_e$.] Assim, substituindo v_{relx} por u_e, e lembrando que u_e é constante, uma integração direta nos dá

$$v(t) = v_0 + u_e \ln\left[\frac{m_0}{m(t)}\right]. \qquad (12)$$

Comentários:

1. Conhecendo a taxa $R(t)$ com que o combustível é ejetado, em princípio podemos calcular $m(t)$ $\left(= m_0 - \int_0^t R(t')\mathrm{d}t'\right)$ e substituir a expressão resultante na Eq. (12) para obtermos a velocidade do foguete como uma função explícita do tempo.

2. Chamamos de *força de propulsão do foguete* a força exercida pelo combustível que está sendo ejetado. Deve estar claro que o módulo dessa força (F_{prop}) é dado pelo módulo do termo $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)v_{relx}$. Como $v_{relx} = u_e$, temos

$$F_{prop} = \left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| u_e = R(t)\, u_e.$$

Assim, a força de propulsão do foguete é proporcional à *taxa de queima do combustível* e à velocidade de exaustão (e essa expressão é válida mesmo que haja outras forças atuando sobre o foguete). Perceba que se o combustível fosse simplesmete liberado pelo foguete ($u_e = 0$) não haveria força de propulsão e, consequentemente, o foguete se moveria com velocidade constante no espaço exterior (faça $u_e = 0$ na Eq. (12)).

3. Uma interessante variação desse problema consiste no cálculo da velocidade de um foguete em movimento vertical ascendente na presença de um campo gravitacional $\mathbf{g}$. Considerando $\mathbf{g}$ constante e desprezando a resistência do ar, trabalhando com a Eq. (9) você deve obter

$$v(t) = v_0 - gt + u_e \ln\left[\frac{m_0}{m(t)}\right]. \quad (13)$$

Observe que a diferença entre as expressões em (12) e (13) se dá pela presença do termo $-gt$ nesta última. Com $g = 0$, temos o resultado anterior. Em um problema um pouco mais realista, teríamos que considerar a resistência do ar e a variação do campo gravitacional com a altitude. Com a Eq. (9) é fácil obter a equação diferencial para o foguete mesmo nesse caso, mas possivelmente seria necessário o uso de um método numérico para o cálculo de $v(t)$.

Problema 3: Uma partícula com massa m_1 e velocidade $\mathbf{v_1}$ colide inelasticamente com uma partícula com massa m_2 e velocidade $\mathbf{v_2}$. Calcule a velocidade $\mathbf{V}$ de translação do objeto resultante, com massa $m_1 + m_2$.

Solução: Temos aqui um caso de variação abrupta de massa, se considerarmos que a partícula de massa m_2 está sendo "adicionada" à partícula de massa m_1 em um intervalo de tempo muito pequeno, modelado como um intervalo de tempo infinitesimal dt. Assim, a partícula com massa m_1 e velocidade $\mathbf{v_1}$ faz o papel, na Fig. 1, da partícula com massa m e velocidade $\mathbf{v}$, enquanto a partícula com massa m_2 e velocidade $\mathbf{v_2}$ faz o papel da partícula com massa dm e velocidade $\mathbf{u}$. Como mostrado na seção anterior, no caso de um aumento abrupto de massa devemos substituir, em (9), dm por Δm, d$\mathbf{v}$ por $\Delta\mathbf{v}$ e usar $\mathbf{v_{rel}} \equiv (\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) - \mathbf{u}$, em vez de $\mathbf{v_{rel}} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Neste problema, especificamente, devemos substituir, na Eq. (9), m por m_1, dm por m_2, d$\mathbf{v}$ por $\mathbf{V} - \mathbf{v_1}$ e usar $\mathbf{v_{rel}} = \mathbf{V} - \mathbf{v_2}$. Como, neste problema, $\mathbf{F^{\star}_{res}} = 0$, multiplicando a Eq. (9) por dt obtemos, após todas essas substituições,

$$m_2(\mathbf{V} - \mathbf{v_2}) + m_1(\mathbf{V} - \mathbf{v_1}) = 0.$$

Resolvendo para $\mathbf{V}$, obtemos

$$\mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}}{m_1 + m_2},$$

que é um resultado bem conhecido.

Comentário: Enquanto (em nossa opinião) os problemas 1 e 2 têm resolução mais simples com o uso da Eq. (9) que com o uso do teorema da conservação do momento linear, este Problema 3 tem, certamente, solução bem mais direta pela análise da conservação do momento linear do sistema. A razão dele estar aqui nesta seção é, como dito no final da seção anterior, para mostrar a consistência do desenvolvimento que levou à Eq. (9).

5. Extensão para sistemas de partículas

Deduzimos a Eq. (9) trabalhando com duas partículas: uma de massa m e outra de massa $|\mathrm{d}m|$ (veja Figs. 1 e 2). Contudo, nos problemas 1 e 2 da seção anterior não trabalhamos com partículas, e sim com corpos sendo modelados como partículas (o carrinho e o foguete, respectivamente). Conforme comentamos no início daquela seção, isso é algo legítimo se não há nesses corpos rotações ou deformações apreciáveis. Iniciaremos esta seção mostrando por quê.

Logo no início da graduação, em uma disciplina introdutória de mecânica newtoniana, aprendemos a deduzir a chamada segunda lei de Newton para um sistema de partículas:

$$\mathbf{F^{ext}_{res}} = m\,\mathbf{a_{cm}}, \quad (14)$$

em que $\mathbf{F^{ext}_{res}}$ é a resultante das forças *externas* que atuam no sistema, m é a massa total do sistema e $\mathbf{a_{cm}}$ é a aceleração do centro de massa do sistema. Se tal sistema constitui um corpo rígido, e se esse corpo rígido não sofre rotação, podemos − sem ambiguidade − expressar $\mathbf{a_{cm}}$ em (14) como

$$\mathbf{a_{cm}} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t, \quad (15)$$

em que $\mathbf{v}$ é a velocidade de qualquer parte do corpo (já que não há rotação ou deformação apreciável no mesmo). Adicionalmente, podemos expressar, conforme nosso interesse aqui, $\mathbf{F^{ext}_{res}}$ como a soma da força exercida por uma partícula de massa infinitesimal $|\mathrm{d}m|$ sendo acrescentada ao ou ejetada do corpo rígido com a resultante de todas as demais forças externas atuantes nesse corpo, que continuaremos a denotar por $\mathbf{F^{\star}_{res}}$ (e note que, portanto, $\mathbf{F^{\star}_{res}} \neq \mathbf{F^{ext}_{res}}$). Exatamente porque estamos trabalhando com situações em que não há rotação no corpo rígido (e isso pode ser garantido pelas forças que constituem $\mathbf{F^{\star}_{res}}$), temos que, independentemente da região em que ocorre o acréscimo ou

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034

a ejeção da partícula de massa $|\mathrm{d}m|$, podemos expressar a força exercida pelo corpo rígido sobre essa partícula como $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel}}$, em que $\mathbf{v_{rel}} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, sendo $\mathbf{v}$ a velocidade do corpo rígido imediatamente antes da interação com a partícula de massa $|\mathrm{d}m|$ e $\mathbf{u}$ a velocidade dessa partícula − imediatamente antes da colisão ou imediatamente após a ejeção, conforme o caso. É, basicamente, o desenvolvimento apresentado na seção 3, com a partícula de massa m nas Figs. 1 e 2 substituída por um corpo rígido não-girante de massa m, e observe que não haveria sentido em nos referirmos a uma velocidade $\mathbf{v}$ do corpo rígido (como um todo) se houvesse rotação do mesmo. Pois bem, de acordo com a terceira lei de Newton, a força exercida pela partícula sobre o corpo rígido é dada então por $-(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel}}$. Segue que

$$\mathbf{F^{ext}_{res}} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel}} + \mathbf{F^{\star}_{res}}. \tag{16}$$

Substituindo as Eqs. (15) e (16) na Eq. (14), obtemos a equação

$$\mathbf{F^{\star}_{res}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel}} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t},$$

que é idêntica à Eq. (9). Portanto, podemos aplicar a Eq. (9) a um corpo de massa m − desde que o mesmo não sofra rotações nem deformações apreciáveis. E foi o que fizemos nos problemas 1 e 2 da seção anterior.

Agora, consideremos que entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$ a partícula de massa m (ou o corpo rígido livre de rotações que ela modela) *colide* inelasticamente não apenas com uma partícula de massa $\mathrm{d}m$, mas com N partículas, de massas $\mathrm{d}m_1$, $\mathrm{d}m_2$, ..., $\mathrm{d}m_N$. Com isso, a variação de massa sofrida pela partícula de massa m é $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 + \mathrm{d}m_2 + \cdots + \mathrm{d}m_N$. A modificação a ser feita no desenvolvimento apresentado na seção 3 consiste em incluir nos cálculos as N forças $-(\mathrm{d}m_1/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_1}}$, $-(\mathrm{d}m_2/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_2}}$, ..., $-(\mathrm{d}m_N/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_N}}$, em substituição à força única $-(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel}}$ sobre a partícula de massa m. Deve estar claro que a força $-(\mathrm{d}m_i/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_i}}$, com $\mathbf{v_{rel_i}} = \mathbf{v} - \mathbf{u_i}$, é a força exercida na partícula de massa m, entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$, pela partícula de massa $\mathrm{d}m_i$, sendo $\mathbf{u_i}$ sua velocidade no instante t. Pois bem, com essa modificação obtemos, em substituição à Eq. (9):

$$\mathbf{F^{\star}_{res}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel_i}} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{17}$$

Podemos avançar um pouco mais, trabalhando no somatório acima:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel_i}} &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel_i}} \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}m}\mathbf{v_{rel_i}} \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}m_i(\mathbf{v}-\mathbf{u_i})}{\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}m_i} \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{v} - \frac{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u_i}\,\mathrm{d}m_i}{\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}m_i}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}-\mathbf{u_{cm}}) \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel,cm}}\ ,
\end{aligned} \tag{18}$$

em que

$$\mathbf{u_{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u_i}\,\mathrm{d}m_i}{\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}m_i} \tag{19}$$

é a velocidade, no referencial inercial adotado, e no instante t, do centro de massa das N partículas que colidem com a partícula de massa m entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$, e $\mathbf{v_{rel,cm}} = \mathbf{v} - \mathbf{u_{cm}}$ é a velocidade, no instante t, da partícula de massa m em relação àquele centro de massa. Substituindo (18) em (17), obtemos:

$$\boxed{\mathbf{F^{\star}_{res}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel,cm}} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.} \tag{20}$$

A Eq. (20) também se aplica ao caso em que temos N partículas de massas infinitesimais $\mathrm{d}m_1$, $\mathrm{d}m_2$, ..., $\mathrm{d}m_N$ sendo *ejetadas* do corpo de massa m entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$. A modificação a ser feita no desenvolvimento apresentado na seção 3 (para o caso em que o corpo de massa m perde matéria) consiste em incluir nos cálculos as N forças $(\mathrm{d}m_1/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_1}}$, $(\mathrm{d}m_2/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_2}}$, ..., $(\mathrm{d}m_N/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_N}}$, em substituição à força única $(\mathrm{d}\tilde{m}/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel}} = -(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel}}$ sobre o corpo de massa m. Deve estar claro que, aqui, a força $(\mathrm{d}m_i/\mathrm{d}t)\mathbf{v_{rel_i}}$, com $\mathbf{v_{rel_i}} = \mathbf{v} - \mathbf{u_i}$, é a força exercida no corpo de massa m, entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$, pela partícula de massa $\mathrm{d}m_i$, sendo $\mathbf{u_i}$ sua velocidade no instante $t+\mathrm{d}t$ (dê uma olhada na Fig. 2, sustituindo $\mathbf{u}$ por $\mathbf{u_i}$ e $|\mathrm{d}m|$ por $\mathrm{d}m_i$). Pois bem, com essa modificação obtemos, em substituição à Eq. (9):

$$\mathbf{F^{\star}_{res}} = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel_i}} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{21}$$

Note a presença do sinal "$-$" nesta equação; ele não aparece na Eq. (17).

Como antes, vamos trabalhar no somatório. Mas observe que, agora, temos $\mathrm{d}m = -(\mathrm{d}m_1 + \mathrm{d}m_2 + \cdots + \mathrm{d}m_N)$, pois $\mathrm{d}m_i$ é positivo ($\forall\ i \in \{1, 2, ..., N\}$) e $\mathrm{d}m$ é negativo. Segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} -\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel_i}} &= \sum_{i=1}^{N} -\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel_i}} \\
&= -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}m}\mathbf{v_{rel_i}} \\
&= \cancel{-}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}m_i(\mathbf{v}-\mathbf{u_i})}{\cancel{-}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}m_i} \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{v} - \frac{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u_i}\,\mathrm{d}m_i}{\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}m_i}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}-\mathbf{u_{cm}}) \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v_{rel,cm}}\ , \qquad (22)
\end{aligned}$$

em que $\mathbf{u_{cm}}$ – dado pela mesma expressão em (19), mas agora para o instante $t + \mathrm{d}t$ – é a velocidade, no referencial inercial adotado, do centro de massa das N partículas ejetadas do corpo de massa m, e $\mathbf{v_{rel,cm}} = \mathbf{v} - \mathbf{u_{cm}}$ é a velocidade, no instante $t+\mathrm{d}t$, do corpo de massa m em relação àquele centro de massa.

Substituindo (22) em (21) obtemos a Eq. (20). Assim, enquanto a Eq. (17) só se aplica ao caso em que as N partículas colidem inelasticamente com o corpo de massa m e a Eq. (21) só se aplica ao caso em que as N partículas são ejetadas do corpo de massa m, a Eq. (20) se aplica a ambos os casos. Obviamente, no caso em que há acréscimo de matéria ao corpo de massa m temos $\mathrm{d}m > 0$, enquanto no caso em que há perda de matéria pelo corpo de massa m temos $\mathrm{d}m < 0$.

A Eq. (20) é bastante semelhante à Eq. (9). Enquanto a Eq. (9) se aplica a um corpo rígido não-girante de massa m colidindo inelasticamente com uma partícula de massa $\mathrm{d}m$ ou ejetando uma partícula de massa $|\mathrm{d}m|$, entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$, a Eq. (20) se aplica a um corpo rígido não-girante de massa m interagindo simultaneamente com N partículas, de massas $\mathrm{d}m_1$, $\mathrm{d}m_2$, ..., $\mathrm{d}m_N$, entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$ – não sendo relevante, na equação, o movimento do corpo de massa m em relação a cada uma dessas partículas, individualmente, mas sim em relação ao seu centro de massa.

Observe que a Eq. (20) nos permite abordar os problemas 1 e 2 da seção anterior com ainda mais rigor. Por exemplo, no problema do foguete é razoável dizer que temos a expulsão de várias partículas de gás entre os instantes t e $t + \mathrm{d}t$. Esse conjunto de partículas pôde ser adequadamente modelado como uma única partícula de gás porque todas elas são supostamente ejetadas com a mesma velocidade $\mathbf{u}$ – sendo essa, potanto, a velocidade de seu centro de massa. Nesse caso, a Eq. (20) recai na Eq. (9). Se as partículas de gás fossem ejetadas em diferentes direções, teríamos que analisar o movimento de seu centro de massa, e fazer uso da Eq. (20).

Uma limitação da Eq. (20) é que as N interações entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$ devem ser, *todas*, colisões inelásticas *ou* ejeções. Para problemas em que há, entre os instantes t e $t+\mathrm{d}t$, colisões inelásticas *e* ejeções, uma modificação na Eq. (20) se faz necessária. Tratando separadamente colisões inelásticas e ejeções, obtemos

$$\boxed{\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}} = \frac{\mathrm{d}m^{+}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{v}^{+}_{\mathbf{rel,cm}} + \frac{\mathrm{d}m^{-}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{v}^{-}_{\mathbf{rel,cm}} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t},} \qquad (23)$$

em que o termo com o sobrescrito "+" está relacionado às colisões inelásticas e o termo com o sobrescrito "$-$" está relacionado às ejeções. Nesse processo, a variação de massa do corpo de massa m entre os instantes t e $t + \mathrm{d}t$ é

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}m^{+} + \mathrm{d}m^{-}, \qquad (24)$$

em que $\mathrm{d}m^{+}$ (que é positivo) é a variação de massa do corpo de massa m devido às colisões inelásticas, e $\mathrm{d}m^{-}$ (que é negativo) é a variação de massa do corpo de massa m devido às ejeções, entre t e $t+\mathrm{d}t$. É claro, $\mathrm{d}m^{+}$ é a soma das massas infinitesimais de todas as partículas que colidem inelasticamente com o corpo de massa m entre os instantes t e $t + \mathrm{d}t$, enquanto $|\mathrm{d}m^{-}|$ é a soma das massas infinitesimais de todas as partículas que são ejetadas daquele corpo, entre os instantes t e $t + \mathrm{d}t$.

A Eq. (20) é um caso particular da Eq. (23), quando temos colisões inelásticas ou ejeções, mas não ambas, e a Eq. (9) é um caso particular da Eq. (20), quando temos uma única colisão inelástica ou uma única ejeção. Nossa equação predileta, dessas três, é a Eq. (20), seguida bem de perto pela Eq. (9). Preferimos encarar a Eq. (23) como uma extensão natural da Eq. (20).

Encerraremos esta seção explorando uma aplicação da Eq. (20) e uma aplicação da Eq. (23).

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034

Se um corpo em repouso ejeta partículas de forma contínua e isotrópica, é intuitivo que tal ejeção não produz movimento nesse corpo, concorda? Vejamos o que obtemos com a Eq. (20). Fazendo uma análise rápida: a ejeção isotrópica resulta em $\mathbf{v}_{\mathbf{rel,cm}} = \mathbf{0}$; daí, com $\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}} = 0$ obtemos $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = 0$ e, portanto, o corpo permanece em repouso. Ou seja, sem a existência de uma força $\mathbf{F}^{\star}_{\mathbf{res}}$ para mover o corpo, a ejeção isotrópica, *per si*, não irá movê-lo. Observe que para que o corpo permaneça em repouso não é necessário que a ejeção seja isotrópica; basta que o centro de massa do conjunto de partículas ejetadas não se mova.

Agora vamos explorar uma aplicação da Eq. (23). A Fig. 5 ilustra um recipiente suspenso despejando areia a uma taxa constante R_1 em um segundo recipiente, apoiado em uma balança. Esse segundo recipiente, por sua vez, despeja areia a uma taxa constante R_2 por uma abertura em sua base. A areia que sai do segundo recipiente não atinge a balança, devido a um orifício na mesma. (Em uma montagem experimental, poríamos o segundo recipiente em um tripé ou outro suporte, sobre a balança, e desviaríamos da balança a areia despejada por esse recipiente com o auxílio de uma tubulação não conectada ao mesmo.) Seja h a distância vertical entre a abertura na base do primeiro recipiente e a superfície da areia no segundo recipiente. Em geral h é uma função de t, mas vamos supor que, se h varia com o tempo, tal variação é muito pequena, em termos percentuais, de forma que podemos considerar h constante. Sabendo que no instante $t = 0$ a massa da areia no segundo recipiente é m_0, use a Eq. (23) para prever qual será a leitura na balança no instante $t > 0$. Suponha que a balança está regulada para descontar a massa do recipiente (é como descontar a massa do prato em um restaurante do tipo *self-service*). [Esteja atento(a): a massa registrada pela balança não será, em geral, a massa da areia no segundo recipiente. É como usar uma balança em um elevador acelerado: a leitura na balança não informa a massa real do que está sobre ela.]

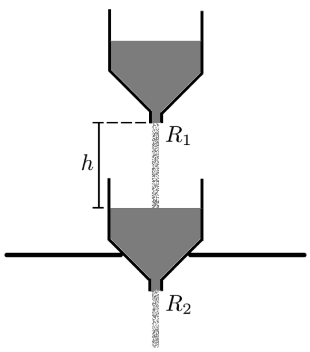

Figura 5: Montagem esquemática de experimento proposto para explorar a Eq. (23). O recipiente superior [inferior] despeja areia a uma taxa constante R_1 [R_2]. O recipiente inferior está sobre uma balança, que não recebe a areia despejada pelo mesmo.

Este problema é um pouco mais desafiador que os anteriores, mas deixaremos sua resolução por sua conta. Fazendo uso da Eq. (23), obtivemos:

$$m_{lida}(t) = m_0 + (R_1 - R_2)t + R_1\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Para nós, tão bacana quanto chegar a esse resultado é analisá-lo. Por exemplo, se $R_1 = R_2$, a massa de areia no segundo recipiente não muda com o tempo, mas a leitura na balança difere de m_0 devido ao impacto da areia que cai no mesmo − a menos que tenhamos $h \approx 0$, como esperado. Podemos, inclusive, usar a balança digital para medir essa força de impacto, multiplicando a diferença $m_{lida} - m_0$ por g, concorda? Observe então que, com $R_1 = R_2$, temos a previsão de que a massa lida na balança é uma função afim de $h^{1/2}$ (e a força de impacto é uma função linear de $h^{1/2}$), com seu coeficiente angular sendo proporcional a R_1. Seria interessante fazer um experimento para testar essa previsão. Trabalhando com duas ampulhetas idênticas, teremos (com boa precisão, se as ampulhetas forem de boa qualidade) $R_1 = R_2$, e os pontos $m_{lida} \times h^{1/2}$ deverão ser bem ajustados por uma função afim, com o coeficiente angular α fornecendo uma medida de R_1 ($R_1 = \alpha\sqrt{g/2}$), que poderá ser comparada com uma medida mais direta de R_1. É claro, alguns cuidados precisarão ser tomados na realização do experimento. Um exemplo: idealmente, se a intenção é testar a qualidade da previsão, os grãos de areia em queda deveriam colidir inelasticamente com a areia no recipiente, mas, como isso não ocorre na prática, devemos tomar providências para minimizar o desvio desse comportamento ideal (como, talvez, evitar elevados valores de h). Observe que a ideia, aqui, é refinar o experimento − não a teoria − em busca de harmonia entre previsões teóricas e resultados experimentais. Tudo isso pode ser bastante divertido, e, em nossa opinião, constitui uma forma interessante de educação científica − principalmente se os estudantes forem incentivados a fazer suas próprias perguntas e a desenvolver suas próprias ideias.

6. Conclusão

Neste trabalho, procuramos mostrar que − diferentemente do que pensam muitos estudantes e professores, incluindo alguns autores de livros-texto de física − *na mecânica clássica a segunda lei de Newton na forma* $\mathbf{F_{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$, *com* $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, *não admite massa variável.*

A mecânica clássica é uma teoria, e nessa teoria, partículas − que são uma abstração − têm massa constante. Assim, aplicada a uma partícula de massa m, a equação $\mathbf{F_{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ é equivalente à equação $\mathbf{F_{res}} = m\mathbf{a}$. No caso de um corpo real de massa m, a mecânica clássica admite variação de massa por acréscimo ou perda de matéria[3], o que pode ser modelado como acréscimo ou perda de partículas, mas a equação

$$\mathbf{F_{res}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \tag{25}$$

também não se aplica. Obtivemos equações que se assemelham à Eq. (25) − as Eqs.(9), (20) e (23) −, e tal semelhança ajuda a nos lembrarmos daquelas equações, mas vimos que há entre elas e a Eq. (25) diferenças cruciais. Derivamos as Eqs.(9), (20) e (23) a partir da segunda lei de Newton na forma $\mathbf{F_{res}} = m\mathbf{a}$, explicitando as forças associadas aos acréscimos ou às perdas de matéria. Mostramos que, com aquelas equações, podemos resolver certos problemas em que há variação de massa por acréscimo ou perda de matéria de forma relativamente simples.

Na teoria da relatividade, podemos trabalhar com o conceito de partícula com massa $\mathcal{M}$ variável (denominada massa relativística) e, assim, com a segunda lei de Newton na forma $\mathbf{F_{res}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}\mathcal{M}/\mathrm{d}t)\mathbf{v} + \mathcal{M}(\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t)$, mas muitos autores têm apontado desvantagens no uso do conceito de massa relativísica. Para eles, massa é massa.

Agradecimentos

Queremos agradecer a todos os estudantes e professores com os quais discutimos ao longo deste trabalho. Foram muitos para citá-los aqui. Contudo, não podemos deixar de explicitar nossos agradecimentos aos solícitos professores Alexandre Medeiros, Mário Henrique Bento Gonçalves Oliveira e Fernando Parisio.

[3] Rigorosamente, o próprio corpo está sendo alterado, e o novo corpo, no instante $t + \mathrm{d}t$, possui massa diferente daquela do corpo inicial no instante t.

Referências

[1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), v. 1, 9ª ed.

[2] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros* (LTC, Rio de Janeiro, 2013), v. 1, 6ª ed.

[3] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Edgard Blücher, São Paulo, 2002), v. 1, 5ª ed.

[4] M. Alonso e E.J. Finn, *Física, um Curso Universitário* (Edgard Blücher, São Paulo, 1972), v. 1.

[5] H.D. Young e R.A. Freedman, *Física* (Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2009), v. 1, 12ª ed.

[6] A. Chaves, *Física Básica* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), v. 1.

[7] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *Lições de Física de Feynman* (Bookman, Porto Alegre, 2008), v. 1.

[8] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas* (Cengage Learning, São Paulo, 2011), 5ª ed.

[9] J.R. Taylor, *Mecânica Clássica* (Bookman, Porto Alegre, 2013).

[10] K.R. Symon, *Mecânica* (Campus, Rio de Janeiro, 1996).

[11] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, São Francisco, 2002), 3ª ed.

[12] L. Landau and E. Lifchitz, *Mechanics* (Pergamon Press, Nova Iorque, 1965), 2ª ed.

[13] A. Sommerfeld, *Lectures on The Theoretical Physics - Mechanics* (Academic Press, Nova Iorque, 1952), 4ª ed.

[14] L.B. Okun, American Journal of Physics **77**, 430 (2009).

[15] C.G. Adler, American Journal of Physics **55**, 739 (1987).

[16] T.R. Sandin, American Journal of Physics **59**, 1032 (1991).

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0034