

Ensino de física mediado pelo Machine Learning: O caso do pêndulo simples

Physics teaching mediated by Machine Learning: The case of the simple pendulum

José Humberto de Souza Prates^{*1}, Camila Schneider Loureiro da Costa¹,
Elisa Fernanda Gurriti Pessoa¹, Guilherme do Prado Mattedi¹, Henrique Baleeiro Monteiro¹,
José Victor Brito de Jesus¹, Luiz fernando Yano Namioka Junior¹, Marçal Santos Huoya¹,
Yumi Alves Matui¹

¹Colégio Leffler, Salvador, BA, Brasil.

Recebido em 31 de julho de 2023. Revisado em 15 de setembro de 2023. Aceito em 17 de setembro de 2023.

Em uma era onde a prevalência de dados se faz marcante, a importância da adoção de técnicas computacionais avançadas, como a inteligência artificial e o aprendizado de máquina, torna-se fundamental no processo de formação dos físicos de amanhã. Este artigo introduz uma abordagem inovadora para o ensino de física, incorporando o aprendizado de máquina ao estudo clássico do pêndulo simples. São introduzidos os conceitos das técnicas de aprendizado de máquina e coletado um conjunto amplo de dados por meio da observação acurada do movimento do pêndulo em diferentes condições iniciais. A partir desses dados, é empregado um algoritmo de regressão para criar um modelo do sistema do pêndulo com índices estatísticos satisfatórios. Este modelo pedagógico se contrasta com os métodos tradicionais de ensino de física e abre um novo horizonte para a compreensão do que significa o ensino de física na era da informação.

Palavras-chave: Machine Learning, Pêndulo Simples, Ensino de Física.

In an era where the prevalence of data is striking, the importance of adopting advanced computational techniques, such as artificial intelligence and machine learning, becomes fundamental in the training process of tomorrow's physicists. This article introduces an innovative approach to physics education, incorporating machine learning into the classic study of the simple pendulum. Key concepts of machine learning techniques are introduced and a broad dataset is collected through accurate observation of the pendulum's motion under different initial conditions. From these data, a regression algorithm is employed to create a model of the pendulum system with satisfactory statistical indices. This pedagogical model contrasts with traditional physics teaching methods and opens a new horizon for understanding what it means to teach physics in the information age.

Keywords: Machine Learning, Simple Pendulum, Physics Education.

1. Introdução

Em meio ao avanço tecnológico atual, a inteligência artificial e a ciência de dados têm permeado diversas esferas da vida cotidiana, moldando nosso consumo de mídia, orientando nossas escolhas e redefinindo nossa interação com as ciências naturais. Apesar deste progresso, como em [1] a implementação destas técnicas nas disciplinas de física e engenharia ainda é um processo em desenvolvimento, com potencial significativo para enriquecer o ensino e a aprendizagem. Neste estudo, propomos um exemplo prático da integração da inteligência artificial no ensino da física, concentrando-se especificamente no estudo do pêndulo simples. Este fenômeno, embora fundamental, apresenta complexidades que pode ser melhor e mais facilmente elucidadas com a utilização do aprendizado de máquina. Este trabalho utiliza o

algoritmo Random Forest Regressor e a matriz de correlação de Spearman para escolha de variáveis, criando um modelo que auxilia no entendimento do comportamento do pêndulo simples. A validade deste modelo é avaliada por meio de métricas de erro quadrático médio (MSE) [2] e coeficiente de determinação (R^2) [3], resultando em uma representação precisa do fenômeno físico em estudo. Inicialmente é feita uma revisão teórica do pêndulo simples e do algoritmo utilizado. Na sequência são apresentados a metodologia e os resultados obtidos com o uso do algoritmo de machine learning usado e da matriz de correlação de Spearman. O modelo construído é avaliado e discutido em relação ao entendimento do comportamento do pêndulo simples, evidenciando sua capacidade de representação precisa desse fenômeno físico. Por fim, são apresentadas as conclusões do estudo, destacando o potencial da inteligência artificial como uma ferramenta promissora para o ensino da física e outras disciplinas científicas.

*Endereço de correspondência: hprates2005@hotmail.com

2. Pêndulo Simples

A equação de movimento para um pêndulo simples de comprimento L e ângulo de deslocamento θ é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\text{sen}\theta \quad (1)$$

Esta é uma equação diferencial não-linear e sua solução exata não é trivial. No caso de pequenos ângulos, a equação pode ser linearizada usando a aproximação $\text{sen}\theta \approx \theta$, resultando em um oscilador harmônico simples, cuja solução é dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ é a frequência angular, θ_0 é o ângulo inicial, t é o tempo e ϕ é a fase inicial. No entanto, para ângulos maiores, essa aproximação já não é válida. A solução exata da equação diferencial envolve integrais elípticas e não pode ser resolvida analiticamente. Neste caso, o período de oscilação T é dado pela integral elíptica de primeira ordem [4]:

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \text{sen}^2\phi}} \quad (3)$$

Onde θ_0 é o deslocamento angular inicial.

A relação integral acima não pode ser resolvida analiticamente em termos de funções elementares. No entanto, é possível desenvolver uma série de aproximações. Para ângulos pequenos, onde $\text{sen}(\theta_0/2)$ é pequeno, a expressão no denominador do integrando se aproxima de 1, e a integral se reduz ao caso do oscilador harmônico simples. Para ângulos maiores, um desenvolvimento em série de potências da amplitude fornece uma correção para o período (Equação 4).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \text{sen}^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots \right] \quad (4)$$

Esta expressão mostra que o período aumenta com a amplitude, ao contrário da previsão do modelo linear. Em outras palavras, para ângulos grandes, o pêndulo simples não é isócrono. A discussão acima é ainda idealizada e não leva em consideração o atrito com os pontos de contato do barbante e a resistência do ar, que em situações reais levariam ao amortecimento do movimento do pêndulo ao longo do tempo.

3. Random Forest Regressor

O algoritmo de regressão Random Forest é um método de aprendizado supervisionado que faz parte da categoria de algoritmos de aprendizado ensemble. Sua operação

consiste na criação de um conjunto, ou “floresta”, de árvores de decisão durante a fase de treinamento. Como em [5] e [6] para formar essa ‘floresta’, emprega-se um procedimento denominado bootstrapping [7], no qual uma amostra aleatória dos dados de treinamento é selecionada. Esse processo é repetido várias vezes, resultando em um conjunto diversificado de árvores de decisão. Além disso, um subconjunto aleatório das características também é escolhido para cada divisão na árvore de decisão, trazendo maior diversidade entre as árvores e tornando o modelo mais robusto. Ao contrário de uma única árvore de decisão, onde a profundidade da árvore precisa ser cuidadosamente gerenciada para evitar o sobreajuste (overfitting) [5], no Random Forest cada árvore é crescida até sua máxima extensão. Isso garante uma diversidade suficiente entre as árvores. Com relação à previsão, para uma nova entrada, cada árvore da “floresta” gera uma previsão. No caso do Random Forest Regressor, a previsão final é dada pela média de todas as previsões das árvores [8]. Outra vantagem do Random Forest é que ele fornece uma medida de importância para cada variável ou característica. Esta importância é calculada como a soma total das reduções no erro de previsão obtido por aquela variável, normalizado pelo número de árvores na floresta. Essa característica é comumente utilizada para seleção de características. Apesar de suas vantagens, é importante salientar que o Random Forest pode ser um algoritmo lento para treinar se o número de árvores for muito grande. Além disso, pode não ser o mais adequado para conjuntos de dados com muitas características esparsas, como dados de texto. Embora seja menos propenso ao sobreajuste do que uma única árvore de decisão, ele ainda pode sofrer deste problema se o número de árvores não for configurado corretamente.

4. Metodologia

A metodologia aplicada nesta pesquisa seguiu uma série de passos para examinar a dinâmica de um pêndulo simples, começando pela montagem do equipamento necessário. O dispositivo, um pêndulo simples, foi construído com recursos de baixo custo, que incluíam tubos de PVC, barbante, massa variável e um transferidor Figura 1. A massa variável era composta por uma garrafa pet, onde era acrescentado quantidades de areia. A escolha de um pêndulo simples permitiu um estudo aprofundado dos fenômenos de oscilação de forma prática e econômica. Para medir as oscilações do pêndulo, os parâmetros de massa, comprimento e ângulo foram variados, permitindo a observação da oscilação correspondente a cada conjunto de parâmetros. A amplitude foi ajustada em um intervalo que variou de 5 graus a 90 graus, com incrementos de 5 em 5 graus. O comprimento, por sua vez, foi medido de 0,10m até 1,50m, variando de 0,10m em 0,10m. A massa também foi variada de 0,01Kg até 1,00Kg, com incrementos de 0,01Kg. A observância



Figura 1: Foto do pêndulo utilizado nas medidas.

meticulosa dos elementos particulares, tais como: a rigorosa construção do aparato experimental, a manipulação precisa das variáveis independentes (tais como amplitude, comprimento e massa), a acurada mensuração dos períodos, a mitigação dos vieses sistemáticos e a consideração dos influentes fatores externos. A análise minuciosa desses elementos culminou em uma apreensão mais abrangente acerca do impacto das variáveis sobre o período de oscilação do pêndulo. Uma característica importante do procedimento foi a maneira como o período de uma única oscilação foi medido. Em vez de tentar medir o período de uma única oscilação, que pode ser sujeito a erros, optou-se por medir o tempo necessário para dez oscilações completas. Este valor total foi então dividido por dez, fornecendo uma medição mais precisa do período de uma oscilação. Além disso, várias pessoas participaram da medição e a oscilação foi iniciada sempre em um dos lados do pêndulo. A tabulação de todos os dados coletados apresentou uma visão compreensível das variáveis em jogo e de suas relações mútuas. Foi utilizada, como descrito em [9] a matriz de correlação de Spearman, uma ferramenta estatística útil para identificar as variáveis que tinham o maior impacto no fenômeno observado. Este passo analítico permitiu um entendimento aprofundado das variáveis que exercem a maior influência no período do pêndulo simples. O comprimento foi diretamente selecionado como variável independentes com base na análise da matriz de correlação. Já a amplitude mostrava uma correlação fraca com o período. Para uma melhor análise realizaram-se experimentos adicionais com o pêndulo, nos quais apenas uma das variáveis independentes era alterada por vez. Esta abordagem permitiu isolar o efeito de cada variável sobre o período do pêndulo, contribuindo para uma compreensão mais clara e precisa dos fenômenos em estudo. Três conjuntos de dados

distintos foram produzidos, cada um correspondendo a um experimento diferente. No primeiro conjunto de experimentos, variou-se a amplitude do pêndulo enquanto o comprimento e a massa eram mantidos constantes. Em seguida, foram realizadas variações no comprimento e na massa, mantendo-se todas as outras variáveis constantes em cada caso. Seguindo essa seleção, uma regressão não linear foi aplicada usando o método de Random Forest Regressor [10]. Os resultados da análise estatística confirmaram a relevância das variáveis escolhidas e estavam em linha com a teoria conhecida do pêndulo simples. Isso reforçou a confiança no procedimento adotado e na eficácia do modelo experimental e das técnicas de análise usadas.

5. Resultados

No estágio inicial do estudo, procedeu-se à coleta dos dados. As variáveis independentes consideradas foram amplitude, comprimento e massa, enquanto o período foi tratado como a variável dependente. Com a obtenção do conjunto de dados, elaborou-se um algoritmo em Python para gerar a matriz de correlação de Spearman. Este tipo de matriz foi escolhido devido à sua habilidade de detectar correlações não lineares. Isso se refere à sua maior eficácia em identificar relações que não seguem uma linha reta, o que pode ser mais complexo e sutil. Neste caso, o método de Spearman é mais adequado do que o de Correlação de Pearson, pois enquanto Pearson foca na detecção de relações lineares entre duas variáveis, Spearman pode captar correlações monotônicas. Isso significa que Spearman não apenas identifica se as variáveis estão se movendo na mesma direção, mas também se elas estão fazendo isso em uma taxa constante, mesmo se a relação não for linear. Assim, ele fornece uma análise mais completa e sensível das correlações não lineares em comparação com o método de Pearson. A matriz de correlação resultante é apresentada na Figura 2.

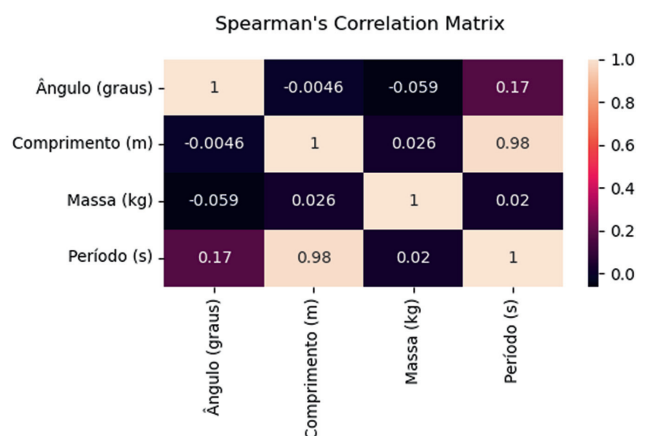


Figura 2: Matriz de correlação de Spearman entre comprimento, amplitude, massa e período.

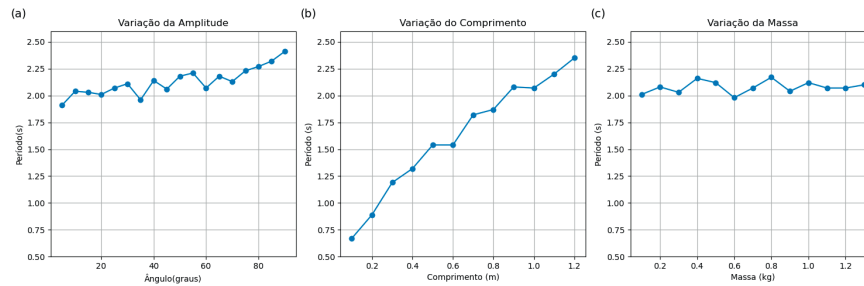


Figura 3: Gráficos de cada variável independente com o período.

A análise da matriz permite observar claramente uma forte correlação entre o comprimento e o período. Além disso, nota-se uma fraca correlação entre amplitude e período, ao passo que a massa não exibe correlação com o período. Estes resultados indicam a necessidade de uma avaliação mais profunda da correlação entre a amplitude e o período. Essa etapa subsequente é crucial para um entendimento mais aprofundado das interações existentes entre as variáveis em estudo. Como dito na metodologia, foram realizados mais três experimentos, variando uma das variáveis e mantendo as demais constantes. Estas modificações sistemáticas nas variáveis independentes resultaram em uma série de dados que forneceram insights valiosos sobre a relação entre estas variáveis e o período do pêndulo. Para cada conjunto de dados, gerou-se um gráfico correspondente, permitindo a visualização clara das relações em estudo. Estes gráficos estão representados na Figura 3.

A análise dos gráficos revela padrões distintos associados a cada variável. Observa-se que o comprimento do pêndulo exerce uma influência significativa sobre o período Figura 3(b). Em contraste, a massa do pêndulo não parece apresentar qualquer correlação com o período Figura 3(c). Por último, mas não menos importante, a análise do gráfico de amplitude sugere a existência de uma correlação fraca com o período Figura 3(a), corroborando com a literatura [11, 12]. As correlações entre o período e as demais variáveis mostraram consistência com os resultados encontrados inicialmente. A existência de uma correlação não linear entre a amplitude e o período foi confirmada. Apesar da análise preliminar sugerir que a correlação entre a amplitude e o período não é particularmente forte, decidiu-se incluir essa variável no modelo proposto. Esta decisão foi baseada na observação de uma relação potencialmente significativa, embora sutil, entre estas duas variáveis. Portanto, considerou-se que a amplitude poderia, de fato, desempenhar um papel relevante na previsão do período do pêndulo. Para corroborar a tese anteriormente proposta, foram estabelecidos dois modelos distintos: o primeiro incorpora tanto o ângulo quanto o comprimento como variáveis independentes (modelo 1), enquanto o segundo considera exclusivamente o comprimento como variável independente (modelo 2). O desenvolvimento dos dois modelos estatísticos foi realizado utilizando a linguagem

de programação Python. Para a implementação dos modelos, optou-se pelo algoritmo Random Forest Regressor. Para avaliar a adequação dos modelos de regressão desenvolvidos, utilizaram-se dois índices estatísticos [13, 14] e [3]: o Erro Quadrático Médio (MSE, Mean Squared Error) e o coeficiente de determinação (R^2). i) No modelo 1 (considerando ângulo e comprimento) o valor obtido para o MSE foi de 0.0001056, indicando que o modelo é capaz de prever o período do pêndulo com muita precisão. Complementarmente, o coeficiente de determinação obtido, $R^2 = 0.9996$, evidencia que uma proporção muito elevada da variância do período pode ser explicada pelas variáveis independentes incluídas no modelo; ii) No modelo 2 (considerando somente o comprimento) o valor obtido para o MSE foi de 0.01288 e o coeficiente de determinação obtido foi $R^2 = 0.9542$, valores piores que os do modelo 1. Além da separação treino e teste foi realizada uma validação cruzada sobre os dados para obterem a variabilidade estatística dos modelos quanto a variabilidade dos próprios dados. Os resultados dos MSE e R^2 médios da validação cruzada foram: i) Modelo 1: MSE = 0,0021 e $R^2 = 0,9929$; ii) Modelo 2: MSE = 0,01652 e $R^2 = 0,9424$; ambos os modelos têm um desempenho muito bom, mas o Modelo 1, que considera tanto o ângulo quanto o comprimento, tem um desempenho superior ao Modelo 2, que considera apenas o comprimento. Isso é evidenciado pelos valores mais baixos de MSE e valores mais altos de R^2 para o Modelo 1 em comparação com o Modelo 2, tanto no conjunto de teste quanto na validação cruzada. A inclusão do ângulo como uma variável independente no Modelo 1 parece contribuir significativamente para sua capacidade de prever com precisão o período do pêndulo. Na Figura 4, apresenta-se um gráfico que compara os períodos preditos pelos modelos de regressão e os períodos efetivamente medidos no decorrer dos experimentos.

Este tipo de visualização, comumente empregado na avaliação de modelos preditivos, serve como uma representação gráfica do grau de concordância entre as previsões do modelo e os dados observados. Ao analisar o gráfico 4(a), observa-se que os pontos estão concentrados próximo à linha da primeira bissetriz, que representa a correspondência perfeita entre as previsões e as medições, já o mesmo não acontece na Figura 4(b).

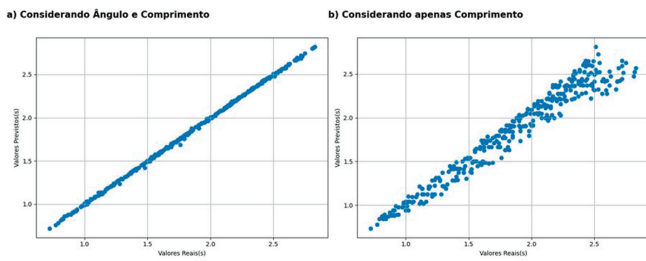


Figura 4: Gráfico de dispersão entre valores previstos e valores reais usados como teste.

Em outras palavras, no modelo 1, os períodos preditos pelo modelo estão em grande concordância com os períodos medidos, uma vez que a maioria dos pontos se localiza próxima a essa linha de perfeita concordância. Este resultado reforça a validade do modelo de regressão desenvolvido, ratificando as discussões e conclusões apresentadas anteriormente. A distribuição dos pontos em torno da primeira bissetriz confirma a habilidade do modelo 1 em prever o período do pêndulo com alto grau de precisão, apesar da aparente fraca correlação entre amplitude e período identificada na análise preliminar. Esta conclusão enfatiza a importância de utilizar métodos estatísticos avançados, como o Random Forest Regressor, na modelagem de fenômenos complexos e não-lineares. Além disso, evidencia a relevância de incluir todas as variáveis potencialmente significativas no modelo, mesmo quando a análise exploratória inicial não indica uma correlação forte. Este estudo demonstra que mesmo relações sutis, como a observada entre a amplitude e o período, podem ter um impacto significativo na qualidade e precisão das previsões do modelo. Estes resultados sugerem que o modelo de regressão gerado apresenta uma capacidade satisfatória de predição. Isso reforça a relevância da inclusão da amplitude como uma variável preditora, mesmo diante da correlação aparentemente fraca observada na análise preliminar. Na prática, o modelo teórico do pêndulo simples geralmente assume que não há resistência do ar e nenhum atrito nos pontos de apoio. Isso é feito para simplificar a análise e obter soluções analíticas. No entanto, no ambiente experimental real, sempre haverá algum grau de resistência do ar e outros fatores de atrito que afetarão o movimento do pêndulo. O uso do algoritmo Random Forest Regressor para criar um modelo baseado em dados experimentais leva em consideração os efeitos da resistência do ar, uma vez que os dados foram coletados na presença do ar. A RandomForestRegressor tentará capturar os padrões observados nos dados experimentais, que já incluem os efeitos do atrito do ar e outros fatores do ambiente. No entanto, é importante observar que, embora o modelo de regressão possa capturar os efeitos da resistência do ar nos dados experimentais, ele não está necessariamente incorporando explicitamente as equações físicas que descrevem esses efeitos. Portanto, enquanto o modelo

pode fazer previsões precisas com base nos dados experimentais, ele pode não refletir completamente as relações físicas subjacentes, especialmente em cenários que não foram experimentados. Também é importante ressaltar que futuros trabalhos podem explorar ainda mais a relação entre amplitude e período, buscando identificar condições sob as quais a amplitude possa exercer uma influência mais significativa sobre o período do pêndulo.

6. Conclusões

Este estudo sobre o pêndulo simples, que incorporou a matriz de correlação e o Random Forest Regressor, ofereceu uma perspectiva renovada sobre este fenômeno físico clássico. A conjugação de experimentação rigorosamente controlada com análise computacional avançada resultou em dados de elevada precisão e confiabilidade. A metodologia empregada reitera a relevância da computação na investigação física e amplia nosso conhecimento sobre as características intrínsecas do pêndulo. Notavelmente, a relação não linear identificada entre amplitude e período de oscilação revela aspectos complexos do sistema, sugerindo a necessidade de investigações mais detalhadas em comportamentos não lineares de sistemas físicos. Dentro deste contexto, é imperativo destacar que a capacidade de um modelo em realizar previsões precisas em qualquer amplitude é crucial. Tal precisão, que engloba uma ampla variedade de condições, é fundamental para determinar a aplicabilidade prática e confiabilidade de um modelo. A robustez e a generalização são aspectos intrínsecos de modelos que conseguem prever acuradamente em diferentes amplitudes, refletindo um entendimento profundo e abrangente do sistema em análise. Adicionalmente, os resultados evidenciam o Random Forest Regressor como uma ferramenta eficiente na modelagem de sistemas físicos de natureza complexa. A aplicabilidade desta metodologia não se restringe ao pêndulo simples e pode ser adaptada a outros sistemas e fenômenos naturais, promovendo uma visão analítica em diversas vertentes científicas. Assim, este trabalho contribuiu significativamente para a literatura científica, enriquecendo nossa compreensão sobre o pêndulo e promovendo avanços na física clássica. Recomenda-se, como futura extensão deste estudo, a consideração de outros algoritmos de regressão, como as Physics informed neural networks. Estes aproximadores, como demonstrado em [15, 16] e [17], têm a capacidade de incorporar leis físicas, muitas vezes expressas através de equações diferenciais parciais, durante o processo de aprendizado. Esta integração entre inteligência artificial e física parece promissora. Em resumo, a metodologia proposta neste estudo representa uma abordagem eficaz para a instrução em física, combinando recursos econômicos e avanços computacionais, alinhando-se assim com os princípios fundamentais da metodologia científica.

Agradecimentos

Gostaria de expressar a mais profunda gratidão ao Centro de Pesquisas do Colégio Leffler (CPCL) por todo o apoio fornecido durante o desenvolvimento deste estudo. O CPCL demonstrou um compromisso exemplar com a pesquisa acadêmica e a sua contribuição foi crucial para a realização deste trabalho. Além disso, um agradecimento especial ao Colégio Leffler é devido. O incentivo inabalável à pesquisa e desenvolvimento, tanto dentro como fora do ambiente de sala de aula, tem sido uma inspiração. É graças a essa cultura de excelência acadêmica e inovação que este trabalho pôde ser concretizado. Por último, mas certamente não menos importante, quero estender os nossos agradecimentos a todos os professores, estudantes e funcionários envolvidos direta ou indiretamente neste projeto. O seu empenho e dedicação contribuíram significativamente para o sucesso desta pesquisa.

Referências

- [1] H. Ferreira, E. Almeida Junior, W. Espinosa-García, E. Novais, J. Rodrigues e G. Dalpian, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **44**, e20220214 (2022).
- [2] I.A.B. Saad, L.B. de Oliveira, E.P.M. Costa, M.B. de Oliveira e B.S. Vian, *Journal of Health Sciences* **19**, 25 (2017).
- [3] M.E.G. Martins, *Revista Ciência Elementar* **6**, 24 (2018).
- [4] P.F. Byrd e M.D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* (Springer Berlin, Heidelberg, 1971), v. 67.
- [5] P. Serras, G. Ibarra-Berastegi, J. Sáenz e A. Ulazia, *Ocean Engineering* **189**, 106314 (2019).
- [6] M. Carnini e A. Pastore, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **47**, 082001 (2020).
- [7] W.J. Cunha e E.A. Colosimo, *Revista de Matemática e Estatística* **21**, 25 (2003).
- [8] R.M.R. Mion, *Previsão de tendência de preços do boi gordo no Estado de São Paulo utilizando o Random Forest*. Dissertação de Mestrado Profissional, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo (2019).
- [9] D.M. Costa, F.V. Barbosa, D.V. Costa e I.B. Goulart, *Revista Pretexto* **20**, 36 (2019).
- [10] M. Fratello e R. Tagliaferri, *Encyclopedia of Bioinformatics and Computational Biology* **1**, 374 (2018).
- [11] W.P. Ganley, *American Journal of Physics* **53**, 73 (1985).
- [12] A. Palangana e P. Pedreira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **17**, 215 (1995).
- [13] S. Goyal e G.K. Goyal, *Canadian Journal on Artificial Intelligence, Machine Learning and Pattern Recognition* **2**, 78 (2011).
- [14] F.A. Cássaro, J.A. Oliveira, H. Cruz e L.F. Pires, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20190130 (2019).
- [15] S. Cai, Z. Wang, S. Wang, P. Perdikaris e G.E. Karniadakis, *Journal of Heat Transfer* **143**, 060801 (2021).
- [16] A. Piccione, J. Berkery, S. Sabbagh e Y. Andreopoulos, *Nuclear Fusion* **60**, 046033 (2020).
- [17] J.X. Wang, J.L. Wu e H. Xiao, *Physical Review Fluids* **2**, 034603 (2017).