

# Refração luminosa em recipientes preenchidos parcialmente com água: análise de problemas e proposta experimental

Light refraction in containers partially filled with water: analysis of problems and experimental proposal

M. A. V. Macedo Junior<sup>\*1</sup>, V. L. B. de Jesus<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, *Campus* Duque de Caxias, Avenida República do Paraguai, 120; CEP 25.050-100, Duque de Caxias, RJ, Brasil

<sup>2</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, *Campus* Nilópolis, Rua Lúcio Tavares, 1045; CEP 26.530-060, Nilópolis, RJ, Brasil

Recebido em 02 de Outubro de 2016. Revisado em 12 de Fevereiro de 2017. Aceito em 14 de Fevereiro de 2017

No presente trabalho discutimos a abordagem utilizada por alguns livros didáticos de física de nível médio sobre o fenômeno da refração luminosa. Nos capítulos introdutórios à refração da luz, imagens de objetos parcialmente imersos em recipientes preenchidos com água, apresentam-se “quebradas” e, em alguns casos, “separadas”, quando vistos lateralmente. Além de caracterizar os livros didáticos dentro de um conjunto de critérios estabelecidos, apresentamos também uma proposta experimental com o intuito de aprofundar a discussão acerca do tema. Usando a lei de Snell-Descartes, mostramos medidas relacionadas às posições das imagens formadas a partir de um canudo parcialmente imerso em diferentes níveis de água para dois tipos de recipientes: um de base circular e outro retangular.

**Palavras-chave:** refração, óptica, ensino de física.

In the present work we discuss the approach used by some high school physics textbooks about the phenomenon of light refraction. In the introductory chapters to the refraction of light, images of objects partially immersed in containers filled with water are presented “broken” and, in some cases, “separated”, when viewed laterally. Besides characterizing the textbooks within a set of established criteria, we also present an experimental proposal with the intention of deepening the discussion about the theme. Using the Snell-Descartes law, we show measures related to the positions of images formed from a straw partially immersed in different water levels for two types of containers: one of circular base and another rectangular.

**Keywords:** refraction, optics, physics teaching.

## 1. Introdução

Nos livros didáticos de física é comum encontrarmos nos capítulos introdutórios ao fenômeno da refração da luz, figuras<sup>1</sup> de objetos aparentemente quebrados quando parcialmente imersos em recipiente com água. Em geral, as figuras apresentadas são constituídas por recipientes de base circular e, portanto, face curva, registradas a partir das perspectivas la-

teral e/ou superior, como podem ser observadas na Figura 1.

A velocidade da luz em um meio transparente é sempre menor que a velocidade  $c \approx 2,998 \times 10^8$  m/s no vácuo. Todo meio transparente é caracterizado por um *índice de refração*, definido como a relação entre a velocidade da luz no vácuo,  $c$ , e a velocidade da luz no meio,  $v$ :

$$n = \frac{c}{v} \quad (1)$$

O índice de refração  $n$  na equação (1) também é conhecido como *índice de refração absoluto*. Caso a velocidade da luz  $c$  seja substituída pela veloci-

\*Endereço de correspondência: [marcelo.junior@ifrj.edu.br](mailto:marcelo.junior@ifrj.edu.br).

<sup>1</sup> As figuras comumente encontradas são desenhos ou fotografias de colheres, lápis e canudos parcialmente imersos em recipiente com água.



**Figura 1:** Exemplos típicos de ilustrações encontradas nos capítulos introdutórios ao fenômeno de refração da luz nos livros didáticos de física. Em (a) vista lateral e (b) vista superior. (Fonte: os autores)

dade de propagação da luz em qualquer outro meio transparente diferente do vácuo,  $n$  recebe o nome de *índice de refração relativo*.

Quando um raio luminoso atinge a interface que separa dois meios diferentes, como o ar e a água, parte do raio de luz é refletido e parte penetra no segundo meio [1]. Se o raio incidente não for perpendicular à superfície, o raio transmitido não será paralelo ao raio incidente. A mudança de direção do raio transmitido é chamada de *refração*. A Figura 2 mostra um raio luminoso atingindo uma interface plana e outra circular que separa os meios água e ar. O ângulo  $\theta_1$  entre o raio incidente e a reta normal é denominado *ângulo de incidência*. O raio refletido faz um ângulo  $\theta_1$  com a normal que é igual ao ângulo de incidência, como se pode ver na figura. Este resultado é conhecido como *lei da reflexão*.

O raio que passa para o meio 2 da Figura 2 é denominado *raio refratado* e o ângulo  $\theta_2$  é chamado de *ângulo de refração*. Quando um raio luminoso atravessa uma interface na qual sua velocidade diminui, como no caso em que a luz passa do meio menos refringente para o mais refringente, o ângulo de refração  $\theta_2$  é menor do que o ângulo de incidência  $\theta_1$  (Figura 2b). Em outras palavras o raio refratado se aproxima da normal. Quando, por outro lado, a velocidade do raio luminoso aumenta ao atravessar a interface, como acontece, por exemplo, quando a luz passa do meio mais refringente para o menos refringente, o raio luminoso se afasta da reta normal (Figura 2c). No caso em que o raio luminoso atinge a interface que separa meios com índice de refração iguais, o raio refratado não sofre desvio, mantendo a mesma direção de propagação do raio incidente (Figura 2a).

O ângulo de refração  $\theta_2$  depende do ângulo de incidência  $\theta_1$  e da relação entre as velocidades do raio luminoso nos dois meios. Se  $v_1$  é a velocidade do meio inicial e  $v_2$  é a velocidade no meio final, os ângulos de incidência e refração se relacionam da

seguinte maneira:

$$\frac{1}{v_1} \text{sen} \theta_1 = \frac{1}{v_2} \text{sen} \theta_2 \quad (2)$$

Em termos dos índices de refração dos dois meios,  $n_1$  e  $n_2$ , a equação (2) assume a seguinte forma:

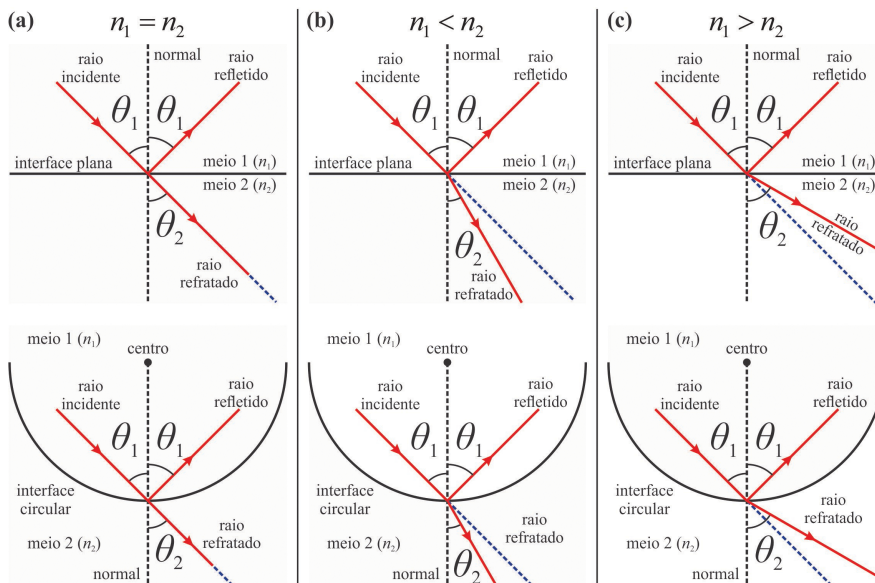
$$n_1 \text{sen} \theta_1 = n_2 \text{sen} \theta_2 \quad (3)$$

A relação expressa pela equação (3) é conhecida como *lei de Snell-Descartes* ou *lei da refração*.

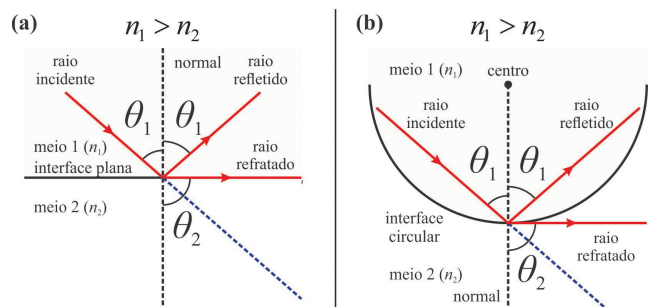
Considerando um raio luminoso que se propaga do meio mais refringente para o menos refringente, ao incidir obliquamente sobre a interface que separa os meios, o raio de luz se refrata, afastando-se da reta normal (ver Figura 2c). Aumentando-se o ângulo de incidência  $\theta_1$ , o ângulo de refração  $\theta_2$  também aumenta e tem-se sempre  $\theta_1 < \theta_2$ . No caso especial em que o ângulo de refração atinge seu valor extremo, isto é,  $\theta_2 = 90^\circ$ , o ângulo de incidência atinge seu valor limite  $\theta_1 = \theta_{\text{limite}}$ , denominado *ângulo limite* (ver Figura 3). Portanto, para a ocorrência da refração, a luz deve incidir sob ângulo  $\theta_1$ , variando de  $0^\circ$  a  $\theta_{\text{limite}}$ . O correspondente ângulo de refração  $\theta_2$  varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Se o ângulo de incidência superar o ângulo limite, não haverá refração. Neste caso, a luz incidente é refletida. Esse fenômeno recebe o nome de *reflexão total*.

Na Figura 1 temos duas perspectivas de observação: vista lateral em (a) e vista superior em (b). Como o recipiente é constituído de uma base circular e, conseqüentemente, face curva, com relação à perspectiva de observação lateral, a interface de separação água-ar é definida de acordo com a Figura 4a. Em relação à perspectiva superior, a interface de separação assume a forma representada na Figura 4b. Percebemos claramente que as interfaces de separação água-ar diferem quanto à sua geometria.

Nesse sentido, poderia, então, o fenômeno de “quebra” do lápis observado na Figura 1a e Figura 1b ser justificado da mesma maneira apesar das diferentes perspectivas de observação? É possível observar na Figura 5 que o prolongamento das partes do lápis acima e abaixo da superfície d’água são diferentes (retas tracejadas em amarelo). As retas 1 e 2 representam, respectivamente, os prolongamentos das extremidades do lápis acima e abaixo da superfície d’água. O ponto marrom (sinalizado pela seta marrom), além de indicar a posição em que as retas se interceptam, representa o ponto de “quebra” do lápis, no caso da Figura 5b. Na Figura 5a a posição de interseção das retas encontra-se abaixo do nível d’água, devido à separação horizontal entre as partes do lápis ocorrida na superfície (ver destaque na



**Figura 2:** O raio luminoso atinge a interface que separa meios com índice de refração  $n_1$  e  $n_2$ . (a) Se  $n_1 = n_2$ , o raio luminoso não sofre desvio; o raio refratado continua a se propagar na mesma direção (reta pontilhada azul). (b) Se  $n_1 < n_2$ , o raio luminoso é desviado se aproximando da reta normal. (c) Se  $n_1 > n_2$ , o raio luminoso é desviado se afastando da reta normal. (Fonte: os autores)

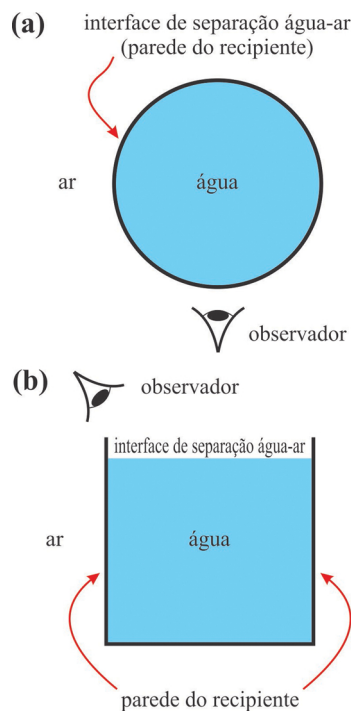


**Figura 3:** Configuração limite para ocorrência da reflexão total em interfaces de separação (a) plana e (b) circular. À medida que o ângulo de incidência aumenta, o ângulo de refração também aumenta até que, para um ângulo limite de incidência  $\theta_{limite}$ , o ângulo de refração é  $90^\circ$ . Para ângulos de incidência maiores que o ângulo limite, não há raio refratado. (Fonte: os autores)

Figura 5a). Entretanto, na Figura 5b, a interseção entre as retas ocorre na superfície, uma vez que não há separação horizontal.

Na Tabela 1 apresentamos as características dos recipientes e as perspectivas de observação utilizados pelas referências [2-6] ao introduzirem os conceitos iniciais relacionados à refração da luz:

A fim de caracterizar adequadamente os livros didáticos com relação à utilização de figuras semelhantes à Figura 1, e sua relação com o fenômeno de refração da luz, elaboramos cinco critérios, enumerando-os de 1 a 5:



**Figura 4:** Interfaces de separação água-ar geradas a partir de diferentes perspectivas de observação do mesmo recipiente. (a) vista lateral - interface curva, fina e feita de vidro; (b) vista superior - interface plana. (Fonte: os autores)

1. A abordagem feita pelo livro relaciona a “quebra” do objeto parcialmente imerso em recipi-

**Tabela 1:** Características dos recipientes e perspectivas de observação utilizados pelas referências [2-6].

Livros	Tipo de figura	Formato da base	Face lateral	Perspectiva de observação
Guimarães, Piqueira e Carron [2]	fotografia	circular	curva	lateral
Máximo e Alvarenga [3]	fotografia	circular	curva	superior
Pietrocola <i>et al.</i> [4]	fotografia	circular	curva	lateral
Ramalho Junior, Ferraro e Soares [5]	fotografia	circular	curva	lateral
Yamamoto e Fuke [6]	fotografia	circular	curva	lateral

**Figura 5:** Prolongamento das partes do lápis acima e abaixo da superfície d'água a partir das perspectivas (a) lateral e (b) superior. (Fonte: os autores)

ente com água com o fenômeno de refração da luz?

2. É possível identificar visualmente a perspectiva de observação da figura?
3. O livro apresenta por escrito a perspectiva de observação da figura?
4. O enfoque dado pelo livro deixa claro que diferentes perspectivas de observação implicam em interfaces de separação água-ar de geometrias diferentes e, portanto, trajetórias diferentes para o raio luminoso?
5. A discussão sobre o fenômeno de refração da luz referente à “quebra” do objeto parcialmente imerso em recipiente com água, apresentada pelo livro, está de acordo com a perspectiva de observação da figura?

Tendo em vista os critérios listados acima, elaboramos a Tabela 2.

Conforme pode-se observar na tabela abaixo, todos os livros justificam a “quebra” sofrida pelo objeto no simples fato de *a luz mudar de direção ao*

**Tabela 2:** Caracterização dos livros selecionados de acordo com critérios apontados no texto.

Livros	1	2	3	4	5
Guimarães, Piqueira e Carron [2]			×	×	×
Máximo e Alvarenga [3]			×	×	
Pietrocola <i>et al.</i> [4]			×	×	×
Ramalho Junior, Ferraro e Soares [5]			×	×	×
Yamamoto e Fuke [6]			×	×	×

*passar de um meio transparente para outro.* Tal evento é associado ao fenômeno da refração da luz.

Em termos visuais, todas as referências são explícitas quanto à perspectiva de observação das figuras. Entretanto, não há qualquer registro por escrito. Apenas a referência [3] registra a posição de observação de um esquema explicativo sobre o fenômeno observado.

Nenhum dos livros avaliados deixa claro que diferentes perspectivas de observação implicam em interfaces de separação água-ar de geometrias diferentes. Tampouco, o impacto dessa diferença no modo como as partes dos objetos parcialmente imersos na água se separam (ver Figura 5).

Apesar de a referência [3] discutir o fenômeno da refração luminosa sob a perspectiva correta de registro da figura, nenhum comentário é feito sobre a forma geométrica dos recipientes.

Com o intuito de identificar erros conceituais relacionados ao fenômeno da refração luminosa, a referência [7] discute qualitativamente uma montagem experimental semelhante à Figura 1a. No artigo, o autor questiona estudantes, e profissionais com certo grau de conhecimento científico, sobre como deveriam observar, lateralmente, um canudo parcialmente imerso em um recipiente com água. A análise das respostas mostra que grande parte dos entrevistados acredita que o canudo *deveria parecer “quebrado” na superfície da água*, da mesma maneira que um raio luminoso aparenta estar quebrado quando atravessa a interface que separa meios com índice de refração diferentes. A confusão acontece quando se compara a extensão do canudo (as partes de dentro e de fora da água) com o traçado de raios (diagrama de raios). Para o autor, a falta de cuidado dos livros didáticos de física em se discutir corretamente o diagrama de raios, induz a maioria das pessoas a acreditarem ser o diagrama de raios a maneira como observamos lateralmente o canudo. A omissão de informações, ou a falta de cuidados em se discutir adequadamente o fenômeno da refração luminosa, em figuras semelhantes à Figura 1, pode resultar na ocorrência de erros conceituais em muitos estudantes [7,8]

O presente trabalho analisa experimentalmente o efeito de “quebra” de objetos parcialmente imersos em recipiente com água quando observados lateralmente. O formato dos recipientes, que, por sua vez, definem a forma geométrica da interface que separa os meios envolvidos, foram considerados durante a análise (neste trabalho, consideramos desprezíveis os efeitos das paredes dos recipientes).

Este artigo também tem o objetivo de incentivar o ensino do tema não só do ponto de vista teórico, mas, principalmente, a abordagem experimental simples, baseada na observação cuidadosa que pode despertar a curiosidade científica em muitos estudantes.

## 2. Proposta experimental e discussão dos resultados

A proposta experimental deste trabalho consiste em discutir o processo de formação de imagens por refração da luz em dois diferentes tipos de recipiente: um aquário retangular e um copo cilíndrico<sup>2</sup>.

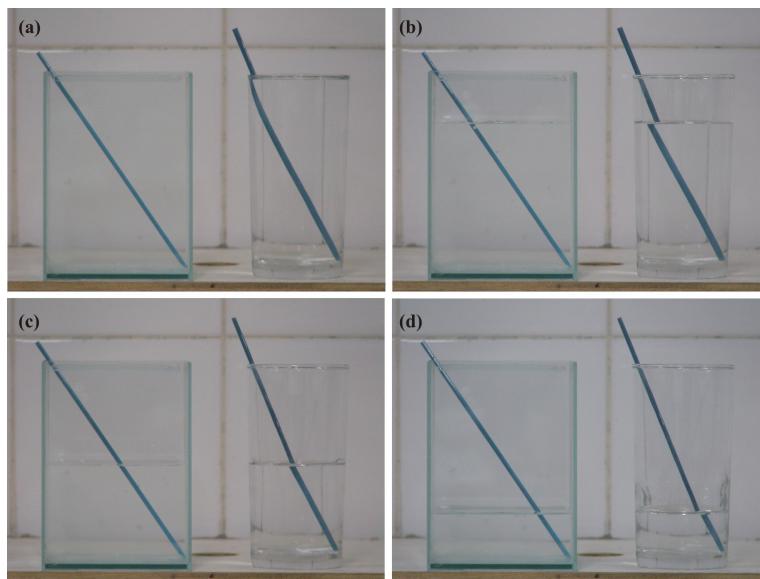
O experimento consiste na observação lateral da imagem de um canudo introduzido em cada recipiente para diferentes níveis de água (Figura 6).

<sup>2</sup> Características dos recipientes: aquário retangular (altura externa = 13,0 cm; altura interna = 12,7 cm; espessura das paredes = 0,2 cm; base = 9,0 cm × 9,5 cm; espessura da base = 0,3 cm); copo cilíndrico (altura externa = 13,0 cm; altura interna = 12,7 cm; espessura da parede = 0,2 cm; diâmetro = 6,7 cm; espessura da base = 0,3 cm).

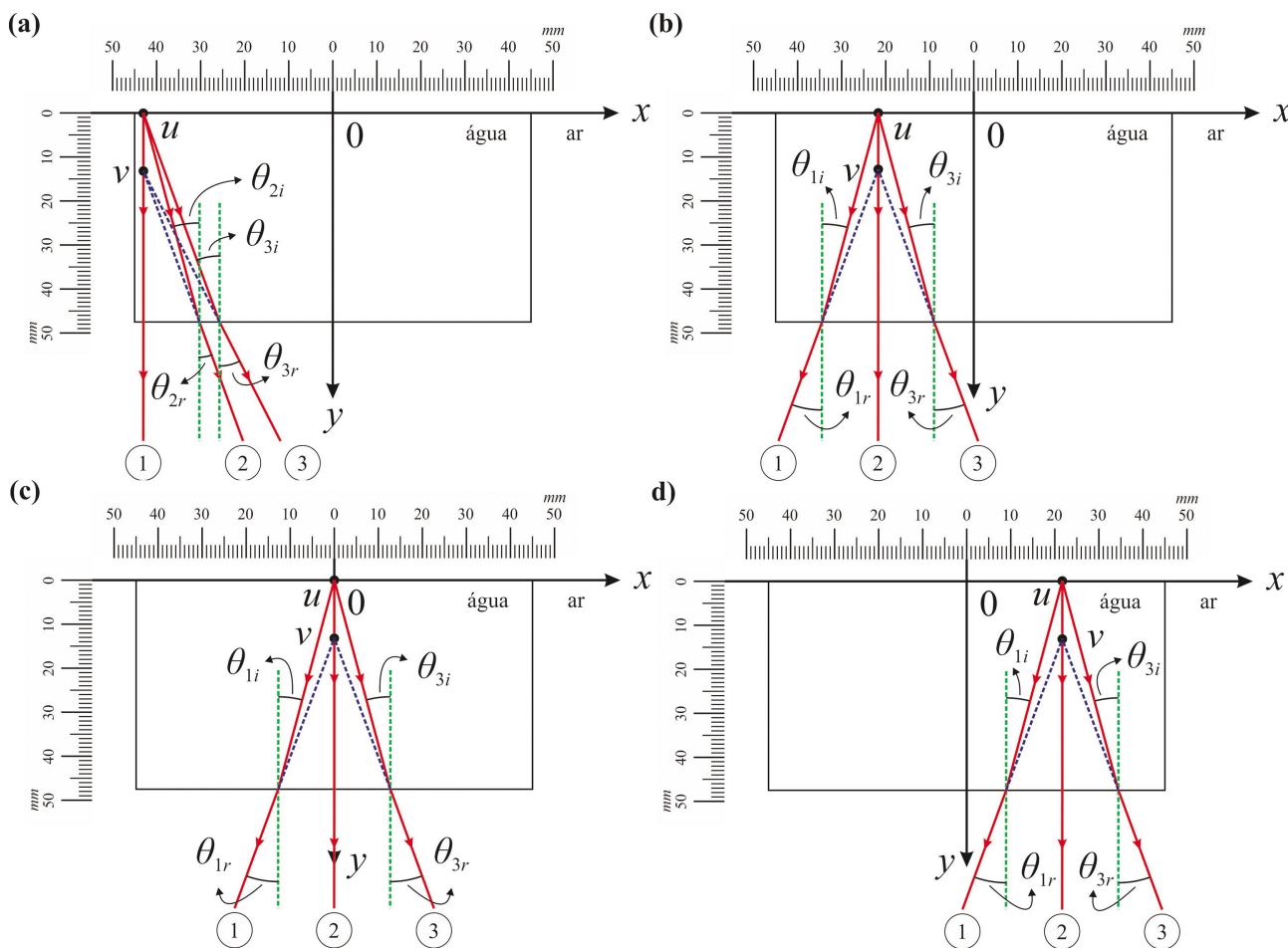
Para que a “quebra” e “separação” pudessem ser analisadas de forma cuidadosa, realizamos um corte transversal ao nível da superfície da água, em cada caso mostrado na Figura 6, para os dois tipos de recipientes (ver Figura 7 e Figura 8). Adotamos o centro geométrico de cada recipiente como sendo a origem do sistema de coordenadas cartesianas criado para facilitar a localização dos pontos referentes ao objeto  $u$  e à imagem  $v$ . Os raios luminosos são provenientes do ponto objeto  $u$ , pois são refletidos difusamente por ele, mas aparentam vir do ponto imagem  $v$ . É interessante chamar a atenção para o fato de o observador encontrar-se muito distante quando comparado às dimensões dos recipientes (aproximadamente 2 m).

Nas Figuras 7a-d os raios luminosos oriundos do ponto  $u$  incidem em uma das faces planas do recipiente de base quadrada. Para esses casos, as imagens formadas pelos objetos aparentam estar mais próximas do observador do que as suas reais posições. As diferentes posições do objeto e da imagem, assim como os valores dos ângulos de incidência e refração dos raios luminosos, podem ser vistos na Tabela 3. Os cálculos das diferentes posições das imagens foram realizados com base na lei de Snell-Descartes para os seguintes valores de índice de refração:  $n_{ar} = 1,00$  e  $n_{água} = 1,33$  [9].

Na Figura 8a um observador lateral, bem afastado e centrado, não seria capaz de visualizar totalmente a parte do canudo abaixo da superfície da água, uma vez que, para ângulos de incidência maiores



**Figura 6:** Vista lateral dos canudos imersos nos recipientes de base quadrada e circular contendo os seguintes níveis de água: (a) completamente cheios (12,7 cm), (b) 3/4 de água (9,5 cm), (c) 1/2 de água (6,3 cm) e (d) 1/4 de água (3,2 cm). (Fonte: os autores)



**Figura 7:** Esquema de traçado de raios luminosos para os recipientes de base quadrada vistos nas Figuras 6a-d. Os subíndices numéricos 1, 2 e 3 encontrados nos ângulos  $\theta$  fazem referência a um dos três raios luminosos traçados em cada figura, identificados, cada um, com um círculo cinza numerado. Já os subíndices alfabéticos  $i$  e  $r$  indicam, respectivamente, a incidência e a refração desses raios. (Fonte: os autores)

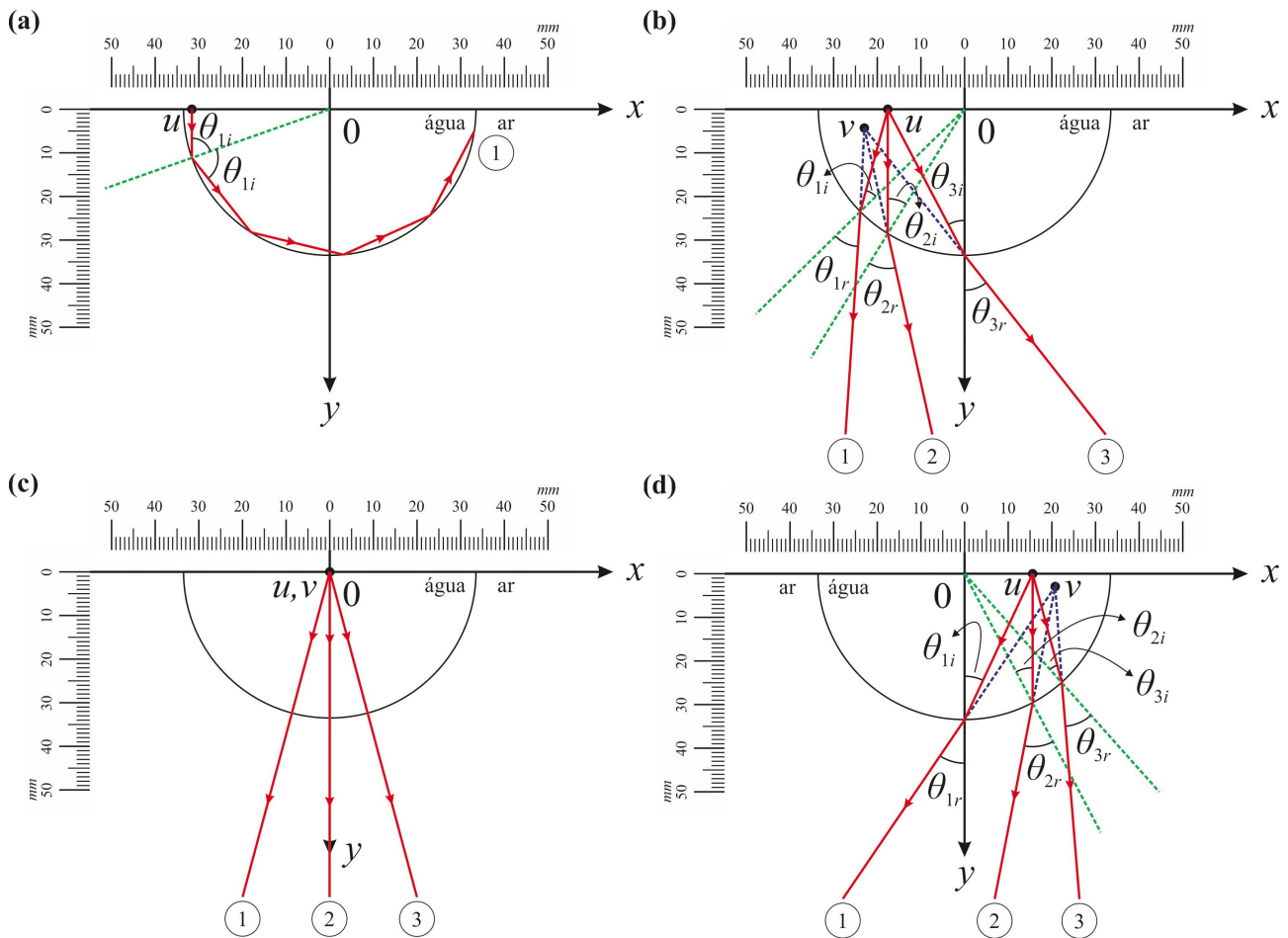
**Tabela 3:** Valores das posições dos objetos, das imagens e dos ângulos de incidência e refração.

Recipiente	Figura	Objeto ( $u$ )		Imagem ( $v$ )		Ângulo de incidência			Ângulo de refração		
		$x$ (mm)	$y$ (mm)	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$\theta_{1i}$	$\theta_{2i}$	$\theta_{3i}$	$\theta_{1r}$	$\theta_{2r}$	$\theta_{3r}$
Base quadrada	7(a)	-43,0	0,0	-43,0	13,2	0,0°	15,0°	20,0°	0,0°	20,1°	27,1°
	7(b)	-21,7	0,0	-21,7	13,2	15,0°	0,0°	15,0°	20,1°	0,0°	20,1°
	7(c)	0,0	0,0	0,0	13,2	15,0°	0,0°	15,0°	20,1°	0,0°	20,1°
	7(d)	21,7	0,0	21,7	13,2	15,0°	0,0°	15,0°	20,1°	0,0°	20,1°
Base circular	8(a)	-31,6	0,0	reflexão total		70,6°			—		
	8(b)	-17,6	0,0	-22,9	4,3	30,0°	31,6°	27,7°	41,7°	44,2°	38,2°
	8(c)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0°	0,0°	0,0°	0,0°	0,0°	0,0°
	8(d)	15,6	0,0	20,6	3,2	25,0°	28,0°	27,0°	34,2°	38,7°	37,1°

que  $\approx 48,75^\circ$ , temos a ocorrência do fenômeno de reflexão total (ver discussão detalhada no apêndice). Caso o observador se desloque um pouco mais para a direita, seria possível observar uma imagem.

Para a Figura 8b um observador lateral veria a parte inferior do canudo partindo do ponto imagem  $v$ , enquanto a parte superior (parte do canudo que vai desde a sua interseção com a superfície da água

até sua extremidade superior) é vista partindo do ponto  $u$ . Deve-se notar que, a parte superior do canudo encontra-se fora da água, ao contrário da parte inferior. Essa diferença pode ser justificada pela lei de Snell-Descartes. É por esta razão que observamos na Figura 6b a parte inferior do canudo imerso no recipiente cilíndrico deslocada para esquerda em



**Figura 8:** Esquema de traçado de raios luminosos para os recipientes de base quadrada vistos nas Figuras 6a-d. Os subíndices numéricos 1, 2 e 3 encontrados nos ângulos  $\theta$  fazem referência a um dos três raios luminosos traçados em cada figura, identificados, cada um, com um círculo cinza numerado. Já os subíndices alfabéticos  $i$  e  $r$  indicam, respectivamente, a incidência e a refração desses raios. (Fonte: os autores)

relação à parte superior. Neste caso, observamos o canudo aparentemente *quebrado* e *separado*.

Na Figura 8c o ponto objeto está localizado na origem do sistema de referência, que, por sua vez, se localiza no eixo axial do recipiente cilíndrico. Para esta configuração, temos que os raios luminosos refletidos difusamente pelo canudo incidem perpendicularmente à interface de separação dos meios. A incidência perpendicular modifica somente a velocidade de propagação dos raios, mas não a sua direção. Sendo assim, o ponto imagem se forma na mesma posição e com o mesmo tamanho do objeto. Na Figura 6c (recipiente de base circular) vemos o canudo *praticamente* inteiro, sem a separação para a esquerda, embora ele pareça continuar “quebrado” devido à sua largura não nula.

Na Figura 8d observamos fenômeno semelhante ao descrito na Figura 8b, porém com uma única diferença: o ponto  $u$ , agora, está à direita da origem. Tal

fato terá implicações no sentido de desvio da parte inferior do canudo em relação à parte superior (fora d’água) que, antes, era deslocado para a esquerda, e, agora, encontra-se deslocado para a direita, como pode ser observado na Figura 6d.

### 3. Conclusão

A proposta experimental apresentada neste artigo permite complementar as explicações dos livros didáticos de física consultados no que se refere ao fenômeno da refração da luz associado à figuras semelhantes à Figura 1. É bem verdade que a descrição do fenômeno a partir de uma perspectiva superior é idêntica àquela realizada através de uma perspectiva lateral, quando esta, se refere ao recipiente na forma de aquário retangular. Para esses casos, temos que as perspectivas de observação são realizadas através de interfaces de separação água-ar (para a vista su-

perior e lateral) planas. Entretanto, o mesmo não acontece para o recipiente de forma cilíndrica, e será diferente para outras formas geométricas. A descrição do fenômeno a partir da perspectiva superior difere daquela fornecida pela perspectiva lateral, uma vez que devemos considerar a curvatura do recipiente. Este é, na verdade, o equívoco cometido por alguns dos livros didáticos de física utilizados como referência para a confecção deste artigo: a omissão da curvatura do recipiente na descrição fenomenológica, mesmo observando-se, claramente, a sua forma cilíndrica. Como consequência, justifica-se a aparente quebra de um objeto parcialmente imerso em água contida em um recipiente de base circular (face curva) com a mesma descrição feita para um recipiente de base quadrada (faces planas), sem salientar o importante papel da curvatura da interface que separa os meios transparentes envolvidos.

Acreditamos que as atividades aqui desenvolvidas possam servir de incentivo à prática experimental em óptica geométrica tanto no nível superior, quanto no ensino médio, dando aos estudantes a oportunidade de vivenciarem um pouco mais as dificuldades e minúcias inerentes ao conhecimento científico.

## Agradecimentos

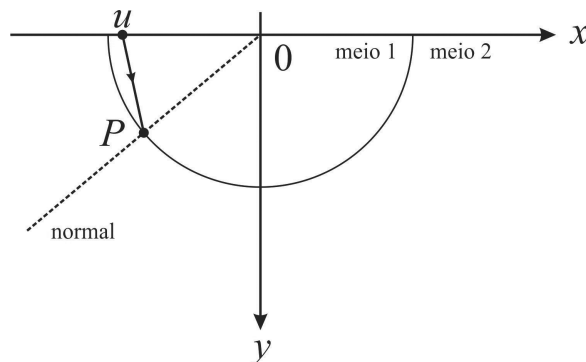
Os autores agradecem ao árbitro pelas frutíferas discussões e críticas, além da cuidadosa revisão do manuscrito.

## Apêndice

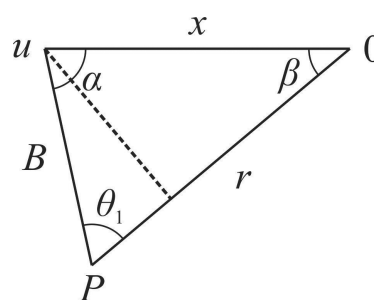
A Figura 8a apresenta o caso especial em que o objeto encontra-se próximo da borda fazendo com que toda a luz por ele refletida sofra reflexão total. Nesse caso, o objeto não pode ser visto pelo lado de fora do recipiente. Uma análise semelhante foi feita pela referência [10], entretanto, nos parágrafos seguintes, apresentamos uma análise numérica mais ampla, onde os ângulos de incidência e refração do raio de luz são calculados na borda, o que mostra claramente a ocorrência do fenômeno de reflexão total.

Um raio luminoso que parte de um objeto localizado no ponto  $u$  do plano cartesiano  $xOy$  e incide no ponto  $P$  da interface de separação entre meios de índice de refração diferentes (Figura 9), pode ser refletido ou refratado, dependendo do valor do seu ângulo limite.

Com base na Figura 9, podemos destacar o triângulo  $uOP$  (Figura 10). As variáveis  $x$ ,  $r$  e  $B$  representam,



**Figura 9:** Esquema de raio luminoso oriundo de objeto  $u$  incidindo sobre o ponto  $P$  localizado na interface de separação entre meios de índice de refração diferentes. (Fonte: os autores)



**Figura 10:** Triângulo destacado da Figura 9 utilizado para demonstração da equação (4). (Fonte: os autores)

respectivamente, a distância do objeto à origem do sistema de coordenadas, o raio do recipiente de base circular e a distância do objeto ao ponto  $P$ . Os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta_1$  representam, respectivamente, o ângulo entre as distâncias  $B$  e  $x$ , o ângulo entre a distância  $x$  e o raio  $r$  e o ângulo entre a distância  $B$  e o raio  $r$  (que na verdade é o ângulo de incidência).

Observando a Figura 10 vemos que  $x$  e  $r$  são constantes, uma vez que a posição do objeto é fixa e a base circular não possui seu raio variando. Neste caso, traçando-se uma reta perpendicular à  $r$  passando pelo ponto  $u$  (reta tracejada), podemos escrever a seguinte relação:

$$r = B \cos(\theta_1) + x \cos(\beta) \quad (4)$$

Isolando o ângulo de incidência  $\theta_1$  na equação (4), temos:

$$\theta_1 = \arccos \left[ \frac{r - x \cos(\beta)}{B} \right] \quad (5)$$

Aplicando a lei dos cossenos para  $B$ , uma vez que esta é a única distância variável, chegamos a:

$$B = \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos(\beta)} \quad (6)$$



**Tabela 4:** Intervalos de  $\beta$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  para os quais o canudo se torna visível ou não.

$\beta$	$\theta_1$	$\theta_2$	O canudo é observado?
$0,00^\circ \leq \beta \leq 4,32^\circ$	$0,00^\circ \leq \theta_1 \leq 48,63^\circ$	$0,00^\circ \leq \theta_2 \leq 86,71^\circ$	Sim
$4,32^\circ < \beta < 78,15^\circ$	$48,63^\circ < \theta_1 < 48,75^\circ$	-	Não ( <i>reflexão total</i> )
$78,15^\circ \leq \beta \leq 180,00^\circ$	$48,75^\circ \leq \theta_1 \leq 0,00^\circ$	$89,46^\circ \leq \theta_2 \leq 0,00^\circ$	Sim

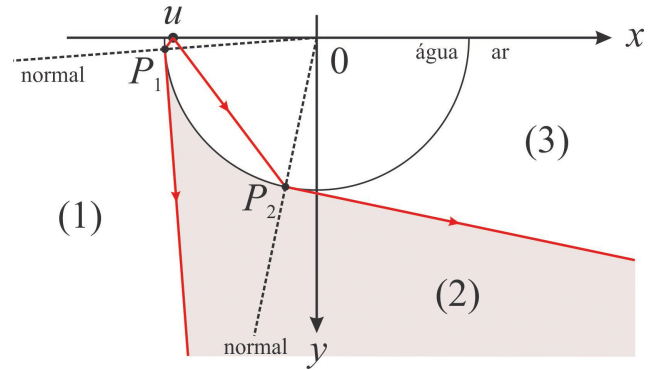
Substituindo a equação (6) na equação (5), chegamos à seguinte equação para  $\theta_1 = \theta_1(\beta)$ .

$$\theta_1(\beta) = \arccos \left[ \frac{r - x \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos(\beta)}} \right] \quad (7)$$

Antes de analisarmos o gráfico de  $\theta_1$  em função do ângulo  $\beta$ , é necessário substituirmos a equação (7) na equação referente à lei de Snell-Descartes (equação (3)), uma vez que, estamos interessados em determinar o intervalo angular para o qual o canudo não pode ser observado. Neste caso, o ângulo de refração  $\theta_2 = \theta_2(\beta)$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\theta_2(\beta) = \arcsen \left[ \frac{n_1}{n_2} \sen \left( \arccos \left( \frac{r - x \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos(\beta)}} \right) \right) \right] \quad (8)$$

Substituindo os valores de  $x = 3,15 \text{ cm}$  (o canudo está afastado  $0,20 \text{ cm}$  da parede esquerda do recipiente),  $r = 3,35 \text{ cm}$ ,  $n_1 = 1,33$  (índice de refração da água - meio 1) e  $n_2 = 1,00$  (índice de refração do

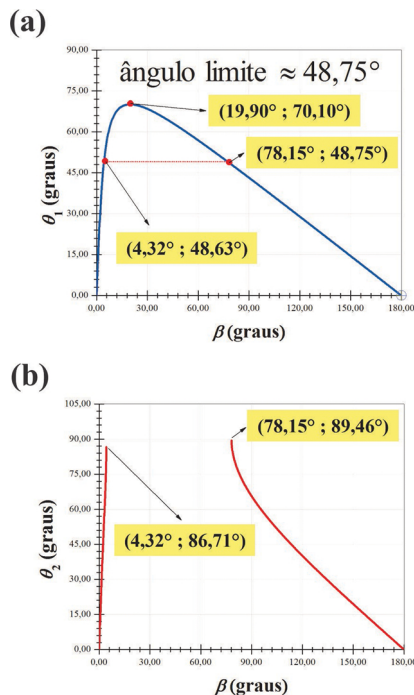


**Figura 12:** Regiões de observação do canudo: regiões 1 e 3 - existem raios luminosos transmitidos para o exterior do recipiente, possibilitando, neste caso, a observação do canudo; região 2 - não há raio refratado ficando, portanto, o canudo, impossibilitado de ser observado. (Fonte: os autores)

ar - meio 2) nas equações (7) e (8), seus respectivos gráficos podem ser observados na Figura 11.

Os valores de  $\beta$  e  $\theta_1$  referentes ao ponto mais alto da curva da Figura 11a, podem ser encontrados fazendo  $d\theta_1(\beta)/d\beta = 0$ . Assim, temos  $\beta = \arccos(x/r) \approx 19,90^\circ$  e  $\theta_1 \approx 70,10^\circ$ . De acordo com os gráficos acima, os intervalos de  $\beta$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , para os quais o canudo pode, ou não, ser observado, encontram-se resumidos na Tabela 4:

Deve-se notar que a medida que o ângulo de refração  $\theta_2$  se aproxima de  $90,00^\circ$ , que é a condição necessária para a ocorrência do fenômeno de reflexão total, o ângulo  $\theta_1$  se aproxima de  $48,75^\circ$  assumindo, neste caso, o papel de *ângulo limite*. De acordo com a Figura 12, um observador localizado na região 2 não é capaz de observar o canudo, uma vez que não há raio refratado na área compreendida entre os raios que passam pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Já para as regiões 1 e 3 existem raios refratados e, portanto, o canudo se torna visível.



**Figura 11:** Gráficos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em função de  $\beta$ . (Fonte: os autores)

### Referências

[1] E. Hecht, *Óptica* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2002), 2ªed.  
 [2] O. Guimarães, J.R. Piqueira e W. Carron, *Física* (Ática, São Paulo, 2014), v. 2, 1ªed, p. 243.

- [3] A. Máximo e B. Alvarenga, *Física: Contexto e Aplicações* (Scipione, São Paulo, 2014), v. 2, 1ªed, p. 203.
- [4] M. Pietrocola, A. Pogibin, R. Andrade e T.R. Romero, *Física: Conceitos e Contextos* (FTD, São Paulo, 2013), v. 2, 1ªed, p. 193.
- [5] F. Ramalho Junior, N.G. Ferraro e P.A.T. Soares, *Os Fundamentos da Física* (Moderna, São Paulo, 2009), v. 2, 10ªed, p. 284.
- [6] K. Yamamoto e L.F. Fuke, *Física para o Ensino Médio* (Saraiva, São Paulo, 2013), v. 2, 3ªed, p. 179.
- [7] F. Corni, *Phys. Educ.* **41**, 103 (2006).
- [8] K. Kaewkhong, A. Mazzolini, N. Emarat e K. Arayathanitkul, *Phys. Educ.* **45**, 97 (2010).
- [9] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física: Óptica e Física Moderna* (LTC, Rio de Janeiro, 2016), v. 4, 10ªed, p. 21.
- [10] C.E. Aguiar, A.C.F. Santos, E.B. Lopes e W.S. Santos, *Phys. Teach.* **51**, 522 (2013).