

Sobre a teoria de Einstein para ondas gravitacionais e sua aplicação no estudo da radiação emitida por um pulsar binário

On Einstein's theory for gravitational waves and their application in the study of the radiation emitted by a binary pulsar

Matheus Pinheiro Ramos¹, Roberto Vinhaes Maluf^{*1}

¹Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, Campus do Pici, Fortaleza, CE, Brasil.

Recebido em 31 de Maio, 2017. Revisado em 01 de Agosto, 2017. Aceito em 04 de Agosto, 2017.

Neste trabalho mostramos de forma didática a dedução da equação de onda relacionada com as chamadas *ondas gravitacionais*. Veremos que as referidas ondas surgem naturalmente como soluções das equações de Einstein linearizadas, após a escolha de um sistema de coordenada (gauge) adequado. Discutiremos ainda a geração de ondas gravitacionais e a natureza quadrupolar da radiação gravitacional emitida por um sistema binário em órbita circular. Por fim, aplicaremos a teoria desenvolvida nos dados observacionais da binária de Hulse-Taylor, obtendo assim uma noção dos valores que cercam este tipo de evento e também do quão precisa é a teoria apresentada.

Palavras-chave: Relatividade geral, Radiação gravitacional, Binária de Hulse-Taylor.

In this work we show a deduction of the wave equation related to the so-called gravitational waves. We will see that these waves arise naturally as solutions of the linearized Einstein equations, after choosing a suitable coordinate system (gauge). We will also discuss the generation of gravitational waves and the quadrupolar nature of gravitational radiation emitted by a binary system in circular orbit. Finally, we will apply the theory developed in the observational data of the Hulse-Taylor binary, thus obtaining notion of the values that involve this kind of event and how accurate the theory is.

Keywords: General Relativity, Gravitational Radiation, Hulse-Taylor binary.

1. Introdução

A nossa civilização, em todas as culturas, sempre foi fascinada pelo conceito de espaço (céu, inferno, etc.) e tempo (o início, meio e fim de tudo). Ao longo do tempo esses conceitos se enraizaram na nossa consciência, dando-nos as imagens mentais que usamos. Pensamos no espaço como uma entidade tridimensional (largura, altura e espessura) que nos rodeia, e pensamos no tempo como uma espécie de fluxo, que guia a evolução do nosso universo. Juntos eles funcionam como um palco, onde se dá a peça que descreve o universo. Nessa peça, os atores são tudo que podemos imaginar - planetas, estrelas ou até nós mesmos. Na antiga visão Newtoniana de mundo, esse palco é o mesmo, seja você um ator ou um mero espectador.

Porém, de acordo com Einstein em sua teoria da Relatividade Geral (RG), o espaço e o tempo deixam de ser apenas esse palco rígido, e passam a ser um ator da própria peça: o chamado espaço-tempo, um contínuo de quatro dimensões. Esse novo "ator" é modificado pela presença de matéria e energia. A presença de planetas, estrelas e galáxias (matéria e energia) curvam a estrutura

do espaço-tempo de forma semelhante a uma bola pesada esticando uma cama elástica.

Um dos resultados mais interessantes previsto na RG foi a existência de ondas gravitacionais. As ondas gravitacionais podem ser pensadas, de um modo grosseiro, como as ondas criadas quando jogamos pedrinhas na superfície de um lago: elas são ondulações (perturbações) na geometria do próprio espaço-tempo geradas por qualquer tipo de matéria acelerada, e se propagam pelo Universo à velocidade da luz. Contudo, diferentemente das ondas no lago, as ondas gravitacionais podem se propagar no espaço vazio (vácuo). Além disso, uma vez que a força gravitacional é muito fraca, as ondas geradas são extremamente pequenas, sendo consideravelmente intensas apenas em regiões que concentram uma grande quantidade de massa e energia, como na região próxima de um buraco negro.

O real existência dessas ondas ficou por um longo período restrito a discussões teóricas. Só a partir da década de 60 [1] os físicos passaram a buscar seriamente a detecção dessas pequenas ondulações do espaço-tempo, sem ter tido nenhum resultado confiável até fevereiro do ano passado. A descoberta anunciada pelos detectores LIGO (Laser Interferometer for Gravitatio-

*Endereço de correspondência: r.v.maluf@fisica.ufc.br.

nal waves Observatory) [2], e publicada na prestigiosa revista científica *Physical Review Letters* [3], não apenas confirma a existência das ondas gravitacionais como também fornece a primeira medição direta da existência de buracos negros.

O enorme interesse gerado pela descoberta do LIGO trouxe a necessidade de mostrar aos alunos de graduação como essa descoberta se deu e também como a teoria de Einstein prevê essas ondas. Excelentes artigos sobre este tema foram publicados no fim do ano passado na *Revista Brasileira de Ensino de Física (RBEF)* e ao leitor sugerimos consultá-los para maiores detalhes a cerca do experimento e resultados [4–7].

Neste artigo nós propomos revisitar os aspectos matemáticos da RG que estão diretamente ligados ao tema. Nosso objetivo é apresentar de forma didática ao aluno de graduação o cálculo explícito das ondas gravitacionais a partir de primeiros princípios, isto é, partindo diretamente da equação de Einstein, acessando o regime linear de campo fraco e obtendo uma solução geral para a equação de onda resultante. Como aplicação, estudamos a radiação gravitacional emitida por um sistema binário de massas girando em órbita circular. Os resultados teóricos são então aplicados na análise dos dados do evento denominado por PSR 1913+16 ou “Binária de Hulse-Taylor”, cuja observação possibilitou a primeira detecção indireta da emissão de ondas gravitacionais [8]. Dessa forma, pretendemos fornecer ao leitor iniciante em RG uma visão concreta sobre a dedução da solução das equações de Einstein que dão origem às ondas gravitacionais e como usá-las para confrontar os resultados experimentais. Tais estudos não são geralmente cobertos pelos cursos de introdução a RG em nível de graduação ou mesmo de pós-graduação e por isso achamos conveniente apresentá-los aqui.

A notação e as convenções adotadas são as mesmas da referência [9] e o restante do trabalho está organizada como segue. Na seção 2, faremos uma breve apresentação da equação de Einstein e suas implicações. Na seção 3, usaremos o método perturbativo para linearizar a equação de Einstein e mostrar que a perturbação obedece a uma equação de onda. Na seção 4, discutiremos a geração de ondas gravitacionais e a natureza quadrupolar da radiação gravitacional. Em seguida, calcularemos a energia emitida via radiação gravitacional por um sistema binário em órbita circular. Aplicaremos então a teoria desenvolvida nos dados observacionais na binária de Hulse e Taylor, comparando teoria e experiência. Por fim, na seção 5 teceremos nossas considerações finais.

2. A equação de Einstein

Na teoria geral da Relatividade (RG), publicada em 1916 por Albert Einstein [10], a noção newtoniana de espaço como um vasto vazio no qual os eventos acontecem e, portanto, não tendo efeito sobre o movimento da matéria é transformado em uma rede “espaço-tempo” que acolhe

essa matéria e guia o seu curso. Nesse contexto, a própria ideia do que pensamos por forças gravitacionais, nada mais é do que uma expressão do espaço-tempo ser curvo.

Segundo a RG de Einstein, os efeitos gravitacionais são incluídos em sistemas físicos através da métrica $g_{\mu\nu}(x)$ e, uma vez conhecida a distribuição de matéria e energia, a equação que nos permite obter tal métrica é a chamada *equação de Einstein* (uma maneira interessante de se deduzir a equação de Einstein baseada em argumentos físicos de simetria pode ser encontrada na referência [11]):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ é a constante gravitacional, $c = 2,997 \times 10^8 \text{m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu\nu}$ é o chamado tensor momento-energia. Trata-se do objeto mais geral que carrega a informação da massa, energia e momento do sistema a ser analisado. Do lado esquerdo da equação (1), temos o chamado tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$) que traz consigo informação acerca da curvatura do espaço-tempo em questão. Tal tensor é definido em termos de dois outros objetos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2)$$

são eles: o Tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}, \quad (3)$$

e o escalar de curvatura

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} \left(\partial_{\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu} \right), \quad (4)$$

que, por sua vez, são definidos em termos da conexão afim

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\nu\mu}). \quad (5)$$

O motivo de definirmos as expressões acima deve-se ao fato que posteriormente iremos linearizá-las.

A equação de Einstein constitui um conjunto de 10 equações diferenciais parciais não lineares em $g_{\mu\nu}$. Conforme citado, essa equação nos permite obter a métrica $g_{\mu\nu}$ quando conhecido o tensor momento-energia do sistema físico em questão¹. Dessa forma, saberemos como o espaço-tempo tem sua estrutura geométrica modificada pela presença de matéria. Não discutiremos a inclusão da constante cosmológica. Considerações acerca desta podem ser encontradas em vários livros texto. Consulte, por exemplo, [12] ou [13].

Vale ressaltar que as equações de campo da RG são consideravelmente mais complexas do que as equações de campo presentes na física clássica, como por exemplo as equações de Maxwell do eletromagnetismo. Tal

¹Como de fato temos um conjunto de equações é comum o uso do termo *equações* de Einstein no plural.

complexidade surge por causa da natureza não-linear do campo gravitacional. Enquanto no eletromagnetismo as equações de Maxwell são lineares justamente pelo fato do campo eletromagnético não transportar carga e não interagir consigo próprio. Em uma teoria de campo efetiva, o campo gravitacional é portador de energia e momento e, portanto, acaba gerando auto-interação, uma vez que no contexto da relatividade, energia e momento, além da massa, também são fontes de campo gravitacional. Uma discussão mais completa acerca desse tema pode ser encontrada em [9].

2.1. Transformação de calibre

O tensor de Einstein, dado por (2), é simétrico (pois $R_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ são simétricos) e o fato de trabalharmos num espaço-tempo quadridimensional implica que ele possui apenas 10 componentes independentes, da mesma maneira que a métrica $g_{\mu\nu}$. Portanto, a equação (1) consiste em um conjunto de dez equações algebricamente independentes. Poderíamos supor que a equação de Einstein acrescida das condições de contorno, seria suficiente para que determinássemos a métrica univocamente. No entanto, isso não ocorre pois as dez componentes de $G_{\mu\nu}$ estão relacionadas pela identidade de Bianchi

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \tag{6}$$

que formam um conjunto de quatro identidades diferenciais que devem ser respeitadas.

Como consequência, as dez equações de Einstein para $G_{\mu\nu}$ se reduzem a apenas seis verdadeiramente independentes, deixando-nos aparentemente impedidos de determinar todas as dez componentes da métrica. Entretanto, se $g_{\mu\nu}$ é solução de (1), então fazendo-se uma transformação de coordenada geral ($x \rightarrow x'$) obtemos uma nova métrica $g'_{\mu\nu}$ que também será solução de (1). Isto significa que $g'_{\mu\nu}$ possui quatro graus de liberdade que dependem da escolha das coordenadas x' e não podem representar graus de liberdade genuinamente físicos.

No eletromagnetismo, temos um problema semelhante que é o de determinar univocamente o quadripotencial² A_μ através das quatro equações de Maxwell. Tal problema só é resolvido quando adotamos um calibre (ou *gauge*³) particular⁴. O problema da unicidade da métrica pode ser resolvida de forma análoga, basta simplesmente que adotemos um sistema de coordenadas específico, que será o nosso gauge. É a escolha desse sistema (que pode ser expressa por quatro condições), em adição às seis equações independentes que já possuímos devido a (1), que nos permite determinar a métrica univocamente. Voltaremos a esse assunto nas próximas seções, quando se fará necessário adotarmos um gauge.

3. Teoria da perturbação

Obteremos a seguir a equação de Einstein no regime linear. Primeiramente, usaremos o *método perturbativo* que consiste, neste caso, em escrevermos a métrica $g_{\mu\nu}$ como a de Minkowski mais uma pequena perturbação; substituir essa métrica perturbada na equação de Einstein e então linearizá-la, de modo a obter a perturbação em função de algum parâmetro ou classe de parâmetros. Dentro do regime linear, discutiremos ainda o problema da invariância de gauge.

3.1. A equação de Einstein no regime linear

A teoria linearizada da gravitação é baseada no pressuposto de que em regiões do espaço-tempo distantes de qualquer fonte gravitacional, o campo é fraco e a métrica se desvia apenas levemente da de Minkowski ($\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, com os demais elementos fora da diagonal nulos) [14]. O que torna essa suposição válida, é o fato de encontrarmos frequentemente na natureza situações nas quais a distribuição de matéria é cercada pelo vácuo e os corpos mais próximos estão muito afastados; de forma que o campo gravitacional pode ser tido como fraco pelo menos em uma região intermediária onde a métrica é a minkowskiana mais uma pequena perturbação. Tal região é conhecida como *zona de campo distante* (ou *far field*) e em geral o estudo das soluções ondulatórias das equações de campo são restritos às soluções que exibem tal região.

Matematicamente, a aproximação mencionada acima é descrita como uma perturbação linear de primeira ordem na métrica de Minkowski⁵, na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{7}$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. A inversa da métrica fica dada por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Pode-se interpretar a versão linearizada da RG (onde todos os efeitos são determinados em primeira ordem de $h_{\mu\nu}$), como uma teoria que descreve a propagação da perturbação ao longo de um espaço-tempo minkowskiano⁶. Nesse regime, as equações (5), (3) e (4) são escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_\nu h_{\mu\lambda} + \partial_\mu h_{\nu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{9}$$

⁵Esse fato também nos permitirá usar $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$ para levantar e descer índices, respectivamente.

⁶Estamos considerando pequenas perturbações apenas sobre o espaço-tempo de Minkowski e isso não precisa ser sempre assim. Poderíamos, por exemplo, considerar essas mesmas perturbações sobre um outro espaço-tempo qualquer de métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$ e, para esses casos, escreveríamos nossa métrica perturbada como $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$. Obtendo assim uma teoria que descreve a propagação da perturbação ao longo de um espaço-tempo de métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$. Essa abordagem é necessária, por exemplo, na cosmologia.

² $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$, onde ϕ é o potencial escalar e \mathbf{A} o potencial vetor.

³Do original em inglês.

⁴Como, por exemplo, $\partial_\mu A^\mu = 0$ que é o chamado gauge de Lorentz.

o tensor de Ricci⁷

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h^\mu_\sigma + \partial_\mu \partial_\sigma h^\mu_\nu - \partial_\sigma \partial_\nu h - \partial_\mu \partial^\mu h_{\nu\sigma}), \end{aligned}$$

que como esperado é um tensor simétrico. Fazendo uma contração no tensor de Ricci, obtemos o escalar de curvatura

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^{\sigma\nu} + \partial_\sigma \partial_\mu h^{\sigma\mu} - \partial_\mu \partial^\mu h - \square h) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h, \end{aligned} \tag{10}$$

e, dessa forma, a equação de campo linearizada é escrita como

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} \\ - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h = 16\pi G T_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{11}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia calculado na ordem zero em $h_{\mu\nu}$, tal que sua magnitude é da mesma ordem da perturbação e satisfaz a lei de conservação ordinária $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Esta é uma suposição razoável, uma vez que a quantidade de energia e momento devem ser pequenas no limite de campos fracos [9]. Notemos que aqui, e no restante do trabalho, estamos assumindo $c = 1$ por simplicidade. Uma vez de posse das equações de campo linearizadas, devemos agora lidar com a questão da invariância de gauge.

3.2. Invariância de gauge

Como explicitado anteriormente, o problema da invariância de gauge aparece porque a procura por uma métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ não especifica completamente o sistema de coordenadas no espaço-tempo; podemos ter outros sistemas de coordenadas em que a métrica continue a ser escrita como a de Minkowski acrescida de uma pequena perturbação, mas a perturbação será diferente. Assim, a decomposição da métrica como feita em (7) não é unívoca.

Não devemos esperar, portanto, que as equações de campo nos deem uma única solução, pois qualquer solução obtida dessas equações sempre pode gerar outras através de uma transformação de coordenadas (tal característica é assegurada pelo princípio da covariância geral). Precisamos então especificar de maneira unívoca a perturbação $h_{\mu\nu}$. Segundo [13], a transformação de coordenadas mais geral que preserva o limite de campo fraco é da forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \tag{12}$$

⁷Onde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.

onde $\partial\xi^\mu/\partial x^\nu$ é, no máximo, da mesma ordem de magnitude que $h_{\mu\nu}$.

Partindo-se da lei de transformação tensorial para a métrica dada por

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}, \tag{13}$$

pode-se mostrar que a perturbação $h_{\mu\nu}$ transforma-se, segundo (12), na forma

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \tag{14}$$

onde $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu$. A equação (14) é a chamada *transformação de gauge para a teoria linearizada*, e a invariância da teoria perante estas transformações é a chamada *invariância de gauge*. Pode-se provar, por inspeção direta, que a transformação (14) deixa o tensor de curvatura linearizado invariante. Isto é de suma importância, uma vez que a física do problema está principalmente no tensor de curvatura (ou de Riemann) $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Consequentemente, a equação de campo dada por (11) também é invariante sobre a mesma transformação⁸. Assim, fixando as quatro funções representadas por ξ^μ , estaremos especificando univocamente a perturbação.

4. Radiação gravitacional

Nesta seção discutiremos a geração de ondas gravitacionais e a natureza quadrupolar da radiação gravitacional. Por fim, aplicaremos a teoria aqui desenvolvida aos dados observacionais da binária de Hulse e Taylor.

4.1. Produção de ondas gravitacionais

Conforme mencionamos acima, a equação de Einstein linearizada (11) é invariante de gauge e sua forma parece proibitiva para qualquer tentativa de solucioná-la. Entretanto, a liberdade de gauge nos permite escolher um sistema de coordenada que possa simplificar bastante a forma da equação. Uma das escolhas mais comuns é o chamado sistema de coordenada harmônico (ou simplesmente gauge harmônico), definido por

$$g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0, \tag{15}$$

cuja forma linearizada é dada por

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h. \tag{16}$$

Tal escolha particular de gauge é sempre possível pois mesmo que a perturbação original $h_{\mu\nu}$ não a obedeça,

⁸Essa invariância a qual nos referimos é semelhante a invariância de gauge do eletromagnetismo. Na teoria eletromagnética, a física está contida nos campos eletromagnéticos, que são geralmente escritos em termos do quadripotencial A^μ . O problema reside no fato de o quadripotencial não ser unívoco (diferentes quadripotenciais podem gerar os mesmos campos). Tal problema é resolvido fixando o quadripotencial através de uma transformação, geralmente $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$.

podemos usar (14) e obter uma nova perturbação $h'_{\mu\nu}$ que satisfaz a condição (16). De fato, basta realizar uma transformação de coordenada que seja solução de

$$\square \xi_\nu = \partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h. \tag{17}$$

Assim, no gauge de harmônico, a equação de Einstein (11) assume a forma

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{18}$$

A equação anterior indica que seja conveniente introduzirmos a *perturbação de traço reverso*⁹, definida por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \tag{19}$$

sendo esse nome é justificado pelo fato de que $\bar{h} = -h$. Para tal perturbação, a condição de gauge harmônico (16) implica em $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$.

Devido à enorme semelhança com o gauge de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) do eletromagnetismo, a condição acima ($\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$) recebe o mesmo nome¹⁰. Assim, no gauge de Lorentz, a equação de Einstein assume a forma simplificada

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}, \tag{20}$$

sendo portanto uma equação de onda para cada uma das componentes da perturbação.

Dada uma fonte $T_{\mu\nu}$, nosso objetivo é encontrar a solução geral para a equação (20) e trabalhar as propriedades da radiação emitida por um sistema em diferentes tipos de movimento. Matematicamente, isso é semelhante ao problema de encontrar a solução para as equações de Maxwell na presença de fontes, onde tínhamos de resolver $\square A^\mu = -4\pi J^\mu$ para determinar o quadripotencial. A solução da equação (20) é obtida a partir do método da função de Green, cuja a solução é

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}) d^3y, \tag{21}$$

onde $t = x^0$. A quantidade $t_r \equiv t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ é chamada de tempo retardado e sua ocorrência no argumento de (21) implica que a perturbação gravitacional se propague com velocidade unitária, que assumimos ser precisamente a velocidade da luz no vácuo.

A solução (21) pode ser interpretada da seguinte maneira: a perturbação no campo gravitacional em (t, \mathbf{x}) é a soma das influências da energia e momento da fonte no ponto $(t_r, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ no cone de luz passado. Percebemos que enquanto a gravitação newtoniana possui uma dinâmica trivial (isto é, todas as interações ocorrem de

forma instantânea), a gravitação einsteiniana é não trivial, ou seja, a perturbação gerada na fonte deve levar um certo tempo até chegar a outro ponto do espaço-tempo. Vale ressaltar que existe ainda uma outra solução para a equação (20) que está relacionada com o tempo avançado $t_a \equiv t + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, no entanto a descartamos, pois viola causalidade.

4.2. A natureza quadrupolar da radiação gravitacional

Nosso próximo passo será extrair informações acerca da radiação gravitacional emitida por uma fonte $T_{\mu\nu}$. Antes de prosseguir, será conveniente eliminarmos a dependência de $T_{\mu\nu}$ no tempo retardado, o que pode ser conseguido através de uma transformada de Fourier na variável tempo [9, 12]. Se $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$ e $\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier de $T_{\mu\nu}(t, \mathbf{y})$ e $\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r e^{i\omega t_r} \int d^3y \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y}) \\ &= 4G \int d^3y \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{22}$$

Na equação acima, a primeira linha representa simplesmente a definição da transformada de Fourier no tempo, na segunda linha nós inserimos a solução (21), na terceira linha usamos a definição do tempo retardado $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ e o fato de $dt_r = dt$ para implementar uma mudança na variável de integração de t para t_r , e finalmente, na quarta linha usamos novamente a definição da transformada de Fourier.

Vamos agora nos restringir a situação na qual a fonte encontra-se isolada, muito distante e é composta apenas por matéria não relativista¹¹. Tais aproximações são adequadas e suficientes para o estudo da radiação emitida por um sistema binário em orbita circular que trataremos a seguir.

Pondo a origem do sistema de coordenadas perto da fonte, a aproximação adotada nos permite trocar na equação (22) $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ por $r = |\mathbf{x}|$, o que faz com que o termo $e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ possa ser reescrito como $e^{i\omega r}/r$. A aproximação de baixas velocidades (quando comparadas à velocidade da luz) nos permite assumir que r é praticamente constante, pois demora muito tempo até que a distância entre a fonte e o observador tenha alguma diferença significativa. Com tudo isso, podemos reescrever (22) como

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}). \tag{23}$$

¹¹Matéria cuja a velocidade típica é muito menor que a da luz.

⁹Podemos reconstruir a perturbação original a partir de $\bar{h}_{\mu\nu}$. Assim, nenhuma informação é perdida ao fazermos essa mudança.

¹⁰Vale ressaltar que a perturbação original não é transversa nesse gauge pois $\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h$.

Felizmente, precisaremos calcular apenas as componentes espaciais de $\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$, e as razões para isso são duas: uma de caráter físico e outra matemático. A motivação de caráter físico reside no fato de que a lei de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implica que todas as integrais sobre $T^{0\nu}$ são conservadas e independentes do tempo¹². Dito de outra maneira, a transformada de Fourier de $T^{0\nu}$ com respeito à variável tempo conterá apenas termos estáticos ($\omega = 0$). Isso nos mostra que a parte dependente do tempo da métrica, que é o que caracteriza a radiação, está contida nas componentes espaciais da perturbação [12].

A razão de ordem matemática está associada com o gauge adotado $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ (que implica $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ por causa de (20)). Esta por sua vez, estabelece uma relação entre as componentes da perturbação no espaço de Fourier, dada por:

$$-i\omega \tilde{h}^{0\nu}(\omega, \mathbf{x}) + \partial_j \tilde{h}^{j\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 0. \tag{24}$$

Tal equação nos mostra que \tilde{h}^{0j} pode ser determinado a partir de \tilde{h}^{ij} . Além disso, juntando o conhecimento de que $\tilde{h}^{0i} = \tilde{h}^{i0}$ com a equação (24), é possível determinar \tilde{h}^{00} . Portanto, precisamos calcular apenas as componentes espaciais da perturbação, pois todas as outras podem ser obtidas a partir delas.

Dadas as devidas motivações, passamos então a resolver (23) apenas para as componentes espaciais. Começamos por efetuar uma integração por partes

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int d^3y \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3y y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}). \tag{25}$$

onde o primeiro termo do lado direito da igualdade é uma integral de superfície que irá desaparecer pelo fato de a fonte se encontrar isolada; enquanto o segundo termo pode ser relacionado com \tilde{T}^{0j} , uma vez que a lei de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, quando escrita no espaço de Fourier, impõe que

$$\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu}. \tag{26}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) &= -i\omega \int d^3y y^i \tilde{T}^{0j} \\ &= -\frac{i\omega}{2} \int d^3y (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) \\ &= -\frac{i\omega}{2} \int d^3y [\partial_k (y^i y^j \tilde{T}^{0k}) - y^i y^j (\partial_k \tilde{T}^{0k})] \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00}. \end{aligned} \tag{27}$$

A segunda linha é justificada por conta da simetria dos índices i e j , enquanto as duas últimas foram novamente aplicações da integração por partes e a equação (26). É convencional na literatura [9, 12, 13], definir o chamado *tensor momento de quadrupolo* da distribuição de matéria, como sendo

$$I^{ij}(t) = \int d^3y y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}), \tag{28}$$

que juntamente com (27) nos permite escrever a equação (23) na forma

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega). \tag{29}$$

Retornando para a dependência temporal, a equação anterior é reescrita como

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t_r), \tag{30}$$

que é a chamada *fórmula de quadrupolo* onde $t_r = t - r$.

Esse resultado nos revela que a radiação gravitacional emitida por uma fonte, nas condições descritas, é proporcional à derivada temporal de segunda ordem do tensor momento de quadrupolo da distribuição de matéria. Podemos observar que isso contrasta com a radiação eletromagnética, em que a maior contribuição é proporcional à derivada temporal de segunda ordem do momento de dipolo da distribuição de cargas, e o motivo disso é fácil de entendermos.

O momento de dipolo no eletromagnetismo é definido usando-se a distribuição de cargas, e para um sistema feito de cargas com diferentes taxas q/m , ele pode mudar. No caso gravitacional, o momento de dipolo \mathbf{d} de um sistema de massas é dado por:

$$\mathbf{d} = M\mathbf{R}_{CM}, \tag{31}$$

onde M é a massa total do sistema e \mathbf{R}_{CM} é o vetor que localiza o centro de massa. No caso de distribuições isoladas, temos que o centro de massa se move com velocidade constante e, portanto, $\dot{\mathbf{R}}_{CM} = 0$. Concluimos, então, que não podemos ter radiação gravitacional proveniente do momento de dipolo [12]. Assim, na decomposição multipolar, o termo de ordem mais baixa para a radiação gravitacional é o momento de quadrupolo. Vale ressaltar também que o momento de quadrupolo é geralmente menor que o de dipolo, e é por essa razão, bem como o fraco acoplamento de matéria a gravidade, que implica que a radiação gravitacional é tipicamente muito menor do que a eletromagnética [9].

4.3. A energia transportada por ondas gravitacionais

Vamos agora a uma das questões mais delicadas da teoria: a energia transportada por ondas gravitacionais. Assunto por sinal muito importante, pois nas teorias de

¹²Explicitamente: $\frac{d}{dt} \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x \partial_0 T^{0\nu} = - \int d^3x x \partial_i T^{i\nu} = - \oint ds_i T^{i\nu} = 0$, pois as fontes são localizadas.

campo tratadas por intermédio da RG, temos que o fator decretório para a existência de ondas não é apenas que os campos sejam dependentes do tempo; mas que, além disso, haja transporte de energia e momento sem haver transporte de matéria. No entanto, essa é uma questão muito difícil de se lidar [15, 16].

As complexidades desse assunto não são apenas de origem técnica, mas também conceituais, uma vez que o próprio princípio da equivalência - pilar básico da RG - não nos permite definir a energia associada a um campo gravitacional¹³. Neste trabalho, não discutiremos o mecanismo pelo qual calcula-se a energia transportada por ondas gravitacionais. Apenas usaremos a relação, já existente na literatura [9, 12], de que a potência irradiada (L_{GW}) por sistemas físicos devido a emissão de ondas gravitacionais é dada por

$$L_{GW} = \frac{dE_{GW}}{dt} = -\frac{G}{5} \left\langle \frac{d^3 I_{ij}^{TT}}{dt^3} \frac{d^3 I_{TT}^{ij}}{dt^3} \right\rangle, \quad (32)$$

onde I_{ij}^{TT} é a versão transversal e de traço nulo do momento de quadrupolo calculado, como antes, no tempo retardado. A fórmula acima representa a média temporal da taxa de energia que é trocada, e fontes irradiantes estão perdendo energia, por isso o sinal negativo na igualdade.

4.4. Ondas gravitacionais emitidas por um sistema binário em órbita circular

Como aplicação dos resultados obtidos até agora, usaremos a fórmula (32) para calcular a energia emitida, via radiação gravitacional, por um sistema bem simples: dois corpos de massas m_1 e m_2 efetuando órbitas circulares em torno de um centro de massa em comum. Tal situação é descrita na figura 1:

Faremos uma análise dessa situação através da mecânica newtoniana, válida em baixas ordens. Neste caso, os parâmetros orbitais são completamente determinados pela massa reduzida μ e pela distância l_0 entre os dois corpos envolvidos. Baseando-se na figura acima para a nossa análise, onde adotamos a origem do sistema de coordenadas coincidindo com o centro de massa do sistema, podemos escrever, em termos da massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / M$ e a separação orbital $l_0 = r_1 + r_2$, que as distâncias r_1 e r_2 valem respectivamente

$$r_1 = \frac{m_2 l_0}{M}, \quad (33)$$

$$r_2 = \frac{m_1 l_0}{M}, \quad (34)$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema.

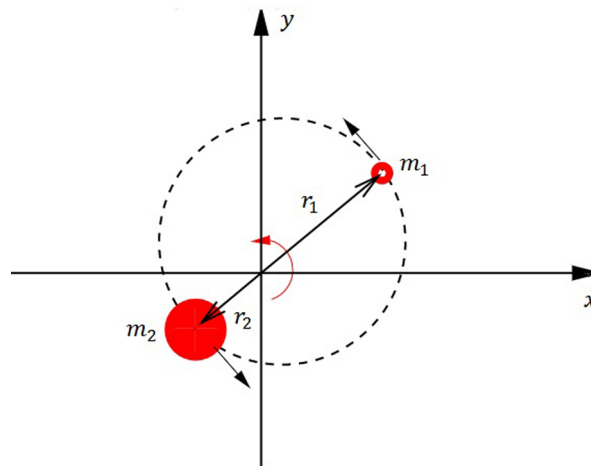


Figura 1: Dois corpos de massas m_1 e m_2 efetuando órbitas circulares em torno de um centro de massa em comum.

A frequência orbital Ω é obtida igualando-se a força gravitacional newtoniana, a resultante centrípeta. Para cada uma das massas teremos

$$G \frac{m_1 m_2}{l_0^2} = m_1 \Omega^2 \frac{m_2 l_0}{M}, \quad (35)$$

$$G \frac{m_1 m_2}{l_0^2} = m_2 \Omega^2 \frac{m_1 l_0}{M}, \quad (36)$$

o que implica que para ambas as massas

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{l_0^3}}, \quad (37)$$

e, portanto, as equações de movimento serão

$$x_1 = \frac{m_2 l_0}{M} \cos(\Omega t) \quad , \quad y_1 = \frac{m_2 l_0}{M} \sen(\Omega t), \quad (38)$$

$$x_2 = -\frac{m_1 l_0}{M} \cos(\Omega t) \quad , \quad y_2 = -\frac{m_1 l_0}{M} \sen(\Omega t). \quad (39)$$

De posse dessas equações estamos aptos a computar o tensor momento de quadrupolo, definido por (28). Para este caso temos

$$T^{00} = \sum_{n=1}^2 m_n \delta(x - x_n) \delta(y - y_n) \delta(z), \quad (40)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m_1 \int x^2 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \delta(z) dx dy dz \\ &+ m_2 \int x^2 \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) \delta(z) dx dy dz \\ &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 \\ &= \mu l_0^2 \cos^2(\Omega t) \\ &= \frac{\mu}{2} l_0^2 \cos(2\Omega t) + \frac{\mu}{2} l_0^2. \end{aligned} \quad (41)$$

¹³Na RG a definição de energia (componente 00 do tensor momento-energia) depende do observador. Uma forma simples de ver isto é a seguinte: não sabemos dizer se a gravidade sentida é devido ao referencial está acelerado ou por existir realmente um campo gravitacional.

Aplicando-se o mesmo procedimento para as outras componentes, encontramos que todas são nulas, exceto

$$I_{yy} = -\frac{\mu}{2}l_0^2 \cos(2\Omega t) - \frac{\mu}{2}l_0^2, \quad (42)$$

$$I_{xy} = \frac{\mu}{2}l_0^2 \sin(2\Omega t). \quad (43)$$

No entanto, note que precisaremos apenas da parte temporal dessas componentes e, portanto, as contas serão efetuadas tomando-se

$$I_{xx} = -I_{yy} = \frac{\mu}{2}l_0^2 \cos(2\Omega t), \quad (44)$$

$$I_{xy} = \frac{\mu}{2}l_0^2 \sin(2\Omega t). \quad (45)$$

Antes de prosseguirmos é interessante notar que a frequência das ondas gravitacionais emitidas é o dobro da frequência orbital. Em uma forma matricial o tensor momento de quadrupolo é escrito como

$$I_{ij} = \frac{\mu}{2}l_0^2 \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou de forma mais reduzida

$$I_{ij} = \frac{\mu}{2}l_0^2 A_{ij}, \quad (46)$$

onde A_{ij} são os elementos da matriz apresentada acima. Substituindo esse resultado em (32), encontramos que a magnitude da radiação gravitacional emitida pelo sistema binário é dada por

$$L_{GW} = \frac{dE_{GW}}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 l_0^5}, \quad (47)$$

onde reinsertamos a constante c no resultado acima.

A ordem de magnitude da amplitude dessas ondas pode ser calculada substituindo-se (46) na fórmula do quadrupolo, o que resulta em

$$h_0 = \frac{4\mu MG^2}{rl_0 c^4}. \quad (48)$$

4.5. A binária de Hulse e Taylor

Em 1974, no Observatório de Arecibo, dois astrônomos Russell Hulse e Joseph Taylor fizeram uma importante descoberta: uma estrela binária formada por um pulsar e outra estrela de nêutrons que orbitam um baricentro comum. Tal sistema foi designado por *PSR 1913 + 16*, e foi o primeiro a possibilitar uma detecção indireta de ondas gravitacionais. O que faremos agora é aplicar os resultados obtidos na subseção anterior a este sistema, a fim de termos uma ideia dos valores envolvidos nesse tipo de evento; por exemplo, a taxa da liberação de energia devido à emissão de ondas gravitacionais. Como consultado em [8, 17], os dados do referido evento são:

$$\begin{aligned} m_1 &\sim 1,441 M_\odot, \\ m_2 &\sim 1,387 M_\odot, \\ l_0 &= 0,19 \cdot 10^{10} \text{ m}, \\ P &= 7\text{h } 45\text{m } 7\text{s}, \\ r &= 1,5 \cdot 10^{20} \text{ m}, \end{aligned}$$

onde $M_\odot = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ e $R_\odot = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$ são, respectivamente, a massa e o raio do Sol. Os outros parâmetros acima são os mesmos descritos na subseção anterior; P o período e r a distância binária-Terra. De posse desses dados, podemos concluir que a frequência ν_{GW} das ondas emitidas nesse evento são da ordem de

$$\nu_{GW} = \frac{2\Omega}{2\pi} \sim 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}, \quad (49)$$

além disso, usando-se (47) e (48) encontramos também

$$L_{GW} \sim 7,0 \cdot 10^{23} \text{ W}, \quad (50)$$

$$h_0 \sim 6,12 \cdot 10^{-23}. \quad (51)$$

Os resultados acima nos permitem tirar algumas conclusões imediatas. Primeiro, a amplitude de tais ondas é ínfima. Incrivelmente, por mais alta que seja a energia irradiada nesse evento, nem mesmo os observatórios do *Advanced LIGO* seriam capazes de detectar essas ondas. As curvas de sensibilidade do *LISA* e *LIGO* são mostradas na Figura 2. Neste gráfico, a amplitude adimensional característica está em unidades “por raiz quadrada de Hz ”. Aplicando os valores obtidos em (49) e (51) na fórmula de conversão $h_0 \nu_{GW}^{-\frac{1}{2}}$, obtemos o valor aproximado de $7,2 \times 10^{-21} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$ para o sistema binário *PSR 1913 + 16* (para maiores detalhes sobre as convenções utilizadas na literatura para as curvas de sensibilidade de ondas gravitacionais, sugerimos ao leitor consultar a referência [18]). Notemos que sua localização está fora das regiões de detecção dos aparelhos¹⁴. Entretanto, outros sistemas binários mais próximos da Terra poderiam ser detectados. Por exemplo, os sistemas detectados pelo *LIGO*, teriam sido detectados pelo *LISA*, uns 10 anos antes, se ele já estivesse existindo (ver seminário apresentado na conferência *Amaldi12* [19], recentemente).

Observamos ainda que a perda de energia devido à emissão de ondas gravitacionais é altíssima. Para se ter uma ideia de quanta energia estamos falando, o próprio Sol irradia uma quantidade equivalente a $4,3 \cdot 10^{26} \text{ W}$ através de radiação eletromagnética, mas apenas $5 \cdot 10^3 \text{ W}$ via radiação gravitacional. É de se esperar que com a perda de toda essa energia as componentes da binária acabem se aproximando, o que acarreta na diminuição do período orbital. Para finalizar o trabalho, o que faremos agora é aproveitar todos os resultados obtidos até aqui para calcular essa diminuição no período. Isso nos possibilitará ter uma noção de quando irá acontecer a coalescência das referidas componentes.

A expressão (47) foi obtida a partir de (32). Isto implica que ela deve ser considerada como uma média de muitos comprimentos de onda ou, equivalentemente, sobre um número muito grande de períodos. Portanto, a fim de que L_{GW} seja uma grandeza definida, devemos estar em

¹⁴Podemos criar nossa própria curva de sensibilidade e as regiões de localização dos eventos através dos aplicativos online disponíveis em <http://www.srl.caltech.edu/~shane/sensitivity/MakeCurve.html> e <http://rhcole.com/apps/GWplotter/>.

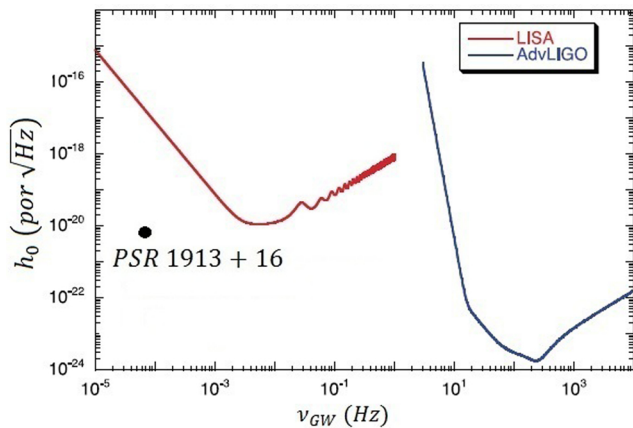


Figura 2: Em vermelho, temos a curva de sensibilidade dos equipamentos LISA (Laser Interferometer Space Antenna Project). Em azul, a curva de sensibilidade dos equipamentos do Advanced LIGO. Apenas eventos localizados acima de tais curvas podem ser detectados. No entanto, como pode ser visto, *PSR 1913 + 16* não se encontra em nenhuma dessas regiões e, portanto, não poderia ser detectado.

uma região onde os parâmetros orbitais não mudam significativamente durante o intervalo de tempo necessário para executar tal média. Esta hipótese é chamada de *aproximação adiabática* e, certamente, é aplicável a sistemas tais como *PSR 1913 + 16* que estão muito longe da coalescência¹⁵.

No regime adiabático, o sistema tem tempo de ajustar a órbita para compensar a energia perdida pela emissão de ondas gravitacionais com uma mudança na energia orbital, de tal maneira que:

$$\frac{dE_{orb}}{dt} + L_{GW} = 0. \tag{52}$$

Vejamos agora as consequências dessa equação.

A energia orbital é igual à energia cinética E_c de cada uma das componentes, acrescida da energia potencial U de ligação (que neste caso é de origem gravitacional), isto é

$$E_{orb} = E_c + U, \tag{53}$$

onde

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m_1(\Omega r_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\Omega r_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Omega^2 \left[\frac{m_1 m_2^2 l_0^2}{M^2} + \frac{m_1^2 m_2 l_0}{M^2} \right] \\ &= \frac{G\mu M}{2l_0}, \end{aligned} \tag{54}$$

e

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{l_0} = -\frac{G\mu M}{l_0}. \tag{55}$$

Substituindo (54) e (55) em (53), obtemos

$$E_{orb} = -\frac{G\mu M}{2l_0}, \tag{56}$$

e tomando-se a derivada temporal da expressão acima

$$\frac{dE_{orb}}{dt} = \frac{G\mu M}{2l_0} \left(\frac{1}{l_0} \frac{dl_0}{dt} \right) = -E_{orb} \left(\frac{1}{l_0} \frac{dl_0}{dt} \right). \tag{57}$$

No entanto, a expressão acima pode ser escrita de uma maneira mais sugestiva, para isso, reescreveremos dl_0/dt em termos da derivada temporal de Ω . De (37), temos

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{dl_0}{dt}, \tag{58}$$

e substituindo (58) em (57), ficamos com

$$\frac{dE_{orb}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{E_{orb}}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \tag{59}$$

Por outro lado, a frequência orbital Ω é relacionada com o período P pela relação $\Omega = 2\pi/P$, o que implica em

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}, \tag{60}$$

pondo isso na equação (59), obtemos

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{P}{E_{orb}} \frac{dE_{orb}}{dt}, \tag{61}$$

ou, fazendo uso de (52)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P}{E_{orb}} L_{GW}. \tag{62}$$

A relação acima nos permite calcular o quanto o período da órbita muda devido a emissão de ondas gravitacionais. Supondo que nossa órbita seja circular e, portanto, que os dados acima são verdadeiros, temos que

$$P = 27907 \text{ s}$$

$$E_{orb} \sim -1,4 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

$$L_{GW} = 7,0 \cdot 10^{23} \text{ W}$$

logo

$$\frac{dP}{dt} \sim -2,2 \cdot 10^{-13} \text{ s/s}. \tag{63}$$

No entanto, o valor de dP/dt foi obtido a partir de medições. Tal valor, medido com uma precisão altíssima, foi encontrado depois de aproximadamente três décadas de monitoramento e vale:

$$\frac{dP}{dt} = -(2,4184 \pm 0,0009) \cdot 10^{-12} \text{ s/s}, \tag{64}$$

o que implica em uma taxa de redução de período orbital de aproximadamente 76,5 microssegundos por ano. Com isso, o tempo de vida calculado para a espiral final é de 300 milhões de anos [8].

Como pode ser visto, existe uma grande diferença entre o valor obtido teoricamente e o medido. Na verdade, tal discrepância já era de ser esperada. Isto porque a órbita real do sistema não é circular, mas sim uma elipse de excentricidade $\epsilon \approx 0,617$ [8]. Como explicado em [12], se

¹⁵Os dados mostrados acima indicam que essa coalescência está longe de ocorrer. O que queremos é ter ideia do quão longe.

refizéssemos os cálculos usando as equações de movimento apropriadas para uma órbita excêntrica, obteríamos

$$\frac{dP}{dt} \sim -2,4 \cdot 10^{-12} \text{s/s} \quad (65)$$

que é incrivelmente próximo do valor medido.

Em 2004, Joseph H. Taylor e Joel M. Weisberg publicaram uma nova análise dos dados experimentais, concluindo que a disparidade de 0,2% entre os dados e os resultados previstos é devido a constantes galácticas pouco conhecidas, incluindo a distância do Sol ao centro da galáxia, movimento próprio do pulsar e sua distância da Terra [8,17].

5. Conclusão

O objetivo deste trabalho foi fazer um estudo introdutório sobre ondas gravitacionais. Começamos por fazer, na seção 2, uma breve revisão sobre a equação de Einstein da RG. Em seguida, na seção 3, aplicamos o método perturbativo nas equações de Einstein e em seguida as linearizamos. Na seção 4, estudamos a geração de ondas gravitacionais. Para isso, adotamos o gauge harmônico o que nos permitiu reescrever a equação de Einstein na forma de uma equação de onda com termo de fonte, isto é, considerando a presença de matéria. Passamos então a discutir a natureza quadrupolar da radiação e suas diferenças em relação à radiação eletromagnética que é de natureza dipolar. Por fim, computamos a energia emitida via radiação gravitacional por sistemas binários em órbita circular e aplicamos nossos resultados aos dados experimentais da *PSR 1913 + 16* (Binária de Hulse e Taylor). Os dados desse pulsar binário levam à previsão teórica de que a potência irradiada nesse evento, devido exclusivamente às ondas gravitacionais, é da ordem de $7 \cdot 10^{23} \text{ W}$. Para se ter uma ideia do que significa essa quantidade de energia, o próprio Sol irradia uma quantidade equivalente a $4,3 \cdot 10^{26} \text{ W}$ através de radiação eletromagnética, mas apenas $5 \cdot 10^3 \text{ W}$ via radiação gravitacional.

Outro dado de suma importância obtido aqui foi a diminuição do período orbital dessa binária, algo em torno de $dP/dt \simeq -2,2 \cdot 10^{-13} \text{ s/s}$. No entanto, este resultado não é tão próximo do valor medido $dP/dt \simeq -(2,4184 \pm 0,0009) \cdot 10^{-12} \text{ s/s}$ (uma redução de aproximadamente $76,5 \mu\text{s}$ por ano). Tal medição foi resultado de aproximadamente três décadas de muitas observações e realizada com uma precisão altíssima. De fato, esse erro já era esperado, pois a órbita do sistema real não é circular e sim elíptica, com excentricidade $e \simeq 0,617$. Como pode ser visto em [12], fazendo-se novamente os cálculos, mas dessa vez usando as equações de movimento apropriadas para uma órbita excêntrica, iríamos encontrar $dP/dt \simeq -2,4 \cdot 10^{-12} \text{ s/s}$, o que concorda com o resultado experimental.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (processo 305678/2015-9) e a Fundação Cearense de apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - FUNCAP pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] J. Weber, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 498 (1968).
- [2] <http://www.ligo.caltech.edu/>.
- [3] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari and LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [4] Alberto Saa, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **38**, e4201 (2016).
- [5] Luís Carlos Bassalo Crispino e Marcelo Costa de Lima, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **38**, e4203 (2016).
- [6] Mauro Cattani e José Maria Filardo Bassalo, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **38**, e4202 (2016).
- [7] Fabiana Botelho Kneubil, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **38**, e4309 (2016).
- [8] Joel M. Weisberg and Joseph H. Taylor, *ASP Conference Series* **328**, 25 (2005).
- [9] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2004).
- [10] Albert Einstein, *Annalen der Physik* (ser. 4) **51**, 642 (1916).
- [11] M. Cattani, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **20**, 27, (1998).
- [12] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [13] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- [14] Hans Stephani, *General Relativity: An Introduction to the Theory of the Gravitational Field* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [15] Rodrigo Panosso Macedo, *Emissão de Ondas Gravitacionais por Fontes Compactas: O Regime Não-Linear*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2011.
- [16] Edgard de Freitas Diniz Evangelista, *Um Novo Método para o Cálculo dos Fundos Estocásticos em Ondas Gravitacionais Gerados por Sistemas Binários Compactos*. Tese de Doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2013.
- [17] Wikipédia, Hulse-Taylor binary, https://en.wikipedia.org/wiki/Hulse-Taylor_binary, acessado em 27 de Julho de 2017.
- [18] Christopher J. Moore, Robert H. Cole and Christopher P.L. Berry, *Class. Quant. Grav.* **32**, 015014 (2015).
- [19] <http://www.amaldi12.org/talks>.