

Grafos de Emparelhamento de Arestas

H. C. SILVA^{1*}, C. MENDES DE JESUS² e J. R. P. COELHO³

Recebido em 10 de dezembro de 2020 / Aceito em 16 de outubro de 2022

RESUMO. Neste trabalho propomos uma nova técnica para verificar se um grafo corresponde a algum emparelhamento de arestas. Para isso propomos o uso do que intitulamos grafo paralelo; um grafo onde cada aresta é dividida em duas semi-arestas orientadas. Este grafo associa uma palavra a um dado emparelhamento, de forma que operações sobre as palavras podem ser usadas para determinar a equivalência entre dois emparelhamentos. A relação entre a palavra e os vértices do emparelhamento é determinada por um algoritmo proposto chamado chuva de vértices. Por fim, determinamos a relação entre a extensão de vértices e a palavra associada.

Palavras-chave: geometria e topologia, computação científica, grafos, emparelhamento de arestas.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, propomos um método alternativo para determinar se um dado grafo G com A arestas, mergulhado sobre uma superfície fechada e orientada M , corresponde a algum emparelhamento de arestas de polígono regular \mathcal{P} com $2A$ arestas. Em outras palavras, introduzimos grafos paralelos γ , como bordo de uma vizinhança tubular da imagem do mergulho de G sobre M , para verificar se a imagem de G coincide com a imagem de algum emparelhamento de aresta de \mathcal{P} .

Um grafo pode estar associado a diferentes emparelhamentos, correspondentes a mergulhos não equivalentes de G sobre M . Os diagramas de emparelhamento determinam se dois emparelhamentos associados a um mesmo grafo são equivalentes ou não (ver [9, 11]). As palavras associadas aos grafos paralelos sobre M é uma forma alternativa, aos diagramas de emparelhamento, para determinar se dois emparelhamentos associados a um mesmo grafo são ou não equivalentes.

*Autor correspondente: Hoechst Cornélio da Silva – E-mail: hoechstcornelio@gmail.com

¹Instituto de ciências exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Avenida Antônio Carlos, 6627, 31270-901 Pampulha, Belo Horizonte, MG, Brasil – E-mail: hoechstcornelio@gmail.com <https://orcid.org/0009-0004-7752-1442>

²Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Rua José Lourenço Kelmer, s/n, Campus Universitário, Bairro São Pedro, 36036-900 Juiz de Fora, MG, Brasil – E-mail: cmendesjesus@ufjf.br <https://orcid.org/0000-0002-1050-2712>

³Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, R. Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22451-900 Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: jefersonromulo@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-7123-714X>

Em [6], foram introduzidas dois tipos de cirurgias que contribuiriam para determinar novas famílias de grafos de emparelhamentos trivalentes associado a superfície com gênero $g = \sum_{i=1}^m g_i$, a partir de conjuntos de m emparelhamentos já conhecidos associados às superfícies com gênero g_i .

Em [5] foi introduzido extensão e contração de grafos, uma técnica que mostra como determinar grafos de emparelhamento de arestas de polígonos regulares a partir de outros grafos de emparelhamento, como por exemplo o grafo de emparelhamento com único vértice, bastante conhecido com a topologia quociente. Veremos na Seção 4 a extensão do grafo paralelo correspondente a esta extensão de grafos.

A motivação para estudo do caso particular dos emparelhamentos associados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$, cujos os grafos são 3-regulares, está baseada no fato que tais tesselações fornecem empacotamentos de esferas com densidade máxima [2, 7] e, portanto, estão relacionadas com a construção de códigos ótimos cuja probabilidade de erro é mínima, [3]. Jorgensen-Naatanen fizeram o estudo para o caso do bitoro, em [9], mostrando que, a menos de reflexão, existem 8 formas diferentes de emparelhamento de P_{18} , que foram generalizado em [7] por Faria e Palazzo.

O caso do tritoro foi estudado por Lee Mosher, em [10] e Nakamura em [11], utilizando métodos semelhantes ao usado em [9], isto é, métodos que envolvem o estudos dos sistema de rotação dos mergulhos e dos grupos fuchsianos, exibiram os possíveis emparelhamentos para os grafos trivalentes, mostrando que menos de reflexão existem 927 padrões de emparelhamentos de P_{30} .

O presente artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, apresentamos algumas definições preliminares ao desenvolvimento do trabalho. Já na Seção 3, introduzimos o grafo paralelo, a palavra e exemplos sobre o bitoro. Além disso introduzimos a construção da aplicação do grafo paralelo no emparelhamento, denominada chuva de vértice. Já na Seção 4 foi estabelecida a relação entre o grafo paralelo e as extensões e consequentemente, a relação entre a palavra e as extensões.

2 EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS

Seja \mathcal{P}_n um polígono regular com $n = 2A$ arestas, $A > 1$ e M_g uma superfície fechada e orientada com gênero $0 \leq g \leq A/2$. Seja $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow M_g$ uma aplicação quociente que identifica pares de arestas de \mathcal{P}_n . Ou seja, cada par de arestas (a_i, a'_i) de \mathcal{P}_n é levado num arco de curva α_i ($i = 1, \dots, A$) em M_g e k_j vértices de \mathcal{P}_n ($\sum_{j=1}^V k_j = 2A$) é levado em um ponto p_j , de forma que o ponto p_j é incidente a curva α_i se, e somente se, um destes k_j vértices de \mathcal{P}_n é incidente a uma das arestas (a_i, a'_i) (vide Figura 1). Os conceitos e proposições desta seção estão contidos em [5]. A Figura 1 ilustra uma aplicação do polígono \mathcal{P} na superfície M_g , a qual os pares de arestas (f, f) , (b, b) , (a, a) do polígono são mapeados para os arcos de curva ' f ', ' b ', ' a ' da superfície, respectivamente. Como os três pontos do polígono, marcados em negrito, são extremos das arestas contidas nos pares citados, eles são mapeados para o único ponto marcado em negrito na superfície, que é extremo dos arcos de curva.

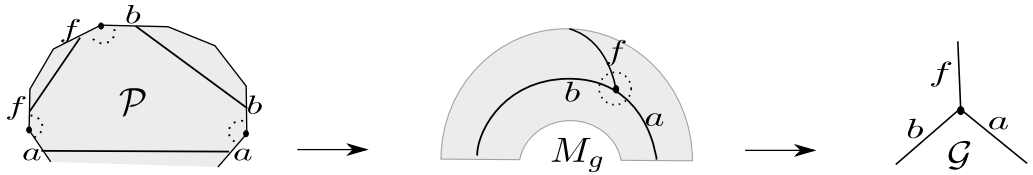


Figura 1: Exemplo local de emparelhamento de arestas.

Fonte: [5], 2020.

Definição 2.1. A aplicação quociente $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow M_g$ que identifica pares de arestas do polígono \mathcal{P}_n é chamada de **emparelhamento de arestas do polígono regular \mathcal{P}_n** .

O conjunto de segmentos de retas no polígono, apontando os pares de arestas (a_i, a'_i) identificadas por ϕ , é chamado de **diagrama de emparelhamento**, e será denotado por \mathcal{D} (ver Figura 2).

Definição 2.2. Dois diagramas de emparelhamento \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 são ditos **diagramas equivalentes** se \mathcal{D}_1 pode ser obtido de \mathcal{D}_2 por alguma rotação, reflexão por algum eixo ou por combinação delas.

2.1 Extensão de grafo de emparelhamento

Sejam G um grafo conexo, com V vértices e A arestas, e M_g uma superfície fechada e orientada com gênero g . Denotamos por $\iota : G \rightarrow M_g$ um mergulho de G sobre a superfície M_g e por $\mathcal{G} = \iota(G)$. Denotamos por $C(G)$ o número de regiões do complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$. Denotamos por $\chi(G)$ a característica de Euler do grafo G , definida por $\chi(G) = V - A$.

Proposição 2.1. [5] Se todas as $C(G)$ regiões conexas de $M_g \setminus \mathcal{G}$ são simplesmente conexas (homeomorfas ao disco), então $\chi(G) = 2 - 2g - C(G)$.

Denotamos por $\partial \mathcal{P}_n$ o conjunto de arestas (bordo) de \mathcal{P}_n .

Proposição 2.2. Se \mathcal{P}_n é um polígono de n lados, onde n é par e $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow M_g$ é uma aplicação quociente, então existem algum grafo G e um mergulho $\iota : G \rightarrow M_g$, tal que $\mathcal{G} = \iota(G) = \phi(\partial \mathcal{P}_n)$ e o complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$ é simplesmente conexo (homeomorfo a um disco).

Proof. Como $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow M_g$ é uma aplicação quociente, temos que as arestas de \mathcal{P}_n são identificadas aos pares para formar M_g . Dessa forma, o bordo de \mathcal{P}_n constitui naturalmente um grafo mergulhado em M_g , o qual cada aresta do grafo representa uma e exatamente uma classe de equivalência da aplicação quociente e os vértices de tal grafo mergulhado são dados pelas interseções dos vértices de \mathcal{P}_n em M_g , geradas pelo mapa ϕ . □

Definição 2.3. Um grafo G com A arestas será dito um **grafo de emparelhamento** de arestas do polígono \mathcal{P}_n ($n = 2A$) se existe um mergulho $\iota : G \rightarrow M_g$ tal que o complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$ é simplesmente conexo (homeomorfo a um disco).

Definição 2.4. Sejam v um vértice de um grafo G . O **grau** de v , denotado por $deg_G(v)$ ou $deg(v)$, é o número de arestas incidente a v . Sendo que cada loop contabiliza duas arestas incidentes.

Definição 2.5. Sejam G um grafo K -regular (todos os vértices tem grau K). Se G é grafo de emparelhamento de \mathcal{P}_n , então diremos que G é um grafo de emparelhamento **K -regular** e que \mathcal{P}_n é polígono de emparelhamento K -regular.

Definição 2.6. O emparelhamento do polígono \mathcal{P}_{4g} ($g \geq 1$), sobre a superfície M_g , será chamando de emparelhamento $4g$ -regular (ver Figura 2).

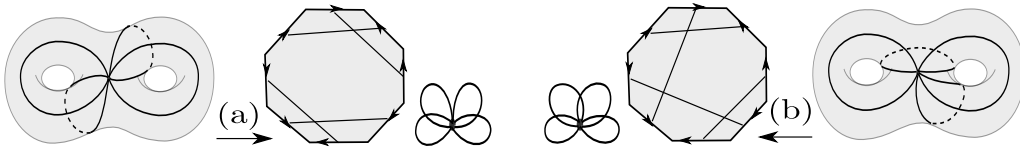


Figura 2: Exemplos de emparelhamentos $4g$ -regular, para $g = 2$.

Fonte: [5], 2020.

A Figura 2 ilustra dois mergulhos distintos, de um mesmo grafo, sobre o Bitoro, os quais geram emparelhamentos distintos $4g$ -regulares, com $g = 2$, para o Bitoro.

O próximo resultado [5] determina os possíveis valores de V e A , para emparelhamentos k -regulares sobre M_g , em função de K e g .

Proposição 2.3. [5] *Seja \mathcal{P}_n um polígono de emparelhamento K -regular associado ao par (M_g, \mathcal{G}) . Então, o número de vértices V e o número de arestas A é dado por*

$$(V, A) = \left(\frac{2(2g - 1)}{K - 2}, \frac{K(2g - 1)}{K - 2} \right).$$

A seguir veremos a definição de extensão e contração de um grafo sobre uma superfície, introduzida em [5].

Definição 2.7. Uma aresta $uv \in \mathcal{G}$ será dita *uma extensão do vértice* $w \in \mathcal{G}_1$ sobre a superfície M_g se os vértices $u, v \in \mathcal{G}$ e a aresta uv pode ser obtida por um “estiramento” do vértice w . Neste caso, dizemos que o grafo \mathcal{G} é uma *extensão* do grafo \mathcal{G}_1 ou \mathcal{G}_1 é uma *contração* do grafo G .

O grau de w satisfaz $deg(w) = deg(u) + deg(v) - 2$.

Denotamos por $\beta_1(G) = 1 - V + A$ o número de ciclos do grafo G . Segue dos resultados mostrados em [5], que a extensão de grafos sobre a superfície M_g tem as seguintes propriedades.

Proposição 2.4. [5] *Seja \mathcal{G}_1 um grafo com A_1 arestas obtido da extensão (ou contração), sobre a superfície M_g , do grafo \mathcal{G} com A arestas. Então:*

1. $\beta_1(\mathcal{G}_1) = \beta_1(\mathcal{G})$.

2. $C(\mathcal{G}_1) = C(\mathcal{G})$.
3. Se \mathcal{G} é grafo de emparelhamento do polígono regular \mathcal{P}_{2A} então \mathcal{G}_1 é grafo de emparelhamento do polígono regular \mathcal{P}_{2A_1} .
4. Todo emparelhamento de arestas sobre M_g pode ser obtido pela extensão de algum emparelhamento $4g$ -regular sobre M_g .

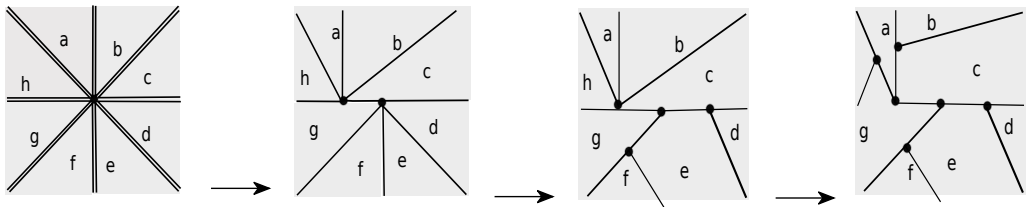


Figura 3: Exemplo local da extensão de grafos.

Fonte: [5], 2020.

A Figura 3 ilustra o efeito local da extensão de um vértice de grau oito. Observe que a cada extensão feita é adicionado um novo vértice e uma nova aresta, sendo assim claro a invariância do número de Betti. Nesta figura também é possível observar que o número de componentes do complemento do grafo se mantém constante em relação às extensões.

3 PALAVRA DE UM EMPARELHAMENTO

Em [9] e [5] os autores mostraram que podem existir diferentes emparelhamentos de arestas de um polígono associados a um mesmo grafo. Estes emparelhamentos são diferenciados pelos diagramas de emparelhamentos, ou seja, dois emparelhamentos são equivalentes se seus diagramas são isomorfos. Nosso objetivo é introduzir uma técnica alternativa para verificar se um grafo mergulhado sobre uma superfície é grafo de algum emparelhamento, que é equivalente a determinar qual o diagrama associado.

3.1 Grafo paralelo

Seja $\iota : G \rightarrow M_g$ um mergulho do grafo G . A vizinhança tubular de $\mathcal{G} = \iota(G)$ em M_g será denotado por $\nu(\mathcal{G})$ (ver Figura 4c). Se $M_g \setminus \mathcal{G}$ tem $C(G)$ componentes conexas, então o bordo de $\nu(\mathcal{G})$ tem $C(G)$ componentes de curvas simples e fechadas contidas em $M_g \setminus \mathcal{G}$.

Definição 3.8. O conjunto de curvas bordo da vizinhança tubular $\nu(\mathcal{G})$ em M_g será chamado de **curvas paralelas** a \mathcal{G} e denotado por $B(G)$.

Observação 1. O número de componentes de curvas de $B(G)$ é igual a $C(G)$, pois cada componente conexa de $B(G)$ está contida em uma região conexa de $M \setminus \mathcal{G}$.

Consequentemente, se G é uma árvore, então $C(G) = 1$.

Uma consequência imediata da Definição 2.3 é o seguinte

Lema 3.1. *Se \mathcal{G} é um grafo de emparelhamento de arestas, então $C(G) = 1$.*

O próximo resultado segue direto da Proposição 2.4.

Lema 3.2. *Todo grafo de emparelhamento de arestas, sobre a superfície fechada e orientada M_g , satisfaz $\beta_1(G) = 2g$.*

Lema 3.3. *Se $\beta_1(G) = 2g$ e $M \setminus \mathcal{G}$ é conexo, então $M \setminus \mathcal{G}$ é simplesmente conexo.*

Proof. Se $\beta_1(G) = 2g$, então $\chi(M \setminus G) = \chi(M) - \chi(G) = (2 - 2g) - (V - A) = 2 - \beta_1(G) - (V - A) = 2 - (1 - V + A) - (V - A) = 1$. Se $\chi(M \setminus G(V, A)) = 1$ e $M \setminus G(V, A)$ é conexo, então $M \setminus G(V, A)$ é simplesmente conexo. \square

Teorema 3.1. *\mathcal{G} é um grafo de emparelhamento de arestas se, e somente se, satisfaz $\beta_1(G) = 2g$ e a curva paralela $B(G)$ tem única componente conexa.*

Proof. Se \mathcal{G} é um grafo de emparelhamento de arestas sobre M_g , pelo Lema 3.1, $B(G)$ tem única componente conexa e pelo Lema 3.2 $\beta_1(G) = 2g$.

A volta, se $B(G)$ tem única componente conexa, então $M \setminus \mathcal{G}$ é conexo, pelo Lema 3.1. Se $\beta_1(G) = 2g$ e $M \setminus \mathcal{G}$ é conexo, então $M \setminus \mathcal{G}$ é simplesmente conexo, pelo Lema 3.3, e \mathcal{G} é um grafo de emparelhamento de arestas sobre M_g . \square

Definição 3.9. Uma projeção do g -toro no plano $p : M_g \rightarrow \mathbb{R}^2$ será chamada de projeção trivial se o conjunto singular de p contém $g + 1$ componentes (conexas) de curvas e a imagem destas no plano são curvas simples e disjuntas, sem pontos de cúspides ou pontos duplos. Seja $\iota : G \rightarrow M_g$ um mergulho (ver Figura 4a) e $p : M_g \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma projeção trivial. Em cada cruzamento de duas arestas de $p(\mathcal{G})$ no plano será indicado por uma descontinuidade a aresta que está por baixo em M_g (ver Figura 4b). A vizinhança tubular de $p(\mathcal{G})$ no plano será denotado por $v(p(\mathcal{G})) = \pi(v(\mathcal{G}))$, para alguma imersão $\pi : v(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, sem pontos singulares.

Observação 2. Se \mathcal{G} é grafo de emparelhamento de arestas, então o bordo de $\pi(v(\mathcal{G}))$ tem única componente conexa. pois o bordo $v(\mathcal{G})$ tem única componente.

Vamos construir o grafo paralelo a um dado grafo de emparelhamento \mathcal{G} , sobre a única curva $\pi(B(G))$, da seguinte forma:

- Considere os dois arcos da curva $B(G)$, paralelos a arestas a_i de \mathcal{G} ($i = 1, \dots, A$), como um par de arestas, que será denotado por A_i e A_i^{-1} , uma vez que a superfície é orientada. O sinal -1 indica que a orientação local de A_i^{-1} é inversa da orientação de A_i . Entre duas arestas consecutivas colocamos um vértice, como ilustra a Figura 4d. Este grafo, com $2A$ arestas, será chamado de **grafo paralelo** a \mathcal{G} e será denotado por $\gamma(\mathcal{G})$.

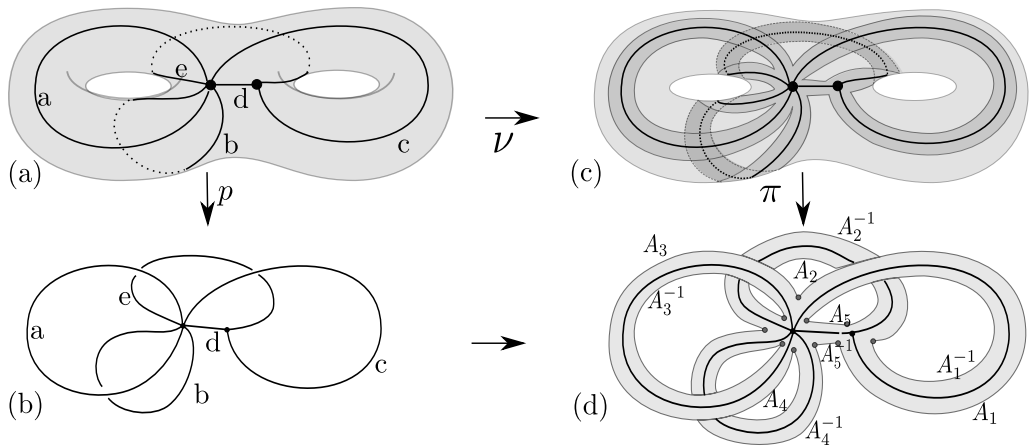


Figura 4: Exemplo de projeção do Bitoro e grafo paralelo.

- Uma orientação natural para $\gamma(G)$ é como segue: partindo de uma aresta $A \in \gamma(G)$, caminhe sobre $\gamma(G)$ de forma que as arestas do grafo \mathcal{G} estejam do lado esquerdo de A_i (vide Figura 4d).
- Se $q: \mathcal{P} \rightarrow M$ é a aplicação quociente, do polígono \mathcal{P} sobre M_g , que tem o grafo \mathcal{G} como grafo de emparelhamento, então a pré-imagem de $\gamma(G)$ é uma curva no bordo de \mathcal{P} , com as arestas \bar{A}_i e \bar{A}_i^{-1} , pré-imagem de A_i e A_i^{-1} .
- O diagrama de emparelhamento, denotado por \mathcal{D} , associado a aplicação q está formado pelos seguimentos de retas que conectam as arestas $(\alpha_i, \alpha_i^{-1})$ de \mathcal{P} paralelas ao par $(\bar{A}_i, \bar{A}_i^{-1})$.

O processo de divisão das arestas do grafo em duas, seguindo uma orientação, é similar ao usado na estrutura de dados da half-edge (vide [12]). A half-edge é uma estrutura topológica de dados usada para representar malhas e subdivisões planares. Já no grafo paralelo, o objetivo é associar uma palavra ao emparelhamento, abrindo assim um novo horizonte para o estudo dos emparelhamentos. Consequentemente passamos pelo estágio de indexar o bordo da face via uma curva, de onde segue a similaridade.

3.2 Construção da palavra

A palavra formada percorrendo $\gamma(G)$ ou o bordo de \mathcal{P} descreve de forma única o emparelhamento, como pode ser visto na Figura 5, um polígono com 10 arestas $A_1 A_3 A_4 A_3^{-1} A_2 A_5 A_1^{-1} A_2^{-1} A_4^{-1} A_5^{-1}$

A Figura 5 mostra, do lado esquerdo, a palavra obtida ao percorrer $\gamma(G)$ e do lado direito mostra essa palavra sendo mapeada, bijetivamente, para o bordo do polígono, gerando assim o diagrama de emparelhamento.

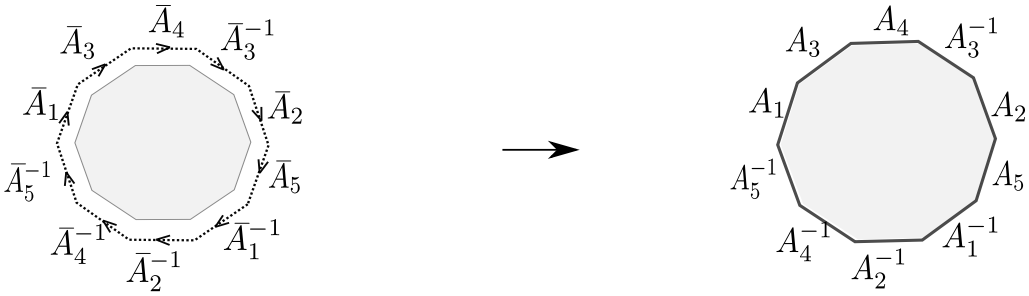


Figura 5: Pré-imagem do grafo paralelo e pré-imagem do grafo de emparelhamento.

A palavra formada quando caminhamos ao longo de $B(G)$ ou no bordo do polígono \mathcal{P} , no sentido horário, será denotada por \mathcal{W}_g , onde g é o gênero da superfície em questão.

Se α , β e Γ representam blocos quaisquer de uma dada palavra \mathcal{W}_g , ou seja, os demais termos da mesma, então algumas das transformações que não alteram a topologia da superfície serão apresentadas a seguir:

- T1* Pode-se dizer que a permutação cíclica de uma palavra não altera a topologia da superfície a qual estas estão associadas, ou seja, $\alpha\beta = \beta\alpha$.
- T2* A remoção ou introdução de um par de arestas consecutivas $A A^{-1}$ (ou $A^{-1} A$), no polígono e, consequentemente, na palavra não altera a topologia da superfície. Isto é, $\alpha A A^{-1} \beta = \alpha \beta$.
- T3* Considerando a superfície representada pelo bloco β , tem-se que β^{-1} também representa a superfície, ou seja, $\beta = \beta^{-1}$.
- T4* A permutação de dois blocos quaisquer, entre duas arestas do tipo A e A^{-1} , não altera a topologia da superfície, ou seja, $\alpha A \beta \Gamma A^{-1} = \alpha A \Gamma \beta A^{-1}$.
- T5* A permutação de termos do tipo $A A^{-1}$ não altera a topologia da superfície, ou seja, $\alpha A \beta A^{-1} \Gamma = \alpha A^{-1} \beta A \Gamma$.

Para mais detalhes acerca dos itens anteriores, veja [8].

Definição 3.10. Se \mathcal{W}_g é uma palavra associada a um grafo, então cada elemento A_i (ou A_i^{-1}) desta será chamado de **sílaba da palavra** \mathcal{W}_g .

Definição 3.11. Duas palavras \mathcal{W}_g^1 e \mathcal{W}_g^2 são ditas **palavras equivalentes** se \mathcal{W}_g^1 pode ser obtida de \mathcal{W}_g^2 via aplicação das transformações *T1*, *T2*, *T3*, *T4*, *T5* anteriores ou combinação destes.

Teorema 3.2. *Seja \mathcal{W}_g uma palavra associada ao grafo emparelhamento \mathcal{G} . Então existe único diagrama de emparelhamento associado a \mathcal{W}_g .*

Proof. Primeiramente, mostremos a existência de um diagrama associado a \mathcal{W}_g . Seja \mathcal{W}_g uma palavra associada a um grafo de emparelhamento \mathcal{G} , então \mathcal{W}_g admite $2A$ sílabas. Pela construção do Grafo paralelo, as arestas do A_i e A_i^{-1} são paralelas a aresta α_i de \mathcal{G} , para cada $i = 1, \dots, A$. Em um diagrama de $2A$ lados transcreva a palavra para o seu bordo e conecte as arestas referentes às sílabas A_i e A_i^{-1} . Resta mostrar que tal diagrama é único. Dado a palavra \mathcal{W}_g , seja \mathcal{D} o diagrama de emparelhamento associado a \mathcal{W}_g . Suponha \mathcal{D}' outro diagrama de emparelhamento associado a \mathcal{W}_g , não equivalente a \mathcal{D} . Então \mathcal{D}' não é fruto de nenhuma rotação, reflexão ou combinação delas de \mathcal{D} . Como a palavra em questão é a mesma para os dois diagramas, então pode ocorrer que

1. A disposição das sílabas é a mesma para os dois diagramas. Neste caso, os diagramas são exatamente iguais. Uma contradição.
2. A disposição das sílabas é uma permutação circular. Neste caso, \mathcal{D}' é uma rotação de \mathcal{D} . Uma contradição.

Logo, o diagrama ao qual \mathcal{W}_g está associado é único. □

Corolário 3.2.1. Se \mathcal{W}_g^1 e \mathcal{W}_g^2 são palavras equivalentes, associadas aos diagramas \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 , respectivamente, então \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 são equivalentes. Vale a recíproca (vide Figura 6).

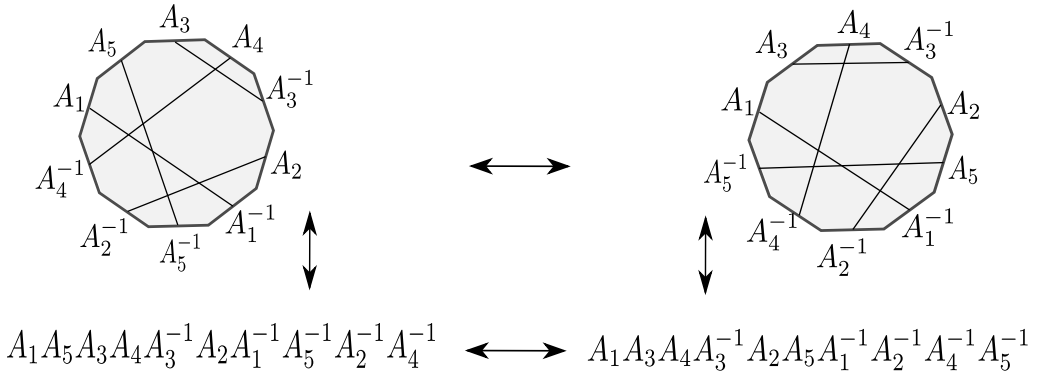


Figura 6: Palavras e diagramas equivalentes.

A Figura 6 ilustra duas palavras equivalentes e os seus respectivos diagramas associados. As setas verticais indicam a quais diagramas as palavras estão associadas. A seta horizontal superior, indica que os diagramas são equivalentes. Tal equivalência é natural, visto que um diagrama pode ser obtido do outro por uma rotação. Portanto, resta mostrar a equivalência das palavras, indicadas pela seta horizontal inferior. A fim de verificar que as palavras são de fato equivalentes é necessário e suficiente obter uma a partir da outra via as operações da Definição 3.11.

$$A_1A_3A_4A_3^{-1}A_2A_5A_1^{-1}A_2^{-1}A_4^{-1}A_5^{-1}$$

$$A_1A_3A_4A_3^{-1}A_2A_5A_1^{-1}A_5^{-1}A_2^{-1}A_4^{-1} \text{ (Transformação } T4)$$

$$A_1 A_3 A_4 A_3^{-1} A_2 A_5 A_1^{-1} A_5^{-1} A_2^{-1} A_4^{-1} \\ A_1 A_5 A_3 A_4 A_3^{-1} A_2 A_1^{-1} A_5^{-1} A_2^{-1} A_4^{-1} \text{ (Transformação } T4)$$

3.3 Relação entre palavras e vértices

Dado um grafo de emparelhamento G de M_g , uma vez definida a relação de um emparelhamento, \mathcal{G} , sobre uma superfície M_g e a palavra associada \mathcal{W}_g , via grafo paralelo, a natureza biunívoca de tal relação fica nítida. Portanto, nos apoiando nessa bijetividade do processo, é natural pensar que as perguntas que podem ser respondidas analisando a geometria do emparelhamento, sobre a superfície, também possam ser respondidas apenas estudando \mathcal{W}_g . Tendo em vista este pensamento natural, de responder questões estudando apenas \mathcal{W}_g , colocado no parágrafo anterior, existem algumas perguntas plausíveis. Uma palavra associada a um emparelhamento carrega informações sobre os vértices do emparelhamento? Como saber se essa palavra está associada a um emparelhamento K -regular? Para responder essas questões, será construída a aplicação do grafo paralelo, conseqüentemente da palavra, ao emparelhamento. Considere \mathcal{G} um emparelhamento sobre a superfície M_g , com V_n vértices e A arestas e \mathcal{W}_g a palavra associada a esse emparelhamento. Note que \mathcal{W}_g carrega com si o gênero da superfície e pela construção do grafo paralelo o número de sílabas da palavra, denotado por $|\mathcal{W}_g|$, coincide com o dobro do número de arestas, $|\mathcal{W}_g| = 2A$. Como \mathcal{G} é emparelhamento, segue que $V_n - A = 1 - 2g$ (vide [5]). Assim a resposta para a primeira pergunta da seção é sim, os vértices estão unicamente determinados por \mathcal{W}_g . Agora, para responder a segunda pergunta, será definido o conceito de vértices associados em $\gamma(\mathcal{G})$ e posteriormente será construído um algoritmo.

Definição 3.12. Sejam \mathcal{G} um grafo de emparelhamento sobre uma superfície M_g e $\gamma(\mathcal{G})$ o seu grafo paralelo. Dois vértices U e Z do $\gamma(\mathcal{G})$ são ditos **associados** se estão na vizinhança de um mesmo vértice v_1 de \mathcal{G} . Neste caso, dizemos que U e Z são associados por v_1 .

Observação 3. Seja a_i uma aresta qualquer de \mathcal{G} , de modo que v_1 e v_2 constituam os seus extremos. Ao construir $\gamma(\mathcal{G})$ pode ser observado que as arestas A_i e A_i^{-1} de $\gamma(\mathcal{G})$ são paralelas à a_i e assim o vértice que está no início da aresta A_i e o que está no fim da aresta A_i^{-1} (ou vice-versa) são associados por v_1 (ou no caso contrário, por v_2). (Vide Figura 7a).

Para representar o conjunto de vértices de $\gamma(\mathcal{G})$ associados por v_1 e v_2 na palavra, veja a Figura 7b.

Sabendo que a palavra determina de forma única os vértices do emparelhamento e com a Observação 3 está apresentada uma forma de associar palavra aos vértices diretamente. Portanto, o algoritmo para determinar os vértices associados é como segue.

O algoritmo será chamado **chuva de vértices da palavra** \mathcal{W}_g , ou simplesmente **chuva de vértices**.

Observação 4. Para facilitar a leitura do algoritmo, colocamos em negrito os passos propriamente ditos e todo o restante são observações referente aos passos.

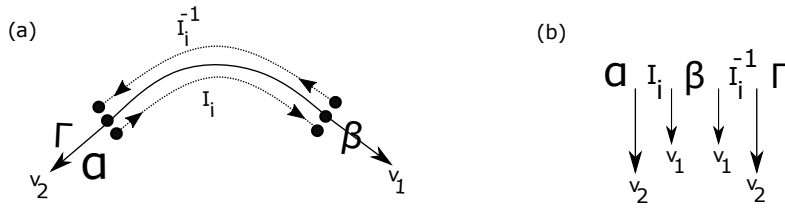


Figura 7: (a) Disposição de vértices associados em um grafo; (b) representação, na palavra, de vértices associados.

Algoritmo chuva de vértices:

1. **Input:** Os dados de entrada do algoritmo são: a palavra \mathcal{W}_g e a seleção de quaisquer duas sílabas consecutivas desta palavra, digamos A_i e A_j , exatamente nessa ordem.
2. **Entre as sílabas selecionadas coloque uma seta (com o tamanho de uma unidade) apontando para baixo e no fim da seta coloque a notação v_1 .**
(Essa notação é para indicar que o vértice, do grafo paralelo, que conecta as arestas consecutivas A_i e A_j são associados pelo vértice V_1 do grafo original).
3. **Coloque uma cópia da seta citada anteriormente (com tamanho de uma unidade, direcionada para baixo e com a notação V_1 em seu extremo), imediatamente antes da sílaba A_i^{-1} e imediatamente depois da sílaba A_j^{-1} .** (Note que pela Observação 3 o vértice do grafo paralelo, que aparece imediatamente depois de A_k é associado ao vértice que aparece imediatamente antes de A_k^{-1} , isso para todo k existente. Logo essa notação indica que os vértices antes de A_i^{-1} e depois de A_j^{-1} são associados também pelo vértice V_1 do grafo original).
4. (Se a sílaba A_l está imediatamente antes da sílaba A_i^{-1} e a sílaba A_m está imediatamente depois da sílaba A_j^{-1} , pelo item anterior existe uma seta entre A_l e A_i^{-1} e entre A_j^{-1} e A_m , necessariamente nessa ordem).
Coloque uma cópia da seta imediatamente antes de A_l^{-1} e imediatamente depois de A_m^{-1} . (Note que novamente estamos usando a Observação 3 e que os passos 3. Note também que 4 foram unicamente determinados pela escolha dos passos 1 e 2).
5. **Repita o procedimento até que não seja mais possível colocar, via a regra dada pela Observação 3, a seta em questão.**
6. **Coloque uma seta direcionada para baixo, com duas unidades de comprimento e com a notação v_2 em seu final, entre duas sílabas consecutivas ainda não rotuladas, caso existam. Digamos A_n e A_o , exatamente nessa ordem.** (Com essa notação estamos dizendo que o vértice do grafo paralelo que conecta as arestas A_n e A_o é associado pelo vértice V_2 do grafo original).

7. **Repita os passos 3, 4 e 5 para a nova seta, agora com as sílabas A_n e A_0 como referência.** (Posteriormente, repita o passo 6 apenas adicionando uma unidade no tamanho da seta e também uma unidade no índice da notação do extremo da seta).
8. **Output:** Conjuntos de todos os vértices associados por V_1, V_2, \dots, V_n , respectivamente, onde n é a cardinalidade do conjunto de vértices do grafo original.

Observação 5. Note que com a chuva de vértices, dada uma palavra \mathscr{W}_g é possível determinar quantos vértices tem o grafo que é representado por tal palavra. Tal número coincide com o tamanho, em termos de unidades, da maior seta do algoritmo e conseqüentemente com o maior índice atribuído aos vértices nomeados no algoritmo. Para verificar esta observação, basta notar que todo vértice do grafo original, por construção, tem vértices do grafo paralelo em sua vizinhança.

Observação 6. A chuva de vértices é independente da escolha aleatória, de duas sílabas consecutivas A_i e A_j , feita no passo 1 e da escolha de colocar a notação V_1 para denotar que o vértice do grafo paralelo que conecta as arestas A_i e A_j está associado pelo vértice V_1 (isto é, está na vizinhança do vértice V_1). Para tal, é suficiente notar que o vértice do grafo paralelo que conecta as arestas consecutivas A_i e A_j , por construção, está na vizinhança de algum vértice do grafo original. Com tais escolhas, o que estamos fazendo é fornecer um rótulo para o vértice do grafo original em questão.

Observação 7. Uma palavra \mathscr{W}_g representa um emparelhamento K -regular se, e somente se, o conjunto de vértices de $\gamma(\mathscr{G})$ associados por V , de \mathscr{G} , tem exatamente K elementos, para cada V em \mathscr{G} .

Para verificar tal afirmação, é suficiente notar que, pela definição do grafo paralelo, o número de vértices de $\gamma(\mathscr{G})$ que estão na vizinhança de um vértice V de \mathscr{G} coincide com $deg(V)$.

Exemplo 1. Considere a seguinte palavra:

$$\mathscr{W}_2 = A_1 E_1 C_1 F_1 D_1 E_1^{-1} C_1^{-1} B_1 A_1^{-1} F_1^{-1} B_1^{-1} D_1^{-1}$$

então, aplicando o algoritmo, a chuva de vértices de \mathscr{W}_2 é dada por:

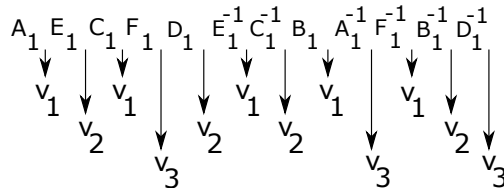


Figura 8: Chuva de vértices para \mathscr{W}_2 .

Para chegar em tal resultado operamos os seguintes passos:

1. Dada a palavra \mathscr{W}_2 , escolhemos o par consecutivo A_1E_1 e entre este par colocamos a seta de tamanho uma unidade, com a notação V_1 .
2. Como a seta do item anterior aparece imediatamente depois de A_1 e imediatamente antes de E_1 , **colocamos uma cópia da seta imediatamente antes de A_1^{-1} e imediatamente depois de E_1^{-1} .**
3. Em decorrência direta do passo 2, a seta aparece também depois de B_1 e antes de C_1^{-1} . Devido a tais fatos, **colocamos uma cópia da seta imediatamente antes de B_1^{-1} e imediatamente depois de C_1**
4. Em decorrência do passo 3, a seta aparece também depois de F_1^{-1} e imediatamente antes de F_1 . Portanto, a regra dada pela Observação 3 não pode mais ser aplicada. Portanto, **escolhemos as sílabas consecutivas E_1C_1 , que ainda não foram usadas no algoritmo, e colocamos entre elas uma seta de duas unidades de comprimento, indexada com a notação V_2 .**
5. Como a nova seta aparece imediatamente depois de E_1 e imediatamente antes de C_1 , **colocamos uma cópia da nova seta imediatamente antes de E_1^{-1} e imediatamente depois de C_1^{-1} .**
6. Em decorrência do item 5, a nova aresta aparece também, imediatamente depois de D_1 e imediatamente antes de B_1 , devido a tais fatos, **colocamos uma cópia da nova aresta imediatamente antes de D_1^{-1} e imediatamente depois de B_1^{-1}** (Posições coincidentes).
7. Em decorrência do passo 6 não é possível aplicar a regra a regra novamente, portanto **escolhemos as sílabas consecutivas F_1D_1 , que ainda não colocamos seta entre elas no algoritmo e agora colocamos uma seta de comprimento de três unidades e notação V_3 entre elas.**
8. Como a seta de índice V_3 aparece imediatamente depois de F_1 e imediatamente antes de D_1 , **colocamos uma cópia dessa seta imediatamente antes de F_1^{-1} e imediatamente depois de D_1^{-1} .** Completando assim a chuva de vértices.

Além disso, note que o grafo associado à palavra dada possui três vértices de modo que $\deg(V_1) = 5$, $\deg(V_2) = 4$ e $\deg(V_3) = 3$.

4 GRAFO PARALELO E EXTENSÕES DE GRAFOS

Seja \mathscr{G} um grafo mergulhado em M_g , que constitui um emparelhamento para a mesma. A Proposição 2.4 garante que qualquer extensão de um emparelhamento, feito sobre uma superfície fechada e orientada, é também um emparelhamento. Uma vez que é possível construir o grafo

paralelo de um emparelhamento, é natural pensar: qual a ação da extensão de um grafo na palavra associada a ele? É possível conceber as extensões usando apenas a palavra?

A resposta para a segunda questão é sim. O esclarecimento para esta afirmação está presente na Observação 8. A primeira questão será respondida ao decorrer desta seção.

Se o grafo \mathcal{G} possui V vértices e A arestas, está associado ao diagrama de emparelhamento \mathcal{D} , então estender o grafo a um vértice, sobre a superfície M_g equivale a adicionar duas arestas ao diagrama \mathcal{D} e portanto adicionar duas sílabas à palavra associada ao grafo \mathcal{G} , via grafo paralelo (vide Figura 9).

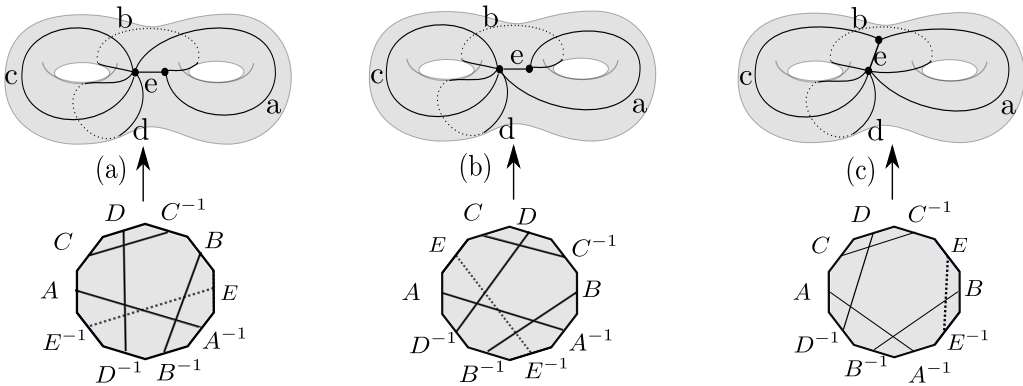


Figura 9: Extensão de grafos sobre o Bitoro e efeito sobre a palavra.

A Figura 9 mostra extensões, sobre o Bitoro, do grafo que contém um vértice e quatro arestas (o chamaremos de I_4) e seus respectivos diagramas. Em todos diagramas os lados dos polígonos (E e E^{-1}) conectados por um segmento de reta pontilhado são os lados acrescentados no diagrama de emparelhamento associado a I_4 , em decorrência das extensões.

Note que caso não sejam feitas algumas restrições o processo de extensão de grafos pode se tornar infinito. Portanto, a restrição que será feita é: $deg(v) \geq 3$, para todo vértice v em um grafo obtido como extensão de \mathcal{G} . Assim, determinar as extensões de um grafo a partir de sua palavra constitui um problema finito de combinação.

A fim de determinar precisamente o que ocorre com a palavra ao estender um vértice do grafo, basta excluir os casos em que a extensão gera um vértice de grau 1 e 2.

Se a extensão de um vértice gera a aresta i_j , conectada a um novo vértice com grau 1, então, a menos de equivalência, a palavra associada a esse novo grafo é dada por:

$$\mathcal{W}_g = \alpha I_j I_j^{-1} \beta.$$

Sendo α e β blocos da palavra. Veja a Figura 10A.

Se a extensão de um vértice gera uma aresta i_j , conectada a um novo vértice com grau 2, digamos que este esteja conectado também à aresta i_m . Então, a menos de equivalência, a palavra associada a este novo grafo é:

$$\mathscr{W}_g = \alpha I_j I_m \beta I_m^{-1} I_j^{-1} \Gamma$$

onde α , β e Γ são blocos da palavra. Veja a Figura 10B.

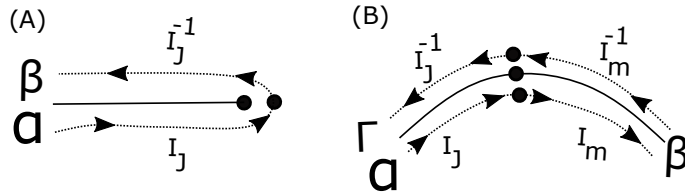


Figura 10: Visão local (A) $deg(v) = 1$; (B) $deg(v) = 2$.

A exclusão desses casos torna natural a seguinte proposição.

Proposição 4.5. *Seja \mathscr{G} um emparelhamento para M_g tal que $deg(v) \geq 3$, para todo vértice. Se K é a palavra associada a \mathscr{G} , então estender \mathscr{G} , sob as restrições discutidas, é equivalente a adicionar sílabas aos pares em \mathscr{W}_g de modo que nenhuma das seguintes situações ocorra:*

- (i) $\mathscr{W}_g = \alpha I_j I_j^{-1} \beta$;
- (ii) $\mathscr{W}_g = \alpha I_j I_m \beta I_m^{-1} I_j^{-1} \Gamma$.

Observação 8. Uma vez que agora já sabemos que ao estendermos um grafo sobre uma superfície temos como efeito no diagrama de emparelhamento o acréscimo de dois lados da forma A_i e A_i^{-1} (veja o comentário sobre a Figura 9), chegamos a conclusão que para estender um grafo a partir da palavra, basta acrescentar duas sílabas do tipo A_i e A_i^{-1} na palavra. Mas vale notar que essa adição de sílabas não pode ser totalmente arbitrária e nesse sentido a Proposição 4.5 traz as adições proibidas, ou seja, adições de sílabas que geram extensões que não estamos interessados. O motivo do não interesse nessas extensões é que a ambas adições geram extensões não úteis, topologicamente falando, pois palavra obtida pela primeira adição é equivalente, pela aplicação da transformação T_2 , à palavra inicial (sem a adição). A segunda forma de adição gera apenas uma subdivisão do garfo original.

Exemplo 2. Considere a palavra $\mathscr{W}_2 = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}$, associada a um mergulho de I_4 sobre o Bitoro. As seguintes palavras estão associadas a extensões 5-regulares de I_4 , onde os pares adicionados estão grifados.

1. $\mathscr{W}_2^1 = A_1 B_1 \underline{E_1} A_1^{-1} B_1^{-1} C_1 D_1 \underline{E_1^{-1}} C_1^{-1} D_1^{-1}$
2. $\mathscr{W}_2^2 = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \underline{E_1} C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \underline{E_1^{-1}}$

Considere a palavra $\mathcal{L}_2 = A_1 C_1 D_1 C_1^{-1} B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} D_1^{-1}$, associada a outro mergulho do grafo I_4 , sobre o Bitoro. As seguintes palavras estão associadas a extensões 5-regulares de I_4 , onde os pares associados estão grifados.

$$3. \mathcal{L}_2^1 = A_1 \underline{E_1} C_1 \underline{E_1^{-1}} D_1 C_1^{-1} B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} D_1^{-1}$$

$$4. \mathcal{L}_2^2 = A_1 C_1 D_1 \underline{E_1} C_1^{-1} B_1 \underline{E_1^{-1}} A_1^{-1} B_1^{-1} D_1^{-1}$$

Construindo todas as extensões possíveis de \mathcal{W}_2 e \mathcal{L}_2 e aplicando o algoritmo da chuva de vértices, pode ser mostrado que as extensões \mathcal{W}_2^1 e \mathcal{W}_2^2 de \mathcal{W}_2 e \mathcal{L}_2^1 e \mathcal{L}_2^2 de \mathcal{L}_2 , são as únicas que representam emparelhamentos 5-regulares, sobre o Bitoro, a menos de equivalências.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conceitos de curva paralela e grafo paralelo nos fornecem uma forma alternativa de saber se um dado grafo, sobre uma superfície fechada e orientada, constitui ou não um grafo de emparelhamento para essa superfície. Além disso, a associação de palavras aos grafos nos permite verificar, alternativamente aos diagramas de emparelhamento, se dois emparelhamentos são ou não equivalentes. No decorrer deste texto também foi mostrado que as palavras associadas aos emparelhamentos carregam consigo todas as informações referentes aos emparelhamentos. Tornando possível o estudo dos emparelhamentos, retirando o apelo geométrico. Além disso, a formação dessas palavras pode facilitar a automação do processo de determinação dos emparelhamentos de uma dada superfície.

Estes grafos tem importância por estarem ligados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$ (ver [11]), que por sua vez estão relacionadas a construção de códigos topológicos quânticos, que são uma subclasse dos códigos estabilizadores. Para detalhes veja [4], onde os autores construíram famílias de códigos topológicos quânticos derivados de tesselações auto-duais, ortogonais e densas, conseguindo assim boas distâncias mínimas e veja [1] onde foi proposto um procedimento de construção de códigos topológicos quânticos de correção de erros sobre superfícies com gênero $g \geq 2$.

Em termos de trabalhos futuros, pretendemos, em um primeiro momento, construir um programa que determine e separe em famílias, os emparelhamentos provenientes de extensões dos grafos canônicos e em um segundo momento, estender o conceito de emparelhamento para as superfícies não orientadas, via grafo paralelo. O que pode ter implicações na construção de novas estruturas de dados computacionais para representar superfícies do tipo trabalhado.

ABSTRACT. In this work we propose a new technique to verify if a graph corresponds to some edge pairing. For that, we propose the use of what we call parallel graph; a graph where each edge is divided into two oriented half-edges. This graph associates a word with a given pairing, so that operations on the words can be used to determine the equivalence between two pairings. The relationship between the word and the vertices of the pairing is determined by a proposed algorithm called vertex rain. Finally, we determine the relationship between the vertex length and the associated word.

Keywords: geometry and topology, scientific computing, graphs, edge pairing.

REFERÊNCIAS

- [1] C. Albuquerque, R. Palazzo Jr & E. Silva. Topological quantum codes on compact surfaces with genus $g \geq 2$. *Journal of mathematical physics*, **50**(2) (2009), 023513.
- [2] C. Bavard. Disques extrémaux et surfaces modulaire. In “Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques”, volume 5 (1996), p. 191–202.
- [3] R.G. Cavalcante, H. Lazari, J. de Deus Lima & R. Palazzo Jr. A New Approach to the Design of Digital Communication. In “Algebraic Coding Theory and Information Theory: DIMACS Workshop, Algebraic Coding Theory and Information Theory, December 15-18, 2003, Rutgers University, Piscataway, New Jersey”, volume 68. American Mathematical Soc. (2005), p. 145.
- [4] C.D. De Albuquerque, R. Palazzo & E.B. Da Silva. Families of classes of topological quantum codes from tessellations $\{4i+ 2, 2i+ 1\}$, $\{4i, 4i\}$, $\{8i-4, 4\}$ and $\{12i-6, 3\}$. *Quantum Information & Computation*, **14**(15-16) (2014), 1424–1440.
- [5] C.M. de Jesus & P.D. Romero. Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for Regular Polygons. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **51**(2) (2020), 527–541.
- [6] M. Faria, C.M. de Jesus & P. Sanchez. Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **47**(4) (2016), 1085–1095.
- [7] M. Faria & R. Palazzo Jr. Emparelhamentos Generalizados Associados à Tesselação $\{12g- 6, 3\}$. *TEMA-Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **11**(1) (2010), 59–67.
- [8] P.A. Firby & C.F. Gardiner. “Surface topology”. Elsevier (2001).
- [9] T. Jørgensen & M. Näätänen. Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **33**(4) (1982), 451–461.
- [10] L. Mosher. A user’s guide to the mapping class group: once punctured surfaces. *Proc. of a Comput. Sci*, **25** (1996), 101–174.
- [11] G. Nakamura. Generic fundamental polygons for surfaces of genus three. *Kodai Mathematical Journal*, **27**(1) (2004), 88–104.
- [12] R. Paris. Modified half-edge data structure and its applications to 3D mesh generation for complex tube networks. (2013).

