

Mecânica estatística de sistemas complexos

Statistical Mechanics for Complex Systems

Constantino Tsallis^{*1,2,3}

¹Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Sistemas Complexos
Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

²Santa Fe Institute, New Mexico, USA.

³Complexity Science Hub Vienna, Vienna, Austria.

Recebido em 12 de setembro de 2020. Aceito em 19 de outubro de 2020.

A magnífica mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, amálgama de primeiros princípios e teoria de probabilidades, constitui um dos pilares da física teórica contemporânea. Entretanto, ela não se aplica a grande número dos sistemas ditos complexos, caracterizados essencialmente por um forte emaranhamento espaço-temporal de seus elementos. Revisamos aqui a proposta de generalização chamada mecânica estatística não extensiva, que emergiu em 1988. Ela está baseada em entropias não aditivas (com índice $q \neq 1$), em contraste com a entropia de Boltzmann-Gibbs-von Neumann-Shannon, que é aditiva (com índice $q = 1$). Sua fundamentação básica, assim como aplicações selecionadas em física e fora dela, são brevemente descritas.

Palavras-chave: Mecânica estatística não extensiva, entropias não aditivas, sistemas complexos, sistemas dinâmicos não lineares.

The magnificent Boltzmann-Gibbs statistical mechanics, amalgam of first principles and theory of probabilities, constitutes one of the pillars of contemporary theoretical physics. However, it does not apply to a wide number of the so called complex systems, characterized essentially by a strong space-time entanglement of its elements. We tutorially review here the proposal for its generalization, referred to as nonextensive statistical mechanics, which emerged in 1988. It is based on nonadditive entropies (with index $q \neq 1$), in contrast with the Boltzmann-Gibbs-von Neumann-Shannon entropy, which is additive (with index $q = 1$). Its basic foundations, as well as selected applications in physics and elsewhere, are briefly described.

Keywords: Nonextensive statistical mechanics, nonadditive entropies, complex systems, nonlinear dynamical systems.

*Si l'action n'a quelque splendeur de liberté,
elle n'a point de grâce ni d'honneur.*
Montaigne

1. Introdução

Na física teórica contemporânea, cinco são as disciplinas obrigatórias em qualquer curso avançado de Física ao redor do mundo: *mecânica clássica ou Newtoniana*, sua generalização para velocidades próximas à da luz, qual seja a *mecânica relativista restrita de Einstein*, assim como sua generalização para massas pequenas, qual seja a *mecânica quântica*, o *eletromagnetismo de Maxwell*, e finalmente a *mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs* (MEBG), incluindo, para sistemas com grande número de elementos, sua conexão com a Termodinâmica clássica. Lembremos que as equações centrais da mecânica clássica são $\vec{F} = m\vec{a}$ e $E = p^2/2m$. As da teoria da relatividade são $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ e $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$. A equação central da mecânica

quântica é a de Schrodinger, e as do eletromagnetismo as de Maxwell. Finalmente, as equações centrais da teoria de Boltzmann-Gibbs (BG) são $p_i \propto e^{-E_i/k_B T}$ e $S = k_B \ln W$, e a da Termodinâmica é $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}$. Não temos definido matematicamente estas varias grandezas aqui por considerar isto desnecessário para o leitor típico deste artigo. Mencionemos entretanto, por oportuno, que até aparecerem a teoria da relatividade restrita e a mecânica quântica no início do século XX, usava-se simplesmente a expressão *mecânica*, pois só existia a de Newton. Analogamente, até 1988, quando foi proposta a *mecânica estatística não extensiva* (MENE) [1] (ver detalhes em [2, 3]), usava-se simplesmente a expressão *mecânica estatística*, pois só existia a de BG. A situação tem hoje consideravelmente evoluído, como focalizaremos precisamente neste artigo. Desde o ponto de vista epistemológico, veremos que a mecânica estatística não extensiva generaliza a de BG de modo semelhante a como a relatividade restrita e a mecânica quântica contêm a mecânica de Newton; ou ainda como a relatividade geral de Einstein contêm a restrita. Na Fig. 1 ilustramos esquematicamente as mais importantes conexões que nos levam das teorias

* Endereço de correspondência: tsallis@cbpf.br

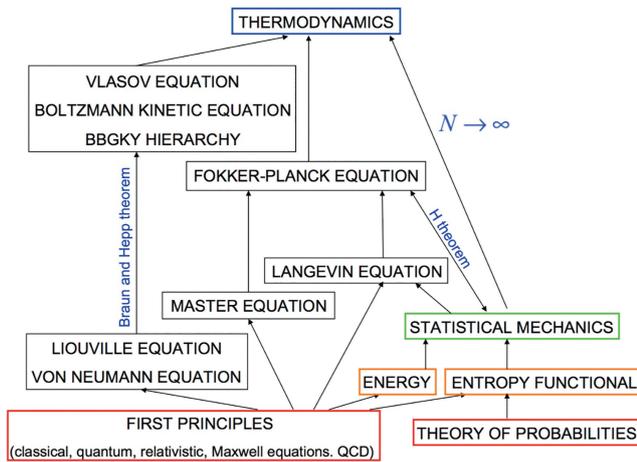


Figura 1: Descrições microscópica (de primeiros princípios da eletro-mecânica), mesoscópicas e macroscópica (termodinâmica) da natureza em física teórica contemporânea incluindo varias, obviamente não todas, equações relevantes. A energia emerge da eletro-mecânica como uma constante de movimento. O funcional entrópico emerge de primeiros princípios eletro-mecânicos como uma função adequada das probabilidades diretamente relacionadas às trajetórias no espaço de fases, ou no espaço de Hilbert, ou no de Fock, e às correlações ali envolvidas. O teorema de Braun e Hepp que é mencionado em uma das ligações é aquele provado em [4]. Somente apresentamos aqui um esquema básico: outros ramos e conexões existem que não estão indicados neste diagrama (veja por exemplo [5]).

ditas de *primeiros princípios* (descrição microscópica) até a Termodinâmica (descrição macroscópica), através de diversas aproximações intermediárias (descrição mesoscópica).

Vejamos agora: quais são as características que fazem que um sistema obedeça as leis da mecânica estatística de BG ($q = 1$, como explicitaremos em breve), e quais aquelas que o levam a obedecer as leis da MENE ($q \neq 1$)? De uma maneira intuitiva e simplificada podemos dizer que um sistema (incluindo sua circunstância) pode ser *simples* ou *complexo*, correspondendo tipicamente a $q = 1$ e a $q \neq 1$, respectivamente. Mas e em que consiste, neste contexto, a complexidade? (área de estudo de uma ciência à qual Murray Gell-Mann gostava de se referir como *plectics*, do grego *plektós*, tecido). Como a beleza, a complexidade é difícil de definir porém relativamente fácil de identificar [6]. Assim, os sistemas complexos tipicamente possuem relevantes características não lineares. Esta não linearidade pode ser dinâmica, estrutural, e outras que ilustraremos gradualmente ao longo da presente revisão. Podemos adiantar dizendo que correlações espaço-temporais entre os graus de liberdade do sistema decaindo rapidamente (e.g., exponencialmente no regime assintótico) apontam para a MEBG ($q = 1$), enquanto se caem lentamente (e.g., como leis de potências no regime assintótico) apontam frequentemente para MENE ($q \neq 1$). Uma ressalva se impõe: enquanto existe essencialmente *uma única*

maneira de ser simples, existem *infinitas maneiras de ser complexo*. Assim, num dado contexto, existe uma única maneira de ser linear e infinitas maneiras de ser não linear. Ou ainda, nas palavras de Liev Tolstói em *Anna Karénina: Todas as famílias felizes se parecem, cada família infeliz é infeliz à sua maneira*. Trocando em miúdos para nosso contexto: a mecânica estatística de BG é única (e, portanto, paradigmática); as não Boltzmannianas são infinitas, sendo a MENE apenas uma destas. Entretanto, por razões que até agora permanecem ilegíveis – até intrigantes –, a MENE, suas q -exponenciais e suas q -Gaussianas (que definiremos em breve, e que, para $q = 1$, reproduzem respectivamente as exponenciais e Gaussianas que constituem as inconfundíveis impressões digitais da MEBG) emergem, como veremos, com surpreendente frequência nos mais diversos sistemas naturais, artificiais e sociais.

Fechando esta introdução, é oportuno fazer o comentário que segue. Em qualquer bom livro de mecânica quântica tem 5 sistemas que são detalhadamente analisados. Estes são: (1) uma partícula em um poço quadrado, (2) um oscilador harmônico, (3) um rotor rígido, (4) uma partícula com spin $1/2$ na presença de campo magnético externo, e (5) um átomo de Hidrogênio *não ionizado*. Em qualquer bom livro de MEBG são detalhadamente analisadas as propriedades térmicas básicas (e.g., a equação de estado, o calor específico) dos primeiros quatro, ... mas não do quinto! *Por que?* Mais ainda: *Por que é raramente explicitada esta intrigante ausência?* O motivo é, entretanto, simples: a interação Coulombiana elétron-próton é de *longo* alcance, portanto a *função de partição de BG diverge*, o que inviabiliza o cálculo de qualquer propriedade termoestatística no equilíbrio térmico [7]¹. De fato, se não supormos que este átomo se encontra confinado em algum volume finito, *ele simplesmente carece de equilíbrio térmico a qualquer temperatura diferente de zero*. Eis uma boa razão, entre muitas outras, para generalizar a MEBG! (no quadro de um formalismo teórico mais flexível, talvez seja possível discutir utilmente sistemas como esse em termos de estados quasi-estacionários não-Boltzmannianos).

¹ Gibbs escreve: *In treating of the canonical distribution, we shall always suppose the multiple integral in Equation (92) [a função de partição, como é chamada hoje] to have a finite value, as otherwise the coefficient of probability vanishes, and the law of distribution becomes illusory. This will exclude certain cases, but not such apparently, as will affect the value of our results with respect to their bearing on thermodynamics. It will exclude, for instance, cases in which the system or parts of it can be distributed in unlimited space [...]. It also excludes many cases in which the energy can decrease without limit, as when the system contains material points which attract one another inversely as the squares of their distances. [...]. For the purposes of a general discussion, it is sufficient to call attention to the assumption implicitly involved in the formula (92).*

2. Entropias Não Aditivas e Termodinâmica

Um funcional entrópico $S(\{p_i\})$ (com $\sum_{i=1}^W p_i = 1$) (ou simplesmente *entropia*) é dito *aditivo* [8] se, para dois sistemas A e B probabilisticamente independentes (i.e., $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B, \forall (i, j)$), $S(A+B) = S(A) + S(B)$. Caso contrário, a entropia é dita *não aditiva*.

A entropia de BG, base da MEBG, é definida como segue:

$$S_{BG}(\{p_i\}) = k \sum_{i=1}^W p_i \ln \frac{1}{p_i}, \quad (1)$$

onde k é uma constante convencional positiva (usualmente $k = k_B$ em física, e $k = 1$ em teoria da informação). Para equiprobabilidade, S_{BG} atinge o valor

$$S_{BG} = k \ln W. \quad (2)$$

É trivial verificar que S_{BG} dada pela Eq. (1) é aditiva. Existe de fato uma única generalização de S_{BG} , a entropia de Renyi $S_q^R = k \frac{\ln \sum_{i=1}^W p_i^q}{1-q}$, que também é aditiva, $\forall q$. Ela é útil para caracterizar estruturas geométricas tais como multifractais, e de modo geral na teoria da informação, mas não necessariamente em termodinâmica propriamente dita pois carece de algumas propriedades matemáticas que parecem ser imprescindíveis para este fim.

Podemos generalizar S_{BG} de outra maneira, qual seja [1]

$$\begin{aligned} S_q(\{p_i\}) &= k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} = k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i} \\ &= -k \sum_{i=1}^W p_i^q \ln_q p_i \\ &= -k \sum_{i=1}^W p_i \ln_{2-q} p_i, \quad (q \in \mathcal{R}; S_1 = S_{BG}), \end{aligned} \quad (3)$$

onde

$$\ln_q z \equiv \frac{z^{1-q} - 1}{1-q}, \quad (\ln_1 z = \ln z). \quad (4)$$

Para equiprobabilidade, S_q atinge o valor

$$S_q = k \ln_q W. \quad (5)$$

Para variáveis contínuas S_q toma a forma

$$S_q(\{p(x)\}) = k \frac{1 - \int dx [p(x)]^q}{q-1} = k \int dx p(x) \ln_q \frac{1}{p(x)}, \quad (6)$$

e, em mecânica quântica, toma a forma

$$S_q(\rho) = k \text{Tr}[\rho \ln_q(1/\rho)], \quad (7)$$

onde ρ é a matriz densidade.

Podemos facilmente verificar que

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}, \quad (8)$$

ou ainda

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1-q}{k} S_q(A) S_q(B). \quad (9)$$

Vemos assim que, para $q \neq 1$, S_q é *não aditiva*². Outrossim, ela possui propriedades (tais como, por exemplo, concavidade e estabilidade de Lesche para todo $q > 0$, convexidade para todo $q < 0$, composabilidade para todo q , unicidade nos axiomas q -generalizados de Shannon [9] e de Khinchin [10], admissibilidade nos axiomas de Shore-Johnson [11], entre outras [2, 3, 12]), que conduzem à sua essencial utilidade para formular a MENE. Vemos que, para $\frac{1-q}{k} \rightarrow 0$ (portanto para $1/k \rightarrow 0$ para q fixo, ou para $q \rightarrow 1$ para k fixo), a relação (9) recupera a aditividade de S_{BG} . Este fato é análogo com a conhecida composição de velocidades ($v_{12} = \frac{v_1+v_2}{1+(v_1 v_2)/c^2}$) em teoria da relatividade: ela é não linear, mas no limite onde a velocidade da luz $c \rightarrow \infty$ recupera a composição Galileana (linear) de velocidades ($v_{12} = v_1 + v_2$) que constitui uma das marcas da mecânica Newtoniana. Podemos nos perguntar: por que, na sua generalização da teoria de Newton, Einstein admitiu violar a simpática e intuitiva fórmula de Galileo? Resposta: era um preço pequeno a pagar para atingir um objetivo muito maior, qual seja a invariância de Lorentz da teoria, o que permitia unificar a mecânica com o eletromagnetismo de Maxwell. Analogamente, admitiremos violar a simples aditividade de S_{BG} para atingir um objetivo muito maior, qual seja a preservação da termodinâmica clássica para qualquer valor de q . Este ponto constitui um dos pilares da MENE, e é o que discutiremos a seguir.

Imaginemos por simplicidade que temos equiprobabilidade no sistema, portanto $p_i = 1/W, \forall i$. Se as N variáveis aleatórias do sistema são aproximadamente independentes, temos que $W(N) \sim \mu^N$ com $\mu > 1$ (por exemplo, o número total de configurações de N moedas não viciadas independentes é $W(N) = 2^N$). Consequentemente temos que $S_{BG}(N) = k \ln W(N) \propto N$, portanto a entropia total é *extensiva* como exigido pela termodinâmica clássica!

Mas se as N variáveis do sistema estão fortemente correlacionadas, acontece frequentemente que $W(N) \sim N^\rho$ com $\rho > 0$. Neste caso, não devemos usar a expressão de BG pois teríamos $S_{BG}(N) = k \ln W(N) \propto \ln N$, que não é extensiva, violando portanto a termodinâmica clássica que, com sua estrutura de transformações de Legendre, impõe a extensividade da entropia total em todos os casos (ver [13] e suas referências). Em contraste, podemos facilmente verificar que, para $q = 1 - 1/\rho$, $S_q(N) = k \ln_q W(N) \propto N$, sendo assim *extensiva*, satisfazendo portanto a termodinâmica clássica! Neste caso,

² Existe hoje na literatura grande número de entropias não aditivas, mas a que está diretamente associada à MENE é S_q .

vemos que sacrificar a aditividade da entropia S_{BG} nos permite atingir o objetivo superior de satisfazer a estrutura matemática das transformações de Legendre da Termodinâmica. Esta propriedade constitui de fato a pedra angular da MENE! (ver [14]).

3. Otimizando S_q com Vínculos Canônicos Simples

Seguindo as linhas tradicionais de Boltzmann e Gibbs, ilustremos o ensemble canônico baseado na entropia (3). Mais precisamente, otimizando

$$S_{2-q}(\{p(x)\}) = -k \int dx p(x) \ln_{2-q} \frac{1}{p(x)} \quad (10)$$

com os vínculos

$$\int dx p(x) = 1, \quad (11)$$

e

$$\int dx E(x)p(x) = U, \quad (12)$$

obtemos

$$p_q(x) = \frac{e_q^{-\beta_q E(x)}}{\int dy e_q^{-\beta_q E(y)}}, \quad (13)$$

onde a função q -exponencial $e_q^z \equiv [1 + (1 - q)z]_+^{1/(1-q)}$ ($e_1^z = e^z$) é a função inversa de $\ln_q z$; $[Z]_+$ é igual a Z se $Z > 0$, e é igual a zero caso contrário; a temperatura inversa efetiva β_q está relacionada com U através das Eqs. (11) e (12); naturalmente, para $q = 1$, recuperamos o célebre fator de BG; para $q > 1$ e $z < 0$ temos um decaimento assintótico em lei de potência, $e_q^z \sim 1/(-z)^{1/(q-1)}$; para $q < 1$ e $z < 0$ temos um corte para $z < 1/(1 - q)$. O fato de termos formalmente otimizado S_{2-q} no lugar de S_q é um procedimento isomorfo e simplifica os cálculos (ver detalhes em [15–17]).

Se usamos $E(x) = ax^2$ ($a > 0$) no vínculo (12), obtemos a função q -Gaussiana

$$p_q(x) = \frac{e_q^{-\beta_q ax^2}}{\int dy e_q^{-\beta_q ay^2}}. \quad (14)$$

Como ilustraremos em breve, as distribuições (13) e (14) emergem na natureza e alhures com uma frequência impressionante, que teria sido obviamente difícil de prever nos primórdios da proposta publicada em 1988 (quem diria em 1985, quando foi de fato formulada). A única maneira de entender a razão pela qual tamanha universalidade é observada parece ser com base em estruturas do tipo do Teorema do Limite Central (TLC) e a Teoria dos Grandes Desvios (TGD) na teoria de probabilidades. Por este motivo, faremos na próxima sessão uma breve revisão destas estruturas.

4. q -generalizando o Teorema do Limite Central e a Teoria dos Grandes Desvios

Observamos na natureza um número imenso de situações envolvendo Gaussianas (distribuições normais) ou distribuições muito próximas a elas: penetração de um perfume num ambiente fechado, difusão de açúcar em uma xícara de café, distribuição de pesos e alturas dos indivíduos de uma dada espécie de mamíferos, notas obtidas por grande número de estudantes em provas coletivas, para somente citar uns poucos exemplos. Acontece que a soma, ou a média aritmética, de muitas variáveis estocásticas independentes (ou quase) se aproxima inexoravelmente de uma Gaussiana quando o número destas variáveis cresce indefinidamente. Mais precisamente, isto acontece quando a variância das distribuições envolvidas é finita; caso ela divirja, os atratores no espaço das distribuições não mais são Gaussianas mas distribuições de Lévy (ou distribuições α -estáveis), que assintoticamente decaem como leis de potência; no limite $\alpha \rightarrow 2$ as distribuições de Lévy recuperam as Gaussianas, e para $\alpha = 1$ elas reproduzem as distribuições de Cauchy-Lorentz. É oportuno salientar neste ponto que, na natureza, são muito frequentes tanto as Gaussianas quanto distribuições empíricas que, ao longo de algumas décadas logarítmicas, exibem um comportamento em lei de potência (i.e., retas na representação log-log). Durante muitos anos estas últimas foram levemente associadas a distribuições de Lévy, mas a realidade é que pouquíssimas delas, se algumas, foram indubitavelmente mostradas de seguir a forma de Lévy *na parte central da distribuição empírica*, em particular o fato que, em representação log-log, elas necessariamente exibem, para $1 < \alpha < 2$, um ponto de inflexão (ponto que inexistente nas q -exponenciais e nas q -Gaussianas) [18]. Existem, de fato, infinitas distribuições diferentes das distribuições de Lévy que assintoticamente seguem leis de potência. Dentre elas, as q -exponenciais, as q -Gaussianas [19], e as distribuições (q, α) -estáveis [20].

Quando a forte hipótese de (quase) independência é dispensada e é substituída por uma classe específica de correlações (usualmente referidas como q -independência), as somas acima mencionadas convergem para distribuições q -Gaussianas, como provado em [19]. Esta propriedade é usualmente referida como o q -Teorema do Limite Central. Este teorema evidencia de fato condições *suficientes*, mas *não necessárias*, para termos q -Gaussianas como atratores no espaço das distribuições. Um teorema mais completo é muito desejável mas infelizmente não foi ainda estabelecido. Entretanto, é ao longo deste caminho que podemos intuir a razão de existirem tantos sistemas exibindo distribuições q -Gaussianas.

A Teoria dos Grandes Desvios focaliza a ‘velocidade’ à qual um atrator Gaussiano é atingido ao crescer o número N de variáveis. Na ausência de correlações

importantes, esta velocidade é caracterizada por uma aproximação exponencial do tipo $P(N) \propto e^{-r_1 N}$, onde a “rate function” $r_1 > 0$ é proporcional à entropia relativa de BG *por partícula*. Assim, $r_1 N$ corresponde a uma entropia total *extensiva*. Esta probabilidade $P(N)$ é a contrapartida matemática [21] do fator de BG $p_{BG}(\mathcal{H}) \propto e^{-\beta \mathcal{H}}$, onde o Hamiltoniano $\mathcal{H}(N)$ de um sistema de N partículas com interações de *curto* alcance é *extensivo*, i.e., proporcional a N .

Quando, devido a importantes correlações, o atrator no sentido do TLC é uma Q -Gaussiana, seria desejável que $P(N) \propto e_q^{-r_q N}$ onde $q = f(Q)$ é uma função satisfazendo $f(1) = 1$, e onde o “rate function” generalizado r_q represente ainda uma entropia relativa generalizada *por partícula*. Assim a entropia total seria ainda extensiva, mesmo não mais sendo aditiva para $q \neq 1$. Esta conjectura parece ser satisfeita em varias exemplos estudados na literatura [22–25]. Desnecessário dizer que uma prova geral deste comportamento é fortemente desejável, pois ela constituiria a contrapartida matemática do fator $p_q \propto e_q^{-\beta_q \mathcal{H}}$, onde $\mathcal{H}(N)$ é o Hamiltoniano de um sistema de N partículas com interações de *longo* alcance, por exemplo gravitação Newtoniana ou plasmas não neutros. Este longo alcance implica num Hamiltoniano superextensivo, mas, levando em conta que β_q consistentemente cessa de ser intensivo, o produto $\beta_q \mathcal{H}$ preserva a extensividade que ele trivialmente satisfazia no caso de curto alcance.

5. Algumas Aplicações

A MENE, ocasionalmente referida como q -estatística por simplicidade, conta atualmente com grande número de predições, verificações, aplicações em geral. Uma Bibliografia regularmente atualizada pode ser consultada em [26], assim como artigos teóricos, experimentais, observacionais e computacionais selecionados. Mencionaremos brevemente aqui alguns deles que ilustram o atual status da proposta, feita mais de três décadas atrás, de generalização da magnífica mecânica estatística de BG.

5.1. Mapa logístico no limiar do caos

O mapa logístico é definido como segue:

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2 \quad (a \in (0, 2); x_t \in [-1, 1]; t = 0, 1, 2, \dots) \tag{15}$$

Ele é o mais simples e paradigmático dos mapas dissipativos. Para $a = 2$ ele exhibe *caos forte* (com expoente de Lyapunov $\lambda_1(2) = \ln 2$, onde o uso do subíndice 1 será transparente em breve); para $a = a_c = 1.401155189092\dots$ temos o chamado *ponto de Feigenbaum* (ou *ponto de Feigenbaum-Coulet-Tresser*) e corresponde ao limiar do caos, ou ainda *caos fraco*, com expoente de Lyapunov $\lambda_1(a_c) = 0$. A sensibilidade às condições iniciais $\xi \equiv \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0}$ satisfaz $\xi(t) = e^{\lambda_1(a)t}$ quando $\lambda_1(a) > 0$, e satisfaz

$\xi(t) = e^{\lambda_{q_{sen}}(a)t}$ quando $\lambda_1(a) = 0$, onde $q_{sen} = 0.244487701341282066198\dots$ (*sen* indica *sensitividade*), e $\lambda_{q_{sen}}(a_c) = 1/(1 - q_{sen}) > 0$ [27–29].

Para caracterizar o ritmo de crescimento da entropia com o tempo quando o sistema encontra-se inicialmente em uma diminuta região do espaço de fase (neste caso x) e passa a explorar o espaço de fase todo, define-se a *produção de entropia por unidade de tempo* $K_{BG} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{BG}(t)}{t}$. A identidade de Pesin garante $K_{BG} = \lambda_1(a) > 0$ para todo valor de a correspondendo a caos forte. Mas esta identidade implica $0 = 0$ para $a = a_c$. Isto é sem dúvida correto porém pouco informativo. A entropia S_q permite uma identidade mais geral e interessante, qual seja

$$K_{q_{sen}} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{q_{sen}}(t)}{t} = \lambda_{q_{sen}} > 0. \tag{16}$$

Tanto para caos forte e caos fraco temos que, para $q > q_{sen}$, $K_q = 0$ (que inclui em particular o resultado $0 = 0$ da identidade de Pesin; para $q < q_{sen}$ temos $K_q \rightarrow \infty$; somente para $q = q_{sen}$ temos K_q *finito*). A identidade tradicional de Pesin corresponde assim ao caso particular $q_{sen} = 1$.

Podemos verificar ainda uma outra propriedade notável, ligada à versão dinâmica do Teorema do Limite Central. Se somamos os valores de x_t para N valores consecutivos e escalamos adequadamente, obtemos, no limite $N \rightarrow \infty$, um atrator Gaussiano quando $\lambda_1(a) > 0$, e um atrator $q_{attract}$ -Gaussiano com $q_{attract} = 1.66 \pm 0.05$ quando $\lambda_1(a) = 0$, em particular para $a = a_c$. Ver Fig. 2.

5.2. Mapa standard

O mapa padrão (ou mapa standard, ou ainda de Taylor-Chirikov) é definido como segue:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - K \sin(x_n) \pmod{2\pi} \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} \pmod{2\pi} \end{aligned} \tag{17}$$

onde K é um parâmetro que controla o grau de não linearidade do sistema. Este mapa é útil para diversas situações físicas, e constitui um exemplo paradigmático de mapa conservativo. Exemplos típicos de ocupação do espaço de fases estão indicados na Fig. 3. É evidente que os casos $K = 0$ e $K = 8$ são extremos no sentido que o espaço de fases consiste somente de ilhas de estabilidade no primeiro exemplo e exhibe um mar caótico no segundo. Os outros dois exemplos ilustram como o mar caótico emerge quando K cresce de zero para valores mais altos [31].

Sempre ao longo das linhas do Teorema do Limite Central, somamos N sucessivos valores da variável x após centralização. Escalando adequadamente a variável soma, verificamos numericamente que o histograma se aproxima, para $N \gg 1$, a uma $q_{attract}$ -Gaussiana com $q \simeq 2$. No cálculo numérico [31, 32] foi obtido $q_{attract} = 1.935$ com uma pequena barra de erro (ver Fig. 4), mas recentemente o resultado analítico foi atingido e ele

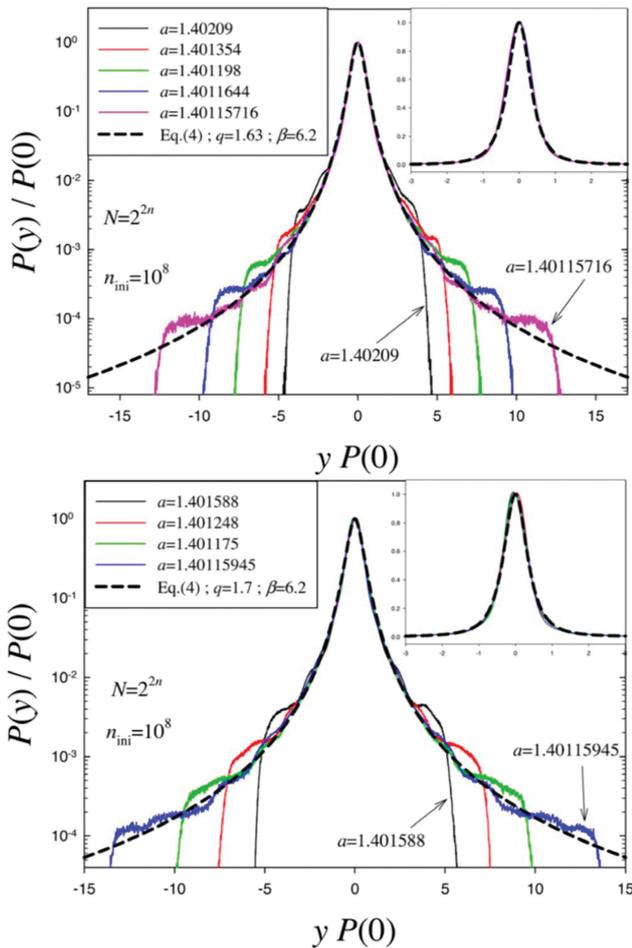


Figura 2: Colapso das densidades de probabilidades para os casos $N = 2^{2n}$, onde $2n$ é ímpar (*topo*), ou par (*fundo*). Quando n cresce, o histograma se aproxima gradualmente, para regiões crescentemente largas, de uma $q_{attract}$ -Gaussiana $P(y)/P(0) = e^{-\beta[yP(0)]^2}$ com $(q_{attract}, \beta) \simeq (1.66, 6.2)$. *Inserção:* Representação linear-linear dos dados para uma melhor visualização da região central. Detalhes em [30].

fornece $q_{attract} = 2$, i.e., uma distribuição de Cauchy-Lorentz [33].

5.3. Sistemas Hamiltonianos clássicos

Vários sistemas clássicos Hamiltonianos de N corpos com os graus de liberdade configuracionais *localizados* em rede d -dimensional tem sido estudados; mais especificamente formas generalizadas do ferromagneto inercial XY, do ferromagneto inercial de Heisenberg, e do sistema de osciladores anarmônicos acoplados de Fermi-Pasta-Ulam. O Hamiltoniano é genericamente desta forma:

$$\mathcal{H}_N = K_N + V_N = K_N + \sum_{ij} V_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, N), \tag{18}$$

onde K_N é a energia cinética total e $V_{ij} \propto 1/r_{ij}^\alpha$ ($\alpha \geq 0$); para $d = 1$, $r_{ij} = 1, 2, 3, \dots$; para $d = 2$, $r_{ij} = 1, \sqrt{2}, 2, \dots$; para $d = 3$, $r_{ij} = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$,

com $N \gg 1$. No limite $\alpha \rightarrow \infty$ as únicas interações existentes são entre sítios primeiros vizinhos, i.e., para $r_{ij} = 1$ (consequentemente $V_N \propto N$); para $\alpha = 0$, existem interações de igual intensidade entre todos os sítios e todos os outros da rede (consequentemente $V_N \propto N^2$); no caso geral temos $V_N \propto N \frac{N^{1-\alpha/d} - \alpha/d}{1-\alpha/d}$ [34]. Os casos $0 < \alpha/d < 1$ ($\alpha/d > 1$) são respectivamente referidos como interações de longo (curto) alcance. Resultados numéricos de primeiros princípios (dinâmica molecular, usando exclusivamente a lei de Newton) destes sistemas estão ilustrados na Fig. 5 para o modelo α -XY. Vemos que as célebres ‘impressões digitais’ da MEBG, quais sejam a distribuição Maxwelliana de velocidades e o fator de BG para as energias, são substituídos por q -Gaussianas e q -exponenciais no regime preponderadamente de longo alcance.

Verificamos, entretanto, que acima do valor crítico $\alpha/d = 1$ uma região intermediária existe para a qual observamos numericamente $q > 1$. No presente estágio não pode ser excluído que isto não seja uma consequência da finitude N do tamanho do sistema e/ou do intervalo dentro do qual a média temporal é realizada e/ou do tempo transcorrido antes de iniciar a média temporal. Somente resultados analíticos (até agora inatingíveis) ou cálculos numéricos extremamente pesados poderiam esclarecer definitivamente esta região complexa. Poderia, por exemplo, acontecer que resultados relevantes não triviais requeiram simultaneamente $N \rightarrow \infty$ and $t \rightarrow \infty$ ao longo de caminhos apropriadamente escalados. Tal foi o caso efetivamente verificado no modelo α -Fermi-Pasta-Ulam, como ilustrado na Fig. 6.

5.4. Sistemas confinados de muitos corpos na presença de super-amortecimento

Vários sistemas confinados de muitos corpos com graus de liberdade translacionais existem cuja evolução acontece em presença de super-amortecimento, portanto sem componente inercial. Podemos citar turbulência de vórtices em supercondutores do tipo II acoplados por interações repulsivas de curto alcance [37], assim como outros semelhantes d -dimensionais com acoplamentos repulsivos em lei de potencia do tipo $1/r^\alpha$ ($\alpha/d > 1$) [38], eletrólitos [39], citando somente alguns. Para a distribuição estacionária de posições (e também das velocidades ao longo do tempo) foi encontrado (analítica assim como numericamente com dinâmica molecular) $q_{attract} = 0$ e $q_{attract} = 1 - \alpha/d$, respectivamente. Na Fig. 7 ilustramos o exemplo dos supercondutores do tipo II. Em vários sistemas deste tipo tem-se verificado analiticamente o Princípio Zero da Termodinâmica, o Teorema H, a q -invariância da eficiência dos ciclos de Carnot, obtendo também as equações de estado, ilustrando assim um fato fisicamente muito relevante, qual seja que a MEBG é suficiente mas não necessária para a validade da Termodinâmica clássica, refinando assim um paradigma velho de uns 140 anos.

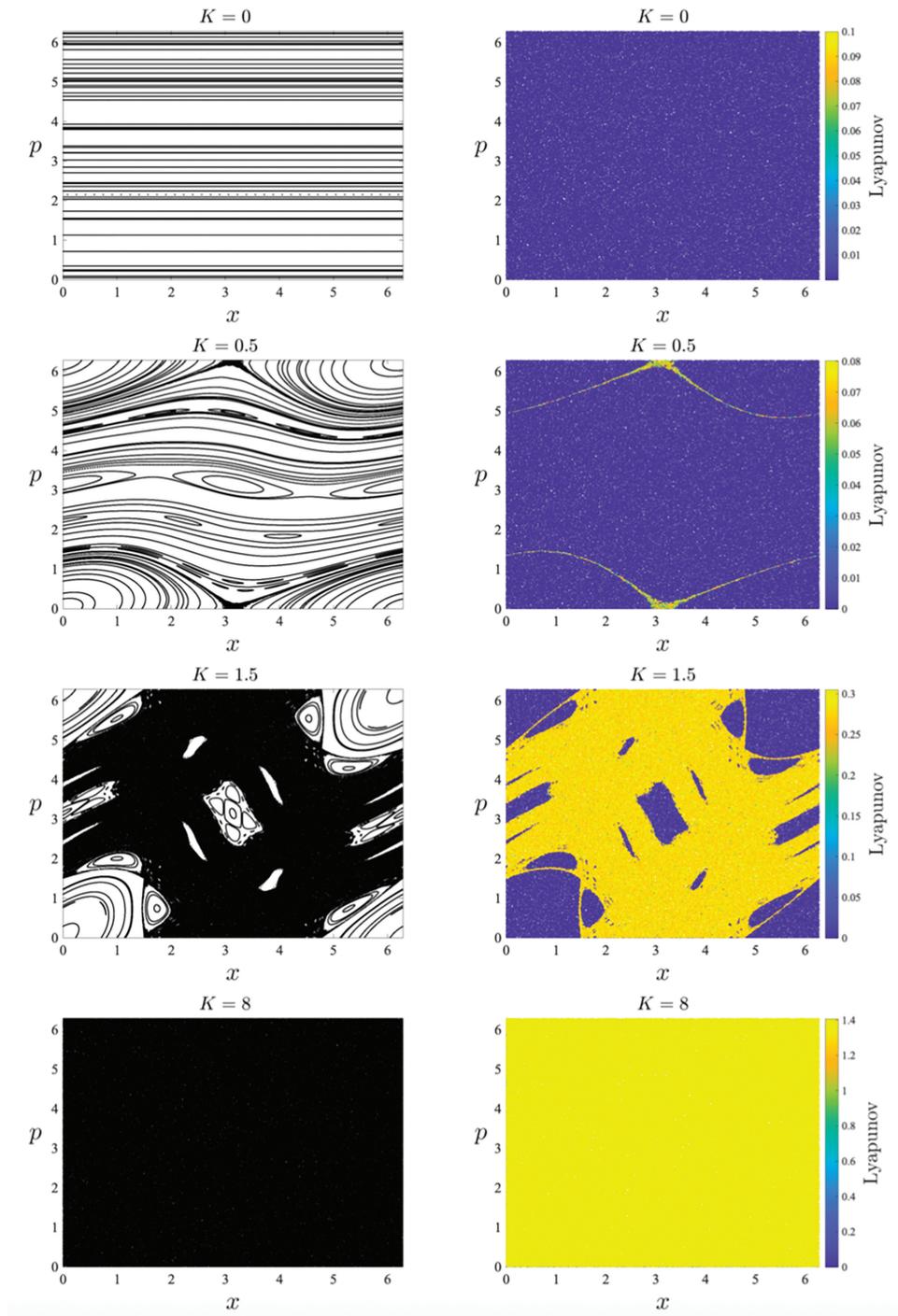


Figura 3: Mapa standard para valores representativos do parâmetro K . *Esquerda:* Ocupação no espaço de fases. *Direita:* Expoente de Lyapunov. Os exemplos $K = 0$ e $K = 8$ ilustram respectivamente os domínios de validade da q -estatística e da estatística de BG; os exemplos $K = 0.5$ e $K = 1.5$ ilustram situações intermediárias. Detalhes em [31].

5.5. Transição de fases quântica

Os sistemas quânticos de muitos corpos podem apresentar transições de fase a $T = 0$. Tal é o caso, por exemplo, da cadeia de Ising com interações ferromagnéticas de primeiros vizinhos, na presença de campo transversal. Existe um valor deste campo onde um

fenômeno crítico acontece que conecta os estados coletivos ferromagnético com o paramagnético. Neste ponto acontece um fenômeno peculiar. A entropia total do sistema de N spins é zero, em conformidade com o Terceiro Princípio da Termodinâmica, visto que o sistema está num estado puro. Mas a entropia de um bloco qualquer de L spins com $L < N$ é positiva, pois ela corresponde

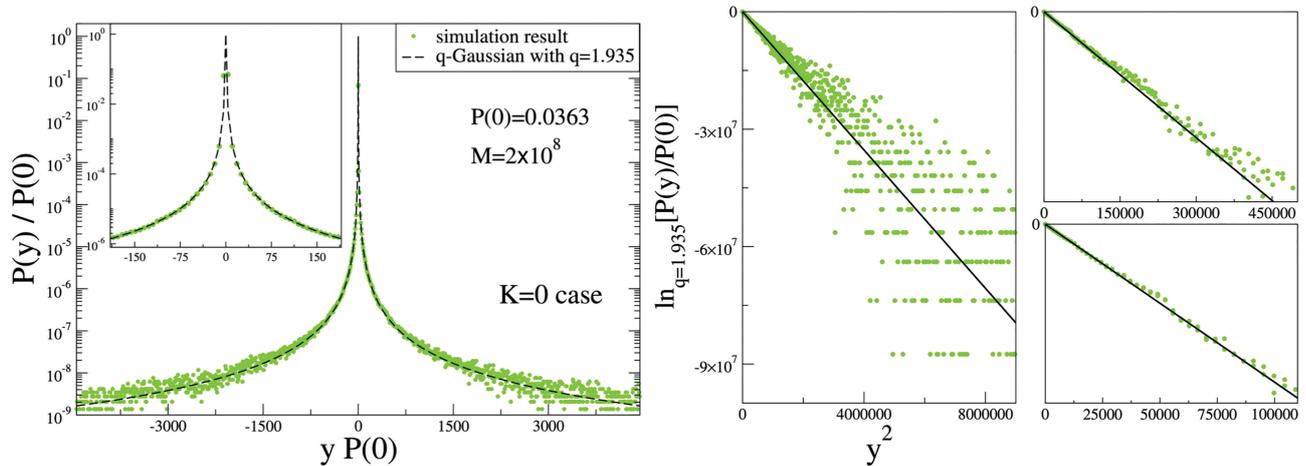


Figura 4: Distribuição de probabilidades para o caso $K = 0$. Um grande número ($M = 2 \times 10^8$) de condições iniciais foi usado para ter uma boa estatística. O número de somandos nas simulações também é grande ($N = 2^{22}$) de modo de visualizar a distribuição limite ao longo de muitas décadas. *Esquerda:* representação log-linear. *Direita:* representação q -log – quadrática; as linhas retas pretas representam precisamente a distribuição q -Gaussiana em diferentes escalas. Detalhes em [31].

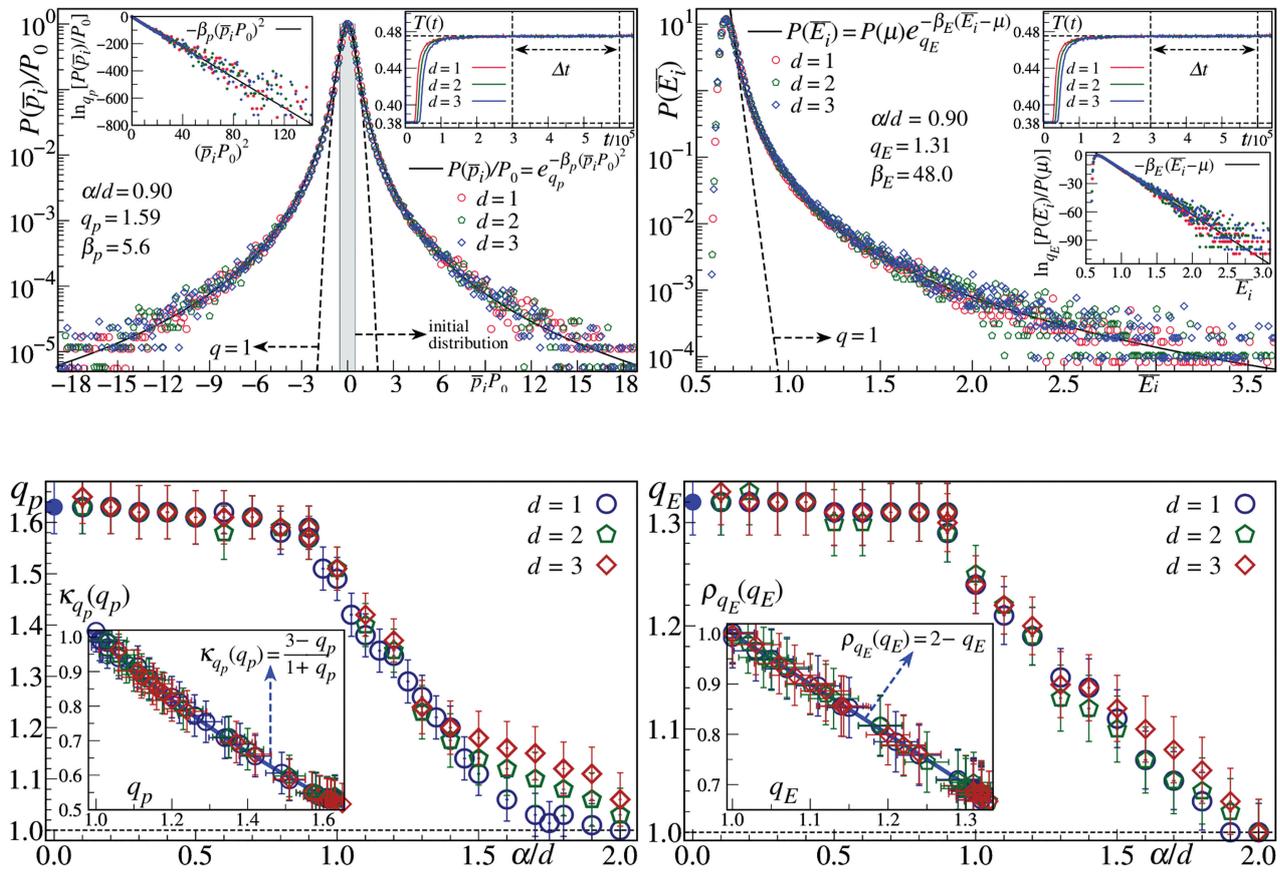


Figura 5: Ferromagneto inercial α -XY clássico em d -dimensões (para $d = 1, 2, 3$). As medias temporais foram feitas ao longo dos intervalos Δt indicados nas inserções. *Topo esquerda:* Ilustração (curva preta) de q_p -Gaussiana para a distribuição dos momentos de uma partícula (para comparação, a Gaussiana de BG é mostrada em curva tracejada). *Topo direita:* Ilustração (curva preta) da q_E -exponencial para as energias de uma partícula (para comparação, o fator de BG é mostrado na curva tracejada). *Fundo esquerda:* A dependência em α/d do índice q_p (na inserção é mostrado em curva preta o resultado analítico correspondente a q -Gaussianas). *Fundo direita:* A dependência em α/d -dependência do índice q_E (na inserção é mostrado em curva preta o resultado analítico correspondente a q -exponenciais). Detalhes em [35].

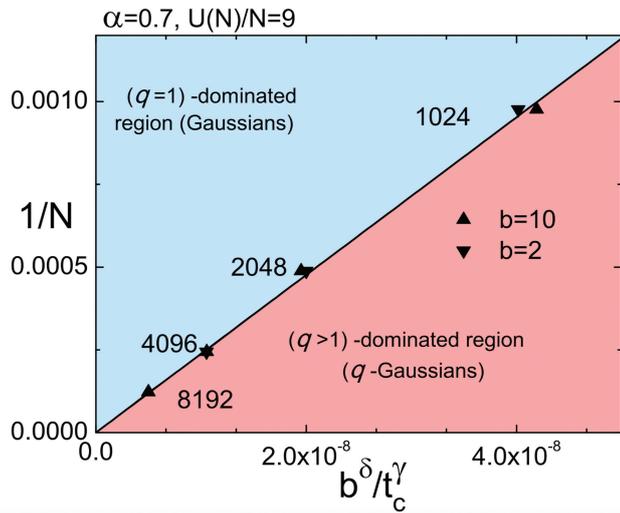


Figura 6: Visão unificada da fronteira do crossover BG – não BG do modelo α -Fermi-Pasta-Ulam, onde b é o coeficiente do acoplamento quártico. A linha reta contínua (preta) é dada por $1/N = Db^\delta/t_c^\gamma$, com $D = 2.3818 \times 10^4$, $\delta = 0.27048$, e $\gamma = 1.365$. Detalhes em [36].

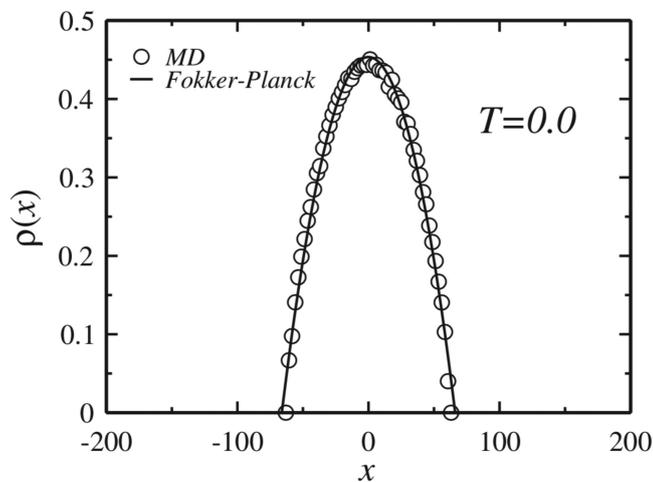


Figura 7: Perfil da densidade de partículas no estado estacionário a $T = 0$, obtido por dinâmica molecular (círculos vazios), comparado com o resultado teórico ($q_{attract}$ -Gaussian com $q_{attract} = 0$; linha cheia). A posição x é medida em unidades do comprimento de penetração de London λ , e a densidade do estado estacionário $\rho(x)$ é expressa em unidades de λ^{-2} . Ver detalhes em [37].

a um estado quânticamente emaranhado e não mais a um estado puro. No limite $N \rightarrow \infty$ temos que, para $L \gg 1$, $S_{BG}(L) \propto \ln L$, o que viola a extensividade da entropia do bloco. Como consequência, a maior parte das relações termodinâmicas usuais são violadas, tornando assim inaplicável seu uso com S_{BG} . Entretanto, existe um valor $q_{ent} \leq 1$ tal que $S_{q_{ent}}(L) \propto L$, recuperando assim a validade da termodinâmica clássica na sua plenitude. Este valor especial do índice é dado por $q_{ent} = \frac{\sqrt{9+c^2}-3}{c}$ [40], onde c é a chamada carga central

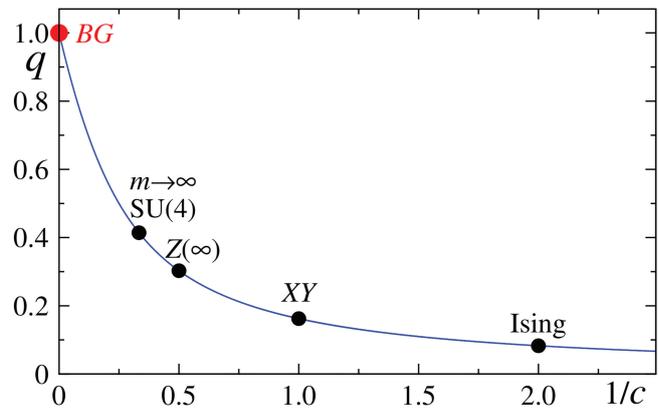


Figura 8: O índice q_{ent} foi determinado [40] de primeiros princípios, mais precisamente a partir da classe de universalidade do Hamiltoniano. A carga central vale $c = 1/2$ e $c = 1$ respectivamente para as cadeias ferromagnéticas de Ising e XY na presença do campo transversal na criticalidade a $T = 0$. Para outros modelos ver [41, 42]. No limite $c \rightarrow \infty$ recuperamos o valor de BG, i.e., $q_{ent} = 1$. Para c arbitrário, a entropia não aditiva $S_{q_{ent}}(L)$ do sistema é termodinamicamente extensiva para e somente para $q_{ent} = \frac{\sqrt{9+c^2}-3}{c}$ (portanto $c = \frac{6q_{ent}}{1-q_{ent}^2}$; para $c = 4$ temos $q_{ent} = 1/2$, e para $c = 6$ temos $q_{ent} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\Phi}$, onde Φ é a razão áurea. Enfatizamos que este valor anômalo de q_{ent} acontece somente no ponto crítico quântico de segunda ordem à temperatura zero; em qualquer outra situação vale o índice usual de BG para interações de curto alcance, ou seja $q_{ent} = 1$. Detalhes em [43].

do sistema (a classe de universalidade do ferromagneto de Ising com interações de curto alcance corresponde a $c = 1/2$): ver Fig. 8.

5.6. Matéria granular

Na área de baixas energias, merecem destaque especial experimentos feitos com matéria granular em Grenoble. A motivação remonta a 1995, quando Plastino e Plastino [44] mostraram que a chamada Equação dos Meios Porosos (*Porous Medium Equation*), na presença de um potencial confinante, está conectada à entropia S_q e à distribuição que a otimiza, a q -Gaussiana (proporcional a $e_q^{-\beta q x^2}$). A conexão é de fato fundamental, mais precisamente que a distribuição no estado estacionário da equação de Fokker-Planck não linear coincide com a distribuição que extremiza a entropia S_q sob os correspondentes vínculos, e satisfaz também um teorema H, para todos os valores de q [45]. Nesta base foi posteriormente estabelecida [46] uma nova relação de escala, qual seja $\alpha = 2/(3 - q)$, onde o expoente α de difusão anômala definido através do deslocamento quadrático x^2 escala com t^α (observe que $q = 1$ fornece o expoente de movimento Browniano clássico $\alpha = 1$). Confirmações preliminares emergiram no estudo do movimento de células de *Hydra* [47] e na aproximação computacional do modelo XY com interações de longo alcance [48]. Mas a

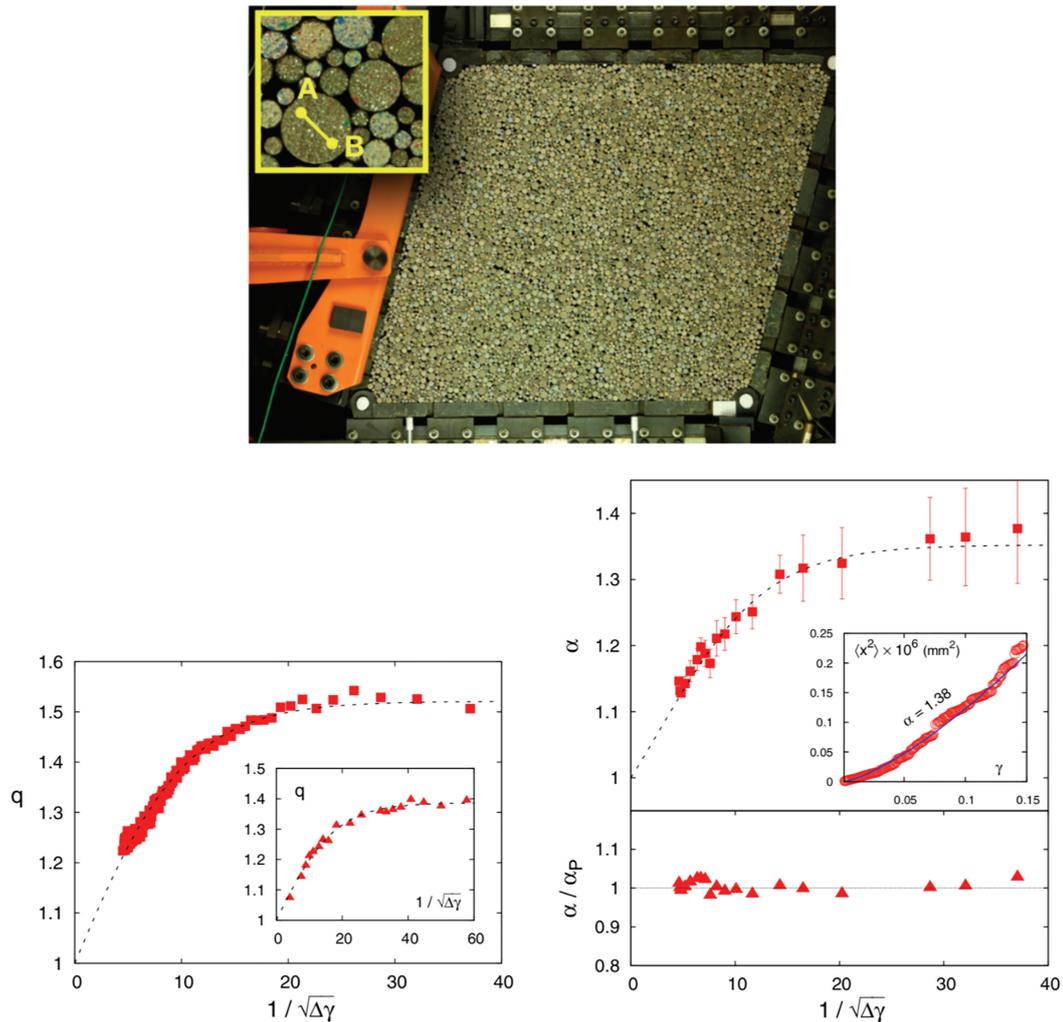


Figura 9: Verificação experimental em matéria granular da relação de escala predita em 1996 [46]. *Topo:* Tipo de aparelho usado (ver [49]); *Fundo esquerda:* Dependência do índice q da distribuição q -Gaussiana da distribuição das flutuações num intervalo largo do parâmetro experimental $1/\sqrt{\Delta\gamma}$; *Fundo direita:* Dependência do expoente α da difusão anômala (x^2 escala com t^α) com o mesmo parâmetro experimental, e verificação, com 2% de barra de erro, da predição de 1996 de $\alpha = \alpha_P \equiv 2/(3-q)$ [46]. Observe que, na extrapolação $1/\sqrt{\Delta\gamma} \rightarrow 0$, os valores de BG $(q, \alpha) = (1, 1)$ emergem. Ver detalhes em [50].

validação experimental desta lei de escala num intervalo físico amplo, em matéria granular de fato [50], somente chegou 19 anos depois de sua predição: ver Fig. 9.

5.7. Átomos frios

Outra aplicação de baixas energias concerne o movimento de átomos frios em redes óticas dissipativas. Lutz sugeriu em 2003 [51] que, sob condições apropriadas (envolvendo um mecanismo de amortecimento, e.g., o chamado resfriamento de Sísifo), a distribuição de velocidades dos átomos não seria Maxwelliana mas uma q -Gaussiana com $q = 1 + 44 \frac{E_r}{U_0}$, onde E_r é a energia atômica de recuo e U_0 é a amplitude do potencial periódico produzido pelo campo do laser. Três anos depois sua predição foi confirmada computacionalmente (Monte Carlo quântico) e experimentalmente (com átomos de Cs) [52]: ver Fig. 10.

5.8. Altas energias na Terra

Centenas de publicações testemunham [26] a adequação da q -estatística para descrever resultados das colisões em altas energias de partículas (e.g., pp , $p\bar{p}$, Au + Au, Cu + Cu, Pb + Pb) no LHC/CERN (detetores ALICE, CMS, ATLAS, LHCb) e no RHIC/Brookhaven (detetores BRAHMS, STAR, PHENIX). Uma ilustração é apresentada na Fig. 11.

5.9. Altas energias no espaço extraterrestre

Observações de altas energias no espaço extraterrestre, em particular no experimento AMS (Alpha Magnetic Spectrometer), também tem sido ajustadas satisfatoriamente no quadro da q -estatística. Ver Fig. 12 para as distribuições de electrons e positrons, e as Figs. 13 and 14 para o fluxo de varias espécies de raios cósmicos.

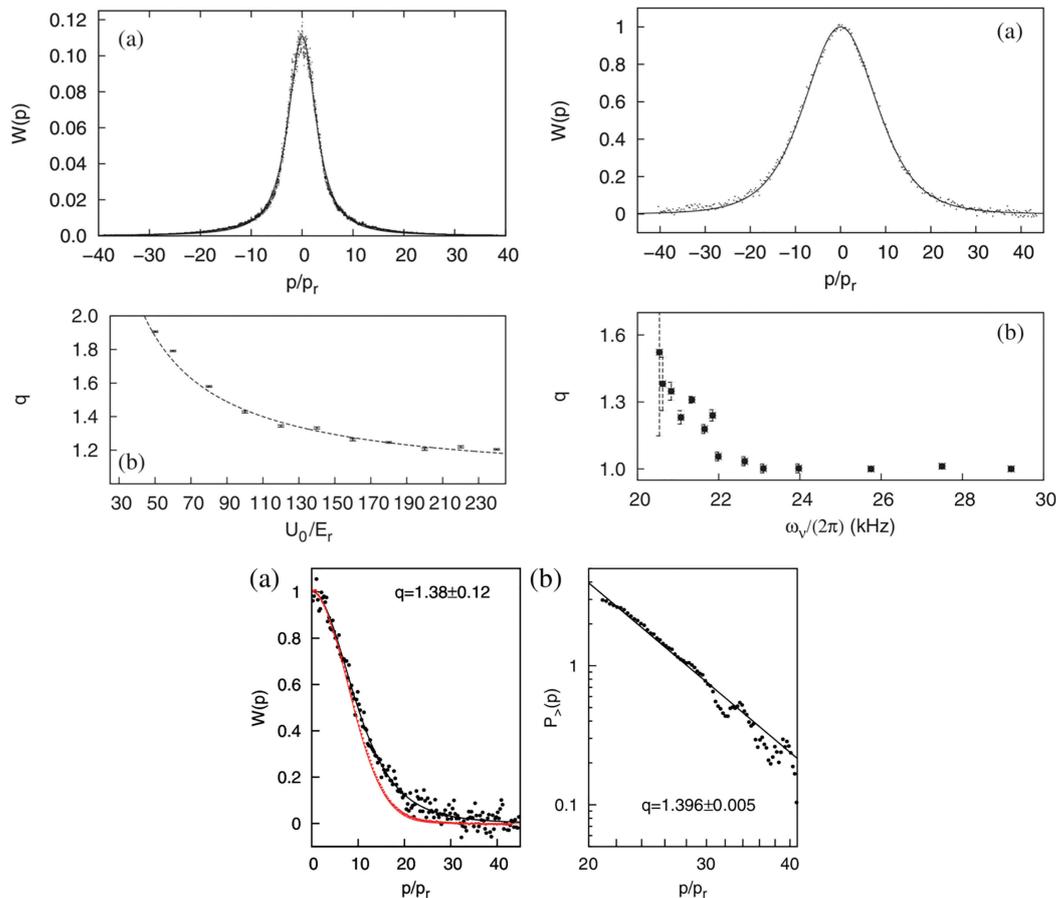


Figura 10: Verificação experimental e computacional da previsão de Lutz de 2003 para átomos frios [51]. *Topo esquerda:* Simulações Monte Carlo quântico para a distribuição de momentos em rede unidimensional (dados pontuais mediados sobre 10^4 trajetórias atômicas). Cada trajetória atômica é iniciada no estado fundamental de um dado poço. A profundidade de rede é $U_0 = 60E_r$. *Topo direita:* Melhor ajuste experimental com q -Gaussiana ($q = 1.791 \pm 0.004$; ajuste $R^2 = 0.995$). *Meio esquerda:* Valores de q em função da profundidade do potencial ótico. Os pontos provem de simulações Monte Carlo quânticas; a linha representa a previsão $q = 1 + 44E_r/U_0$ [51]. *Meio direita:* Valores de q em função da frequência vibracional no fundo do poço, obtidos ajustando com q -Gaussianas os experimentos. *Fundo esquerda:* Resultados experimentais da distribuição em rede tridimensional (pontos) e seu melhor ajuste q -Gaussiano (linha sólida). O valor $q = 1.310 \pm 0.015$ é obtido ajustando somente a parte direita da distribuição de momentos (ajuste $R^2 = 0.9985$). O parâmetro da rede ótica é $\omega_v/(2\pi) = 20.8$ kHz. O máximo da distribuição é normalizado à unidade. Resultados experimentais da distribuição (pontos pretos) e seu melhor ajuste q -Gaussiano (linha preta sólida). O valor de q está indicado na figura (ajuste $R^2 = 0.9985$). O parâmetro da rede ótica é $\omega_v/(2\pi) = 27.5$ kHz. Uma Gaussiana está comparativamente indicada (linha vermelha). *Fundo direita:* Os pontos da distribuição para altos momentos: melhor ajuste com lei de potencia (linha sólida). Detalhes em [52, 53].

5.10. Redes complexas

Existe uma grande diversidade de redes complexas d -dimensionais nos sistemas naturais, artificiais e sociais, constituídas por nós e ligações entre eles. Muitas delas são qualificadas de *invariantes por escala*, por exibirem, na sua distribuição do número de ligações por nó, um decaimento (assintótico) em lei de potência. Muitas delas (mas não todas) crescem em função do tempo a medida que novos nós se incorporam ao sistema. Cada novo nó que chega pode se ligar a um dos nós pre-existentes através da chamada *ligação preferencial* (*preferential attachment*), regida, por exemplo, por uma probabilidade (do sítio j que está chegando se ligar ao sítio i

pre-existente na rede) $\Pi_{ij} \propto \frac{k_i}{r_{ij}^{\alpha_A}}$ onde k_i é o número de ligações do sítio i , e $\alpha_A \geq 0$. Tais sistemas podem ser vistos como um caso particular do domínio de aplicabilidade da MENE. Ver na Fig. 15 uma ilustração típica deste fato.

5.11. Mecânica quântica não linear

Existem sistemas físicos quânticos que manifestam propriedades que ultrapassam a natureza linear de equações tais como a de Schrödinger, de Klein-Gordon e de Dirac. Dispor de soluções exatas para possíveis generalizações não lineares destas equações pode ser de grande utilidade. As estruturas matemáticas que emergem

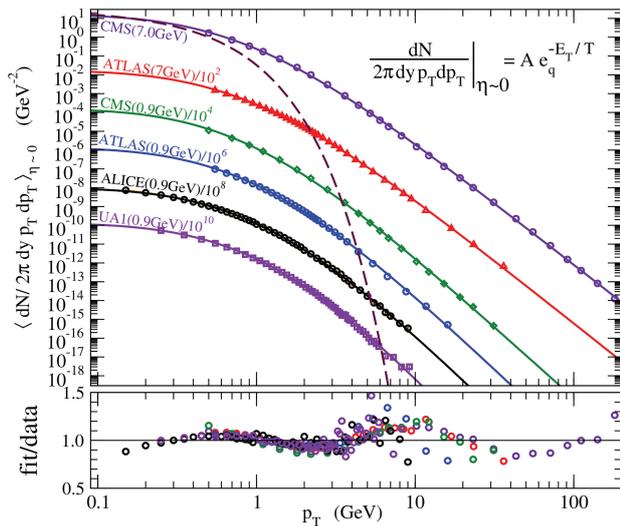


Figura 11: Comparação de $Ae_q^{-E_T/T}$, onde $E_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$, com distribuições experimentais de momentos transversos em colisões pp collisions para rapidez central y . A correspondente distribuição de BG (exponencial) é ilustrada na curva tracejada. Para uma melhor visualização, tanto os dados como as curvas analíticas tem sido divididas por um fator constante como indicado. Como vemos, os ajustes são impressionantemente satisfatórios ao longo de não menos de 14 décadas na ordenada! Tal situação é praticamente sem precedentes. Com efeito, tantas décadas medidas num único experimento constitui um fato raro, que exhibe o talento do esforço experimental envolvido. Para realisticamente apreciar isto, estas curvas podem ser comparadas, por exemplo, àquelas exibindo o 'crossover' da mecânica de Newton para a de Einstein para valores crescentemente altos do momento. Efetivamente se consideramos o caso dos protons nos raios cósmicos até a detecção na Terra das energias extremas, temos 11 décadas na ordenada entre o início da discrepância de relação de Einstein $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ com a relação usando a energia cinética clássica $E = mc^2 + p^2/2m$, até o mais alto nível experimental relativista. A razão ajuste/dados estão mostrados no parte inferior, onde um comportamento aproximadamente log-periódico é observado por cima da q -exponencial. Tais curvas log-periódicas tem sido muito satisfatoriamente ajustadas introduzindo no índice q uma pequena parte imaginária (e.g., $q = 1.14 + i 0.03$) [54, 55]. Detalhes em [56].

naturalmente na MENE permitem estabelecer uma conexão deste tipo [62].

A q -onda plana d -dimensional é definida como segue:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \Phi_0 \exp_q \left[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right]. \quad (19)$$

Focalizemos agora uma generalização da equação de Schrödinger cuja solução exata para a partícula livre de massa m é precisamente a q -onda plana. Seja

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\Phi(\vec{x}, t)}{\Phi_0} \right] = -\frac{1}{2-q} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \left[\frac{\Phi(\vec{x}, t)}{\Phi_0} \right]^{2-q}. \quad (20)$$

Observamos que a escala com Φ_0 garante as dimensões físicas corretas de ambos lados da igualdade. Esta escala

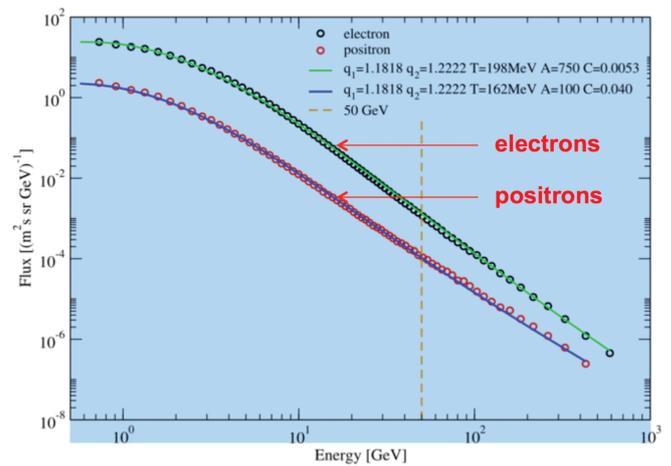


Figura 12: Os dados no AMS-02 são ajustados muito bem por combinações lineares de distribuições padrão e 'escort' com $q_1 = 13/11 = 1.1818\dots$ e $q_2 = 1/(2 - q_1) = 11/9 = 1.2222\dots$. Detalhes em [57].

se torna irrelevante somente para a equação linear, i.e., $q = 1$). Consistentemente, os operadores de energia e momento são generalizados como $\hat{E} = i\hbar D_t$ e $\hat{p}_n = -i\hbar D_{x_n}$ respectivamente, onde $D_u f(u) \equiv [f(u)]^{1-q} df(u)/du$. Estes operadores, quando atuando sobre a q -exponencial $\exp_q [i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$, fornecem a energia $E = \hbar\omega$ (relação de Planck) e o momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (relação de de Broglie). Considerando agora a q -onda plana definida na Eq. (19) e usando $\vec{k} \rightarrow \vec{p}/\hbar$ e $\omega \rightarrow E/\hbar$, verificamos que esta nova forma é solução da equação (20) com $E = p^2/2m$, para qualquer valor de q .

Uma estrutura totalmente similar é verificada ao q -generalizar consistentemente as equações quânticas relativistas de Klein-Gordon e de Dirac. As q -ondas planas são mais uma vez as soluções para partícula livre, satisfazendo em ambos casos a relação de Einstein $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$, para qualquer valor de q [62]. Esta linha de pesquisa, que pode em tese ter utilidade no estudo da matéria escura e da energia escura, é atualmente muito ativa [26].

5.12. Sistemas biológicos

Um interessante estudo da migração coletiva de células (fenômeno crucial para cura de feridas, crescimento de câncer, morfogênese) é descrito em [63]. As distribuições de velocidades obtidas para uma camada multicelular de rim canino de Madin Darby (MDCK) estão exibidas na Fig. 16. Elas sugerem q -Gaussianas com $q = 1.183 \pm 0.035$. Resultados muito semelhantes são obtidos para células do endotélio de veia umbilical humana (HUVEC) com $q = 1.208 \pm 0.025$, para mioblastos de rato C2C12 com $q = 1.184 \pm 0.014$, e para fibroblasto de embrião de rato NIH-3T3 com $q = 1.176 \pm 0.024$.

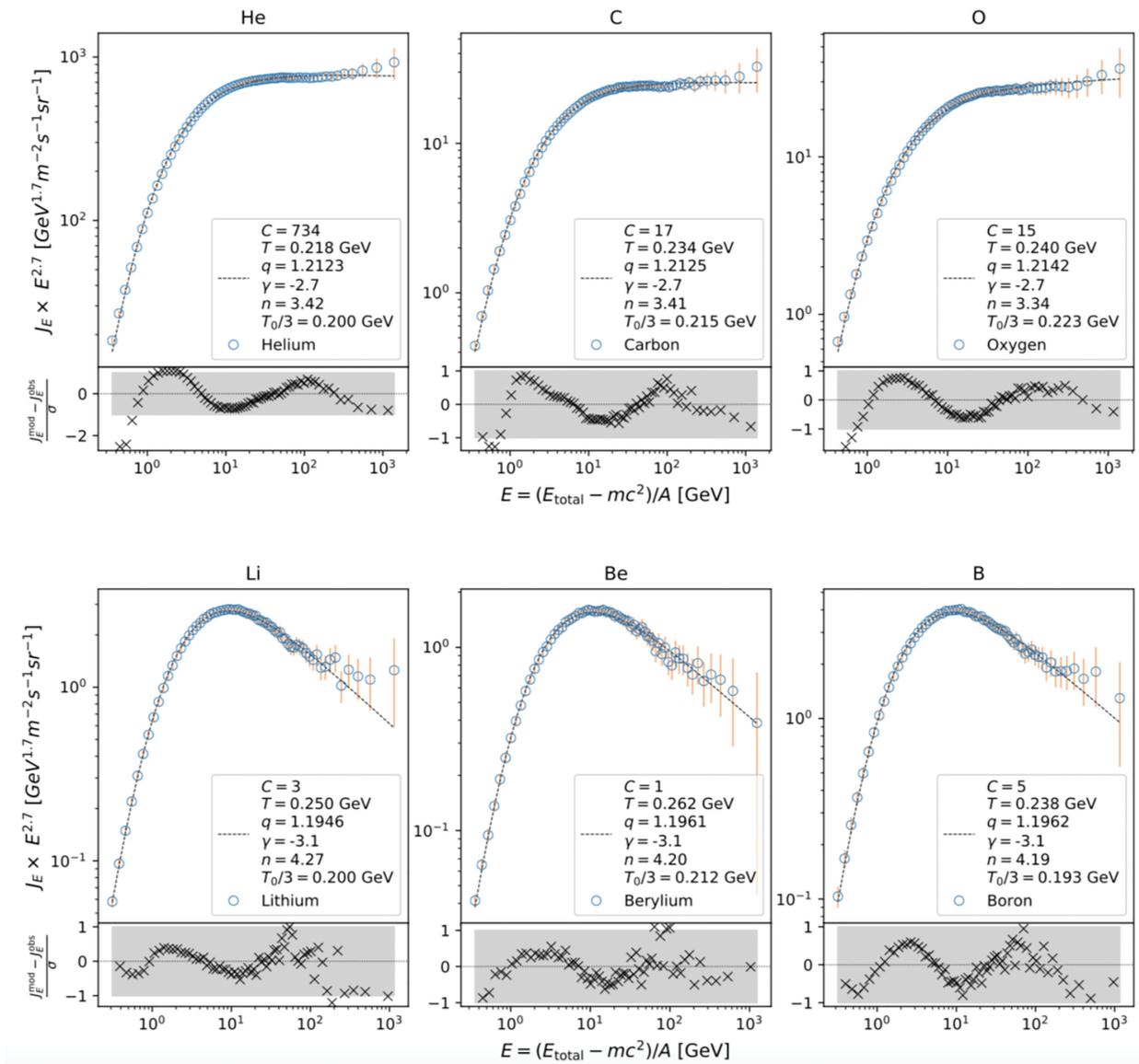


Figura 13: O fluxo de partículas de cada espécie de raios cósmicos está ajustado com $J_E^{\text{mod}}(E) = CE(E + 2u)e_q^{-E/T}$ usando três parâmetros (C, T, q); a massa em m repouso satisfaz $m = Au$, onde A é a massa atômica e $u = 0.931 \text{ GeV}$ é a unidade de massa. Nesta representação log-log, o eixo vertical está multiplicado por $E^{2.7}$ para melhor visibilidade. A precisão do ajuste pode ser quantificada pelo desvio do fluxo teórico J_E^{mod} ao fluxo observado J_E^{obs} em relação ao respectivo erro de medição σ . Evidentemente, quase todos os pontos observados caem dentro da barra de incerteza $\pm\sigma$ ilustrada como área cinza. A temperatura média T_0 está definida por $T_0 = T/(4 - 3q)$. A amplitude C tem dimensões $[C] = [m^{-2} \text{sr}^{-1} \text{s}^{-1} \text{GeV}^{-3}]$. Detalhes em [58].

5.13. Economia

Existe profusa literatura sobre aplicações de q -estatística em economia: ver [64] e referencias ali indicadas. A título de ilustração mencionemos que Borland generalizou [65] com sucesso a equação de Black-Scholes, obtendo procedimentos que ajustam bem a realidade financeira. Ver Fig. 17.

5.14. Processamento de imagens

Um grande número de algoritmos existem para processar, em diversos sentidos, imagens (e sinais). Não é esta a ocasião para descrever aqueles que usam, com benefício,

os conceitos da MENE. Nos restringimos a apresentar aqui um que encontrou aplicação em diagnósticos importantes, quais sejam de câncer de mama [66]. Ver Fig. 18.

5.15. Epidemiologia

A pandemia do COVID sendo um sistema tipicamente complexo, é natural que se tente alguma conexão com a q -estatística. No trabalho [67], foi proposta heurísticamente uma expressão analítica para a evolução temporal do número de casos ativos em um país dado. A inspiração veio de finanças e o cenário conjecturado para o pico (único, nos casos mais simples) incorporava

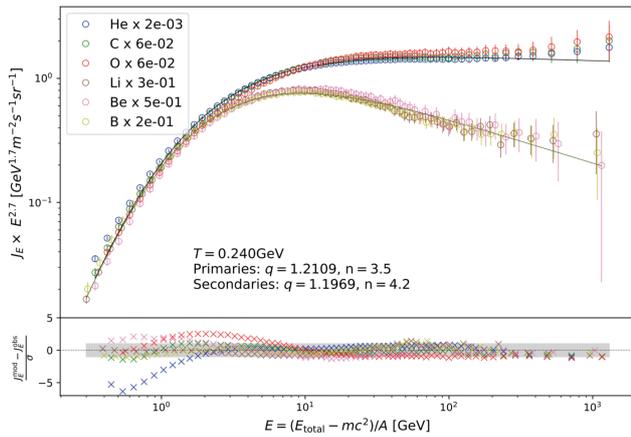


Figura 14: Cada fluxo de partículas está re-escalado com um fator conveniente tal que todos os dados aproximadamente colapsam numa única curva na região de baixas energias e as propriedades universais dos espectros dos núcleos dos raios cósmicos primários e secundários tornam-se visíveis. Para energias mais altas o espectro bifurca em primários e secundários que podem ser distinguidos através de um único parâmetro, o índice q , que pode ser interpretado em termos dos graus de liberdade efetivos subjacentes. Detalhes em [58].

uma subida em lei de potência, e consistentemente uma descida também em lei de potência. Segue a forma funcional proposta:

$$N = C(t - t_0)^\alpha e_q^{-\beta(t-t_0)^\gamma} = \frac{C(t - t_0)^\alpha}{[1 + (q - 1)\beta(t - t_0)^\gamma]^{1/(q-1)}}, \quad (21)$$

onde $C > 0; \alpha > 0; \beta > 0; \gamma > 0, q > 1$, e $t_0 \geq 0$. A constante t_0 indica o primeiro dia de aparição da

pandemia naquele país; convencionalmente foi escolhido $t_0 = 0$ para a China; para os outros países, t_0 corresponde ao número de dias transcorridos entre a aparição do primeiro caso na China e o primeiro caso no país estudado. A constante de normalização C reflete a população total daquele país. Para $\alpha = 0$, o valor $\gamma = 1$ nos leva à q -exponencial; o valor $q = 2$ nos leva à q -Gaussiana; outros valores de γ são referidos como q -exponencial esticada (*stretched q -exponential*). Através da inspeção das influencias exercidas pelas quatro constantes não triviais (α, β, γ, q), tornou-se relativamente transparente que (α, β) dependem fortemente da estratégia epidemiológica implementada na região, assim como do comportamento biológico do coronavírus naquele clima geográfico. Em contraste, os parâmetros (γ, q) parecem ter uma natureza um tanto universal, dependendo principalmente do coronavírus. Portanto, para investigar diversos países que não tinham ainda atingido seu pico, uma primeira hipótese básica foi usar os valores da China para esses parâmetros, imaginando que a China tivesse aproximadamente completado seu ciclo pandêmico. Esta hipótese de trabalho, à falta de outra melhor, forneceu resultados satisfatórios. Para os outros países, cujo pico não tinha sido ainda atingido, usamos a mesma forma funcional (21) ajustando o resto dos parâmetros de modo a descrever adequadamente a subida em direção ao pico (ainda desconhecido). Os resultados no dia 8 de Maio de 2020 estão exibidos na Fig. 19. A aproximação que acabamos de descrever não envolve nenhum modelo epidemiológico dinâmico. Para progredir neste sentido, a q -generalização do conhecido model SEIR foi proposta também e estudada em [68].

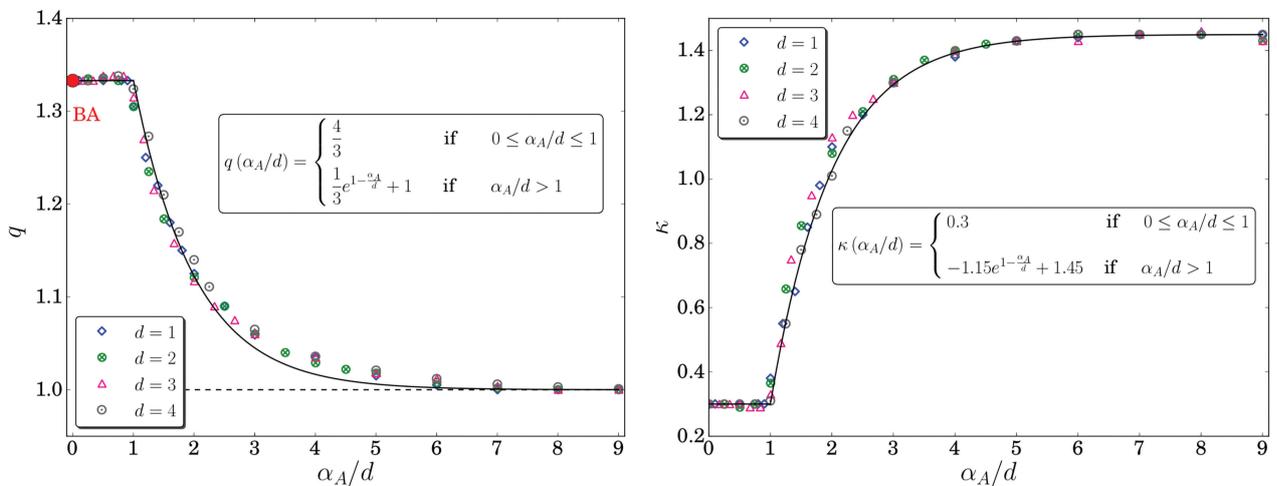


Figura 15: Redes d -dimensionais assintoticamente invariantes por escala (para $d = 1, 2, 3, 4$). Pod-se facilmente verificar que a distribuição do número k de ligações por sítio é muito bem ajustada por $P(k) = P(0) e_q^{-k/\kappa}$. *Esquerda:* O índice q em função de α_A/d ; o ponto vermelho indica a classe de universalidade de Barabási-Albert (BA) ($q = 4/3$) [59, 60], que é aqui recuperada com o caso particular $\alpha_A = 0$. *Direita:* A 'temperature' κ (que caracteriza o número médio de ligações por nó) em função de α_A/d . Em todos os casos, a descrição de BG ($q = 1$) emerge naturalmente no limite $\alpha_A/d \rightarrow \infty$, e mesmo antes disso. Detalhes em [61].

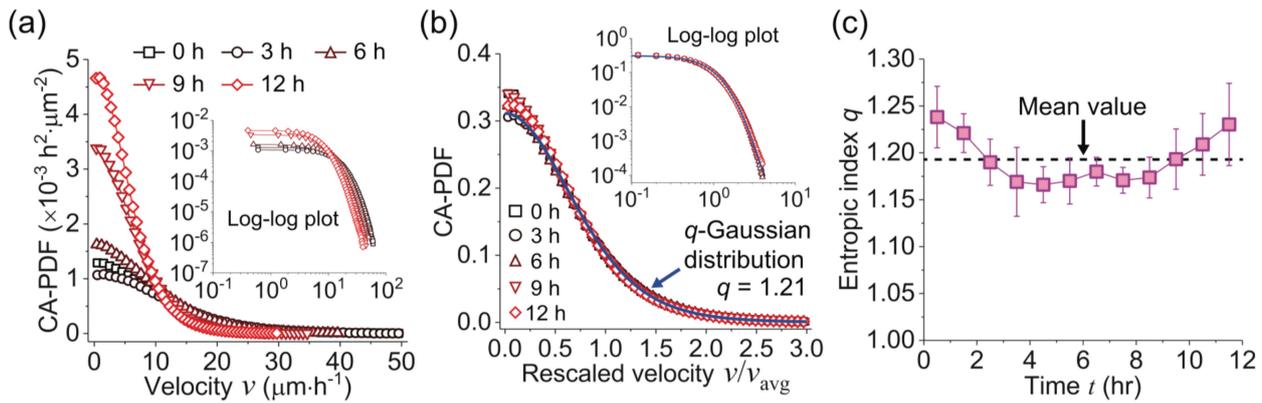


Figura 16: A distribuição de velocidades celulares (promediadas ao redor da circunferência) no MDCK é bem ajustada com uma q -Gaussiana. (a) Evolução temporal. *Inserção:* representação em log-log plot dos mesmos dados. (b) Colapso obtido com velocidades celulares re-escaladas a diversos tempos. *Inserção:* representação em log-log das distribuições. (c) Evolução temporal do índice q . Ver detalhes em [63].

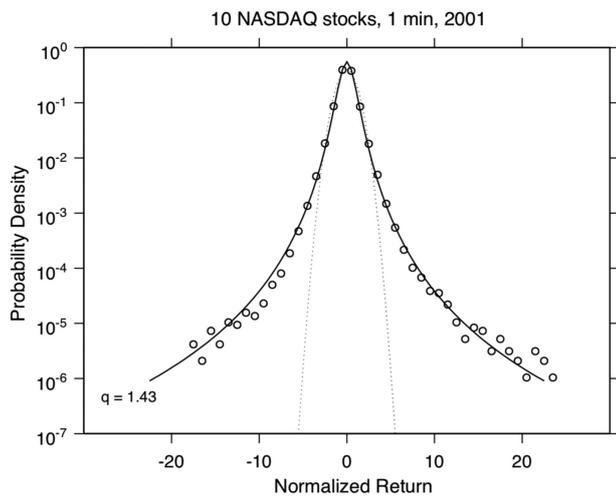


Figura 17: Distribuições de retornos logarítmicos para dez ações em intervalos de 1 minuto, normalizadas pelo desvio médio quadrático da amostra. A linha sólida corresponde a uma distribuição q -Gaussiana com $q = 1.43$, que fornece um bom ajuste com os dados. Linha tracejada: modelo padrão Gaussian. Detalhes em [65].

6. Considerações Finais

Nestas linhas finais podemos lembrar que, nos primeiros anos após 1988, esta teoria era acolhida seja com grande entusiasmo, seja, por alguns, com grande ceticismo. No dia de hoje, pode-se verificar que mais de oito mil artigos estão disponíveis na literatura científica focalizando esta teoria [26]. Na presente revisão para a *Revista Brasileira de Ensino de Física* tentamos, entretanto, de nos concentrar em alguns aspectos motivacionais da teoria e de suas aplicações que esperamos possam permitir ao leitor interessado formar sua própria opinião sobre a questão, e progredir eventualmente.

Encontram-se também em [26] muitas interessantes conexões, generalizações, variações do aqui exposto,

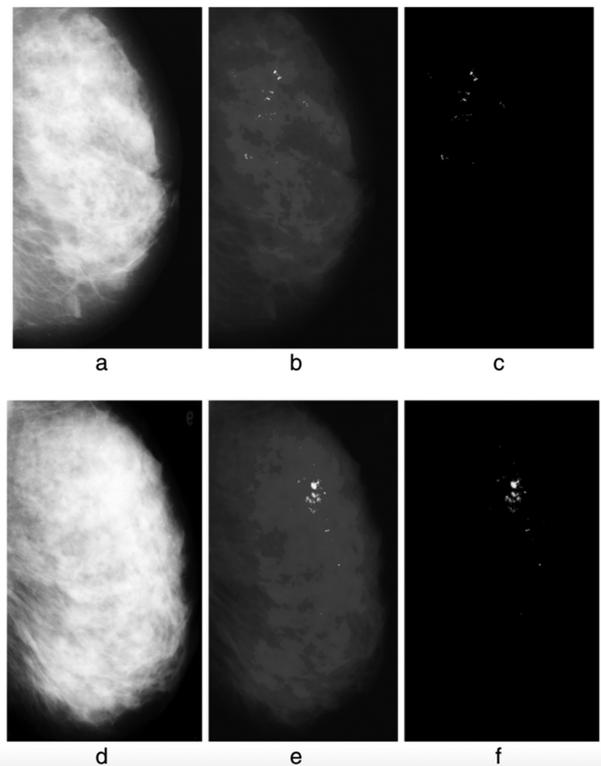


Figura 18: O procedimento aqui focalizado para a detecção de microcalcificações que não usa a entropia S_q produz resultados modestos: 80.21 % Tps (verdadeiros positivos) e 8.1 Fps (falsos positivos). Enquanto, ao introduzir a q -entropia, resultados auspiciosos surgem: 96.55 % Tps e 0.4 Fps. Resultados do experimento: (a) mdb236, (b) imagem com as microcalcificações salientadas, (c) imagem com as microcalcificações extraídas; (d) mdb216, (e) imagem com as microcalcificações salientadas, (f) imagem com as microcalcificações extraídas. Detalhes em [66].

assim como muitas outras aplicações. É impossível revisar no atual artigo introdutório todas elas, sequer mencioná-las. Entretanto, uma linha que certamente

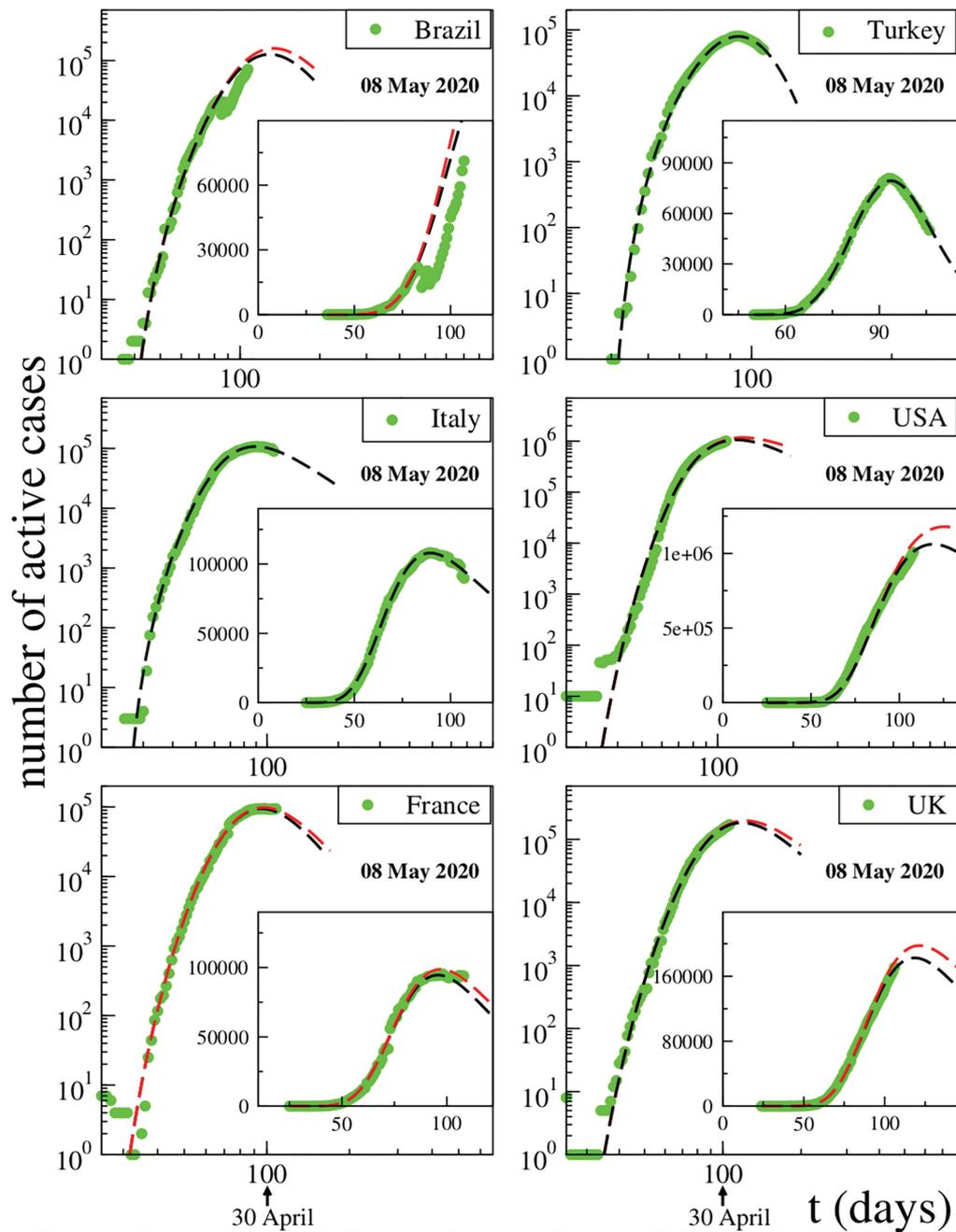


Figura 19: Ajuste dos dados de casos ativos disponíveis no 8 de Maio de 2020 para varios países severamente afetados ao redor do mundo, com a Eq. (21). Os parâmetros de ajuste γ e q foram fixados aos valores da China toda vez que o pico não tinha sido ainda atingido. Observe que, no caso do Brasil, uma disrupção aconteceu nos dados publicamente disponíveis a meados de Abril. Desconhecemos qual seja a causa. Coincidentemente entretanto, o Presidente do Brasil decidiu de mudar seu Ministro de Saúde nesses dias. Detalhes em [67].

merece especial menção é a *superestatística* de Beck-Cohen [69, 70], diretamente relacionada com a mecânica estatística não extensiva. Grande número de problemas em aberto existe que constituem interessantes desafios. Um deles é a conceituação completa da estrutura dos q -tripletes e de sua conexão com as transformações de Möbius [71]. A importância desta questão pode facilmente ser exagerada pois inclui situações paradigmáticas

tais como uma simples cadeia unidimensional de rotores clássicos acoplados entre primeiros vizinhos. Com efeito, em equilíbrio térmico este sistema claramente corresponde a $q = 1$, mas em estado estacionário fora de equilíbrio corresponde a $q = 1.55$ [72]. *Eu sou eu e minha circunstância*, afirmava Ortega y Gasset.

Terminemos com um toque histórico que é motivo de frequente curiosidade: por que chamá-la de *mecânica*

estatística não extensiva e não, por exemplo, de *mecânica estatística não aditiva*? A sua aplicação mais paradigmática é constituída pelos sistemas Hamiltonianos clássicos de muitos corpos com interações de longo alcance. Neste caso, a energia interna total é *termodinamicamente não extensiva*, porém a correspondente entropia total exige, presumivelmente em grande número de situações, usar formas entrópicas *não aditivas* de modo de garantir sua *extensividade termodinâmica*. Nos meandros do pensamento humano, acabou prevalecendo, para a presente generalização da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, a denominação pela qual é conhecida hoje.

Agradecimentos

Agradeço calorosamente E.P. Borges por numerosos comentários decorrentes de uma leitura crítica do manuscrito, assim como aos diversos autores identificados nas várias figuras aqui reproduzidas, muitas delas fazendo parte do artigo de revisão [3]. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Faperj e pelo CNPq.

Referências

- [1] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [2] C. Tsallis, *Nonextensive Statistical Mechanics – Approaching a Complex World* (Springer, New York, 2009).
- [3] C. Tsallis, Entropy **21**, 696 (2019).
- [4] W. Braun e K. Hepp, Commun. Math. Phys. **56**, 125 (1977).
- [5] C. Jarzynski, Phys. Rev. Lett. **78**, 2690 (1997).
- [6] <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017vico.book...75T/abstract>.
- [7] J.W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics – Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics* (Charles Scribner's Sons, New York, 1902).
- [8] O. Penrose, *Foundations of Statistical Mechanics: A Deductive Treatment* (Pergamon, Oxford, 1970).
- [9] R.J.V. Santos, J. Math. Phys. **38**, 4104 (1997).
- [10] S. Abe, Phys. Lett. A **271**, 74 (2000).
- [11] P. Jizba e J. Korbek, Phys. Rev. Lett. **122**, 120601 (2019).
- [12] C. Tsallis, Braz. J. Phys. **29**, 1 (1999).
- [13] C. Tsallis e L.J.L. Cirto, Eur. Phys. J. C **73**, 2487 (2013).
- [14] C. Tsallis, em *Nonextensive Entropy – Interdisciplinary Applications*, editado por M. Gell-Mann e C. Tsallis (Oxford University Press, New York, 2004).
- [15] E.M.F. Curado e C. Tsallis, J. Phys. A. **25**, 1019 (1992).
- [16] C. Tsallis, R.S. Mendes e A.R. Plastino, Physica A **261**, 534 (1998).
- [17] G.L. Ferri, S. Martinez e A. Plastino, J. Stat. Mech.-Theory and Experiment P04009 (2005).
- [18] C. Tsallis e Z.G. Arenas, EPJ Web of Conferences **71**, 00132 (2014).
- [19] S. Umarov, C. Tsallis e S. Steinberg, Milan J. Math. **76**, 307 (2008).
- [20] S. Umarov, C. Tsallis, M. Gell-Mann e S. Steinberg, J. Math. Phys. **51**, 033502 (2010).
- [21] H. Touchette, Phys. Rep. **478**, 1 (2009).
- [22] G. Ruiz e C. Tsallis, Phys. Lett. A **376**, 2451 (2012).
- [23] H. Touchette, Phys. Lett. A **377**, 436 (2013).
- [24] G. Ruiz e C. Tsallis, Phys. Lett. A **377**, 491 (2013).
- [25] U. Tirnakli, C. Tsallis e N. Ay, *Approaching a large deviation theory for complex systems* (2020), arxiv 2010.09508 [cond-mat.stat-mech].
- [26] <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>
- [27] M.L. Lyra e C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80**, 53 (1998).
- [28] F. Baldovin e A. Robledo, Phys. Rev. E **66**, R045104 (2002).
- [29] F. Baldovin e A. Robledo, Phys. Rev. E **69**, R045202 (2004).
- [30] U. Tirnakli, C. Tsallis e C. Beck, Phys. Rev. E **79**, 056209 (2009).
- [31] U. Tirnakli e C. Tsallis, Nonlinear Phenomena in Complex Systems **23**, 149 (2020).
- [32] U. Tirnakli e E.P. Borges, Scientific Reports **6**, 23644 (2016).
- [33] A. Bountis, J.J.P. Veerman e F. Vivaldi, Phys. Lett. A **384**, 126659 (2020).
- [34] C. Anteneodo e C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80**, 5313 (1998).
- [35] L.J.L. Cirto, A. Rodriguez, F.D. Nobre e C. Tsallis, EPL **123**, 30003 (2018).
- [36] H. Christodoulidi, C. Tsallis e T. Bountis, EPL **108**, 40006 (2014).
- [37] J.S. Andrade Jr., G.F.T. da Silva, A.A. Moreira, F.D. Nobre e E.M.F. Curado, Phys. Rev. Lett. **105**, 260601 (2010).
- [38] A.A. Moreira, C.M. Vieira, H.A. Carmona, J.S. Andrade Jr. e C. Tsallis, Phys. Rev. E **98**, 032138 (2018).
- [39] G.A. Casas, F.D. Nobre e E.M.F. Curado, EPL **126**, 10005 (2019).
- [40] F. Caruso e C. Tsallis, Phys. Rev. E **78**, 021102 (2008).
- [41] F.C. Alcaraz, J. Phys. A **20**, 2511 (1987).
- [42] F.C. Alcaraz e M.J. Martins, J. Phys. A **23**, L1079 (1990).
- [43] C. Tsallis e H.J. Haubold, EPL **110**, 30005 (2015).
- [44] A.R. Plastino e A. Plastino, Physica A **222**, 347 (1995).
- [45] V. Schwammle, F.D. Nobre e E.M.F. Curado, Phys. Rev. E **76**, 041123 (2007).
- [46] C. Tsallis e D.J. Bukman, Phys. Rev. E **54**, R2197 (1996).
- [47] A. Upadhyaya, J.P. Rieu, J.A. Glazier e Y. Sawada, Physica A **293**, 549 (2001).
- [48] A. Rapisarda e A. Pluchino, Europhysics News **36**, 202 (2005).
- [49] L. Viallon-Galiner, G. Combe, V. Richefeu e A.P.F. Atman, Entropy **20**, 862 (2018).
- [50] G. Combe, V. Richefeu, M. Stasiak e A.P.F. Atman, Phys. Rev. Lett. **115**, 238301 (2015).
- [51] E. Lutz, Phys. Rev. A **67**, 051402(R) (2003).
- [52] P. Douglas, S. Bergamini e F. Renzoni, Phys. Rev. Lett. **96**, 110601 (2006).

- [53] E. Lutz e F. Renzoni, *Nature Physics* **9**, 615 (2013).
- [54] M. Rybczynski, G. Wilk e Z. Wlodarczyk, *Eur. Phys. J. Web of Conferences* **90**, 01002 (2015).
- [55] G. Wilk e Z. Wlodarczyk, *Entropy* **17**, 384 (2015).
- [56] C.Y. Wong, G. Wilk, L.J.L. Cirto e C. Tsallis, *Phys. Rev. D* **91**, 114027 (2015).
- [57] G.C. Yalcin e C. Beck, *Scientific Reports* **8**, 1764 (2018).
- [58] M. Smolla, B. Schafer, H. Lesch e C. Beck, *New Journal Physics* **22**, 093002 (2020).
- [59] A.L. Barabási e R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [60] T. Emmerich, A. Bunde e S. Havlin, *Phys. Rev. E* **89**, 062806 (2014).
- [61] S.G.A. Brito, L.R. da Silva e C. Tsallis, *Scientific Reports* **6**, 27992 (2016).
- [62] F.D. Nobre, M.A. Rego-Monteiro e C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 140601 (2011).
- [63] S.Z. Lin, P.C. Chen, L.Y. Guan, Y. Shao, Y.K. Hao, Q. Li, B. Li, D.A. Weitz e X.Q. Feng, *Adv. Biosys.* **4**, 2000065 (2020).
- [64] C. Tsallis, **19**, 457 (2017).
- [65] L. Borland, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 098701 (2002).
- [66] J. Mohanalin, Beenamol, P.K. Kalra e N. Kumar, *Computers and Mathematics with Applications* **60**, 2426 (2010).
- [67] C. Tsallis e U. Tirnakli, *Frontiers in Physics* **8**, 217 (2020).
- [68] U. Tirnakli e C. Tsallis, *Frontiers in Physics* **8**, 613168 (2020).
- [69] C. Beck e E.G.D. Cohen, *Physica A* **322**, 267 (2003).
- [70] E.G.D. Cohen, *Pramana* **64**, 635 (2005).
- [71] J.P. Gazeau e C. Tsallis, *Entropy* **21**, 1155 (2019).
- [72] Y. Li, N. Li, U. Tirnakli, B. Li e C. Tsallis, *EPL* **117**, 60004 (2017).