ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

ARTÍCULO

Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas evidenciado en la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática

Mathematics teacher's specialized knowledge evidenced in the selection and use of examples in teaching the quadratic equation

Nicolás **Sánchez Acevedo**[*]

ORCID iD 0000-0002-0665-6102

Leticia **Sosa** Guerrero[**]

ORCID iD 0000-0002-4905-6684

Luis Carlos **Contreras** González[***]

ORCID iD 0000-0002-0044-2365

Resumen

El uso de ejemplos por parte de los profesores es un indicativo del conocimiento didáctico del contenido (PCK) y, la amalgama entre el conocimiento matemático y el didáctico para la enseñanza es un reflejo de la comprensión de la forma en que se enseñan los contenidos matemáticos y del aprendizaje de los estudiantes. En este trabajo nos proponemos describir el conocimiento especializado movilizado y las posibles relaciones a partir del uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática. La investigación es un estudio de caso instrumental bajo un paradigma interpretativo. El conocimiento especializado se examina a la luz del modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* centrándonos en los ejemplos utilizados por la profesora de acuerdo con categorías derivadas de la literatura. Los hallazgos de la investigación, de acuerdo con los ejemplos usados, permiten establecer relaciones entre los diferentes conocimientos movilizados por la profesora. En particular, las evidencias sugieren que el PCK de la profesora influye en el tipo de ejemplos usados y el conocimiento matemático (MK) puesto en juego en la enseñanza de la ecuación cuadrática.

Palabras clave: Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas. Ecuación cuadrática. Uso de ejemplos.

[*] Licenciado en Estadística por la Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la educación, Chile (UPLA) y magíster en educación matemática por la Universidad de la Frontera, Chile (UFRO). Dr(c) en didácticas específicas orientación en Matemáticas (UV-España). Docente investigador asociado, Universidad Central de Chile (UCEN), Santiago, Chile. E-mail: nicolas.sanchez@ucentral.cl
[**] Licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Huelva, España (UHU), Docente Investigador Titular, Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), Zacatecas, México. E-mail: lsosa@uaz.edu.mx
[***] Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla España(US), Doctor en Psicopedagogía por la Universidad de Huelva, España (UHU), Catedrático de Universidad, Centro de Investigación COIDESO, Universidad de Huelva, España (UHU). E-mail: lcarlos@uhu.es

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

Estudio de caso.

Abstract

Teachers' use of examples is indicative of pedagogical content knowledge (PCK), and the amalgamation of mathematical and pedagogical knowledge for teaching reflects the understanding of how mathematical content is taught and how students learn. In this work, we propose to describe the specialized knowledge mobilized and the possible relationships from the use of examples in the teaching of the quadratic equation. The research is an instrumental case study under an interpretive paradigm. Specialized knowledge is examined in light of the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge model, focusing on the examples used by the teacher according to categories derived from the literature. The research findings, in relation to the examples used, allowed us to establish relationships between the different knowledge mobilized by the teacher. In particular, the evidence suggests that the teacher's PCK influences the type of examples used and the mathematical knowledge (MK) involved in teaching the quadratic equation.

Keywords: Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Quadratic equation. Use of examples. Case study.

1 Introducción

Los ejemplos son un aspecto determinante en la enseñanza de las Matemáticas y en las aulas son usados habitualmente para enseñar, practicar, reforzar conceptos y procedimientos (Snider, 2016). Diversos modelos de conocimiento han considerado los ejemplos (Shulman, 1986; Ball; Thames; Phelps, 2008; Rowland; Huckstep; Thwaites, 2003) como una parte integral del pensamiento matemático en la enseñanza y aprendizaje que los profesores usan para ayudar a los estudiantes a construir significados, revelándose que han jugado un rol central en el aprendizaje de las matemáticas (Muir, 2007). Asimismo, los ejemplos son usados por los profesores para explicar y facilitar la comprensión matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje y son ellos quienes deben tener una comprensión profunda del contenido al interactuar y explicar los conceptos y principios de las matemáticas (Shulman, 1987).

El uso de ejemplos requiere de los profesores de un conocimiento del contenido y de un conocimiento didáctico del contenido. Este último, referido a la base de conocimiento del profesor que le permite transformar las matemáticas, considerando las necesidades de aprendizaje, adaptándose a las capacidades que presentan los estudiantes (Zaslavsky *et al*., 2012). La base de conocimiento de un profesor a partir del uso de ejemplos hace que estos sean herramientas didácticas para desarrollar formas de comprensión y pensamiento.

Para la enseñanza de las matemáticas, no basta con la presentación de ejemplos de manera aleatoria, sino que es necesario que los profesores conozcan qué ejemplos pueden ser mejores que otros y, en qué momento es adecuado usarlos (Rowland; Huckstep; Thwaites, 2003; Figueiredo, 2010; Figueiredo; Blanco; Contreras, 2006). Asimismo, es relevante tener conciencia de la naturaleza de los ejemplos usados para la enseñanza de acuerdo con su función,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

objetivo o intencionalidad en determinados momentos de la clase (Figueiredo; Blanco; Contreras, 2007). La conciencia sobre el uso de determinados ejemplos puede revelar aspectos que son críticos en los esquemas de los profesores y en los objetivos que pretenden.

La selección y uso de ejemplos en una clase sean estos planificados o espontáneos, no es una tarea simple (Zaslavsky; Zodik, 2007) y menos aún desprovista de conocimiento. De acuerdo con Figueiredo, Contreras y Blanco (2012), se ejemplifica de mejor manera algún contenido, concepto o procedimiento, mientras más conocimiento se tenga sobre este, es decir, acerca de las formas de enseñarlo, representarlo, usarlo y/o aplicarlo. Existe una relación entre los conocimientos que necesita un profesor para construir y usar ejemplos adecuados y el conocimiento que se moviliza a partir del empleo de estos ejemplos en el aula (Avcu, 2014).

Diversas investigaciones han aportado evidencias en torno a la relación que podría existir entre la base de conocimiento de un profesor y el uso de ejemplos para la enseñanza, pero aún son escasas (Chick; Harris, 2007; Ng; Dindyal, 2015). Entre estas investigaciones encontramos aquellas que han establecido relaciones entre el conocimiento del profesor y las características en la selección y uso de ejemplos (Aineamani, 2021; Ng; Dindyal, 2015); las que se han orientado, específicamente, en el uso de ejemplos y el conocimiento movilizado por los profesores (Muir, 2007; Suffian; Abdul-Rahman, 2010) y las investigaciones que han aportado sobre la calidad de los ejemplos para la enseñanza en contexto particulares (Avcu, 2014).

Varios de los trabajos de investigación en el contexto del uso de ejemplos han mostrado la influencia que tiene el conocimiento del contenido pedagógico en el uso de ejemplos y la capacidad para construir ejemplos efectivos (Chick, 2009; Rowland; Huckstep; Thwaites, 2003). Pero estas investigaciones siguen siendo escasas, ya que otros trabajos, en contextos simulados, han evidenciado que los profesores siguen experimentando problemas cuando seleccionan y usan ejemplos para la enseñanza (Adler; Pournara, 2020; Zodik; Zaslavsky, 2008).

La articulación entre el conocimiento del profesor de Matemáticas y una adecuada selección y uso de ejemplos para la enseñanza no es una tarea trivial. Por el contrario, este conocimiento permite que las ideas matemáticas que se desean transmitir sean claras en relación con el propósito planteado (Ball; Thames; Phelps, 2008). Sin embargo, aunque la investigación ha dado señales de prestar atención y ha establecido posibles relaciones entre los ejemplos utilizados y el conocimiento del profesor en la enseñanza de contenidos y/o conceptos matemáticos, es aún limitada con respecto a la relación entre el uso de ejemplos y el conocimiento especializado del profesor; lo que plantea la necesidad de investigar en esta área.

En este trabajo, establecemos la diferencia entre el conocimiento que subyace a la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

selección de ejemplos para la enseñanza y el *conocimiento movilizado a partir del uso de ejemplos*. La *selección de ejemplos* requiere que el profesor sea consciente de la necesidad de poder reconocer que un ejemplo es o puede ser mejor que otro, atendiendo a los principios generales por encima de los detalles específicos que permiten aclarar y resolver sutilezas matemáticas (Bills *et al*., 2006; Rowland, 2008). En cambio, *el conocimiento del profesor sobre el uso de ejemplos* puede darse atendiendo decisiones improvisadas que condicionan su uso (Bills *et al*., 2006) y, dependiendo de quién está más involucrado en el trabajo con el ejemplo, el énfasis puede ser procedimental o conceptual (Chick, 2009).

Considerando los antecedentes presentados, en este trabajo exponemos los resultados de una investigación que busca describir el conocimiento especializado de una profesora de Matemáticas a partir de su uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática, con el propósito de contribuir a la comprensión de posibles relaciones entre el empleo de ejemplos y el conocimiento especializado movilizado.

2 Referentes Teóricos

Este trabajo está fundamentado en dos pilares relacionados entre sí, en primer lugar, el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) y, en segundo lugar, la selección y uso de ejemplos de la ecuación cuadrática. Iniciamos, describiendo el primero de estos y luego, cómo el segundo de estos pilares se complementa con el conocimiento especializado.

2.1 Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (Carrillo *et al.,* 2014; Carrillo *et al.,* 2018) considera la especialización como eje del conocimiento del profesor en todos sus dominios, subdominios y categorías. No hace referencia a ninguna otra ciencia o profesión, considerando estos conocimientos profesionales como los que el profesor necesita y utiliza debido a la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas (Liñan-García *et al.,* 2021). De acuerdo con Scheiner *et al.* (2017), la especialización del conocimiento es vista como un todo orgánico y holístico que emerge en una estructura dinámica, situada y adaptada al contexto en el cual el profesor se desenvuelve.

El MTSK es una herramienta teórica y analítica que considera el conocimiento especializado del profesor en su conjunto, dado que la especificidad queda delimitada por el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

uso de la matemática como disciplina científica, y como tal, relacionada con la enseñanza y el aprendizaje del contenido, en contexto escolar (Carrillo *et al.*, 2018)

El MTSK se compone de tres dominios de conocimiento, el dominio del conocimiento matemático (MK), el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) y el dominio de las creencias del profesor de matemáticas, tanto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como de la matemática misma, creencias que permean la forma en que se moviliza este conocimiento (Figura 1).

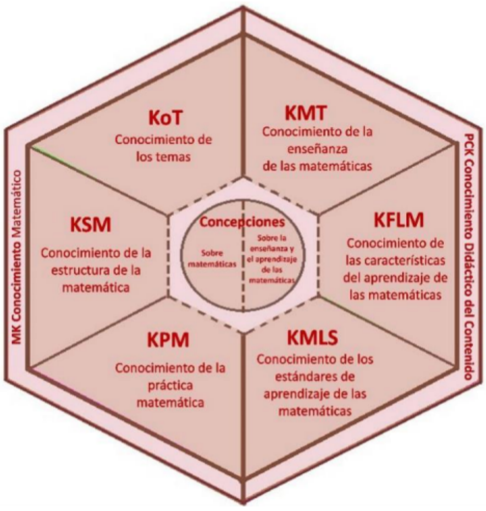

Figura 1 - Modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas
Fuente: Carrillo *et al.* (2018).

El dominio del conocimiento matemático (MK) comprende el conocimiento profundo de la red sistémica y estructurada del conocimiento que es inherente a la disciplina matemática enseñada y se compone de tres subdominios: el conocimiento de los temas (KoT[1]), el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM[2]) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM[3]).

El KoT incluye el conocimiento de la disciplina matemática en sí misma, conteniendo el conocimiento sobre conceptos, propiedades, procedimientos, proposiciones y/o algoritmos que moviliza el profesor de matemáticas. Sus categorías son: procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación, y fenomenología y aplicaciones.

El KSM es el conocimiento de las inter-relaciones que el profesor establece entre diferentes contenidos matemáticos (Montes *et al.,* 2013). En el KSM se reconocen dos aspectos que no son excluyentes entre sí: la temporalidad, como visión secuenciadora que genera conexiones de complejización y simplificación y la delimitación de objetos matemáticos que

[1] De sus siglas en inglés *Knowledge of Topics*
[2] De sus siglas en inglés *Knowledge of the Structure of Mathematics*
[3] De sus siglas en inglés *Knowledge of Practices in Mathematics*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

genera conexiones interconceptuales (Carrillo *et al*., 2014). Sus categorías son: conexiones de complejización; conexiones de simplificación; conexiones auxiliares y conexiones transversales.

El KPM contiene el conocimiento sintáctico, es decir, las formas de proceder y validar en matemáticas. Aquí se profundiza en cómo se explora y se genera conocimiento matemático, la forma de establecer relaciones, correspondencias y equivalencias con las formas de argumentar este proceder matemático. En un comienzo, este subdominio incluía dos categorías de conocimiento relacionadas con las prácticas matemáticas, (i) las relacionadas con las matemáticas en general, y (ii) las relacionadas con un tema específico (Carrillo *et al.,* 2014). Posteriormente, en Carrillo *et al.* (2018) se proponen indicadores de conocimiento en este subdominio: (i) jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, (ii) formas de validación y demostración, (iii) papel de los símbolos y el lenguaje formal, (iv) procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, (v) prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación, algoritmización etc.) y (vi) condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

El dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) se considera como aquel conocimiento que es propio y particular de la labor de enseñanza y es una parte de lo que el profesor requiere para su labor docente y es el complemento necesario al MK (Escudero; Carrillo, 2014). Está compuesto por tres subdominios: conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM); conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

El *KMT* se refiere al conocimiento del contenido de las matemáticas como objeto de enseñanza, es decir, el conocimiento del profesor que se relaciona con las estrategias de enseñanza y su potencialidad, selección y uso de ejemplos, el papel de los diferentes recursos materiales y virtuales para enseñanza un contenido matemático. Sus categorías son: teorías de enseñanza (personales o institucionales), recursos materiales y virtuales y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

El KFLM abarca el conocimiento sobre aspectos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes, aspectos inherentes a un contenido matemático o a la matemática en general, como objeto de aprendizaje, pero, también incluye el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje que emanan de cómo interactúa el estudiante con el contenido matemático (Escudero-Ávila; Climent; Vasco, 2016). Sus categorías son: teorías sobre aprendizaje (personales o institucionales), fortalezas y dificultades, formas de interacción con el contenido

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

matemático e intereses y expectativas (Carrillo *et al.,* 2014).

El KMLS incluye los conocimientos en relación con lo que debería aprender un estudiante en algún momento particular de su formación escolar. Considera los aspectos de índole curricular y/o cualquier otro referente nacional o internacional que desarrolle investigaciones en esta línea. Aquí se incluyen tres categorías: expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores o posteriores (Escudero; Carrillo, 2014).

El modelo MTSK considera, como tercer dominio de conocimiento, las concepciones sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje y se sitúan en el centro del modelo, dado que estas permean, tanto el conocimiento matemático como el didáctico del profesor de Matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este dominio no es objeto de estudio en esta investigación.

De acuerdo con lo planteado por Carrillo *et al*. (2014), la especialización del conocimiento del profesor se apoya en la integración de las relaciones entre los conocimientos de los diferentes subdominios. Esta integración deriva de su práctica docente, la que resulta de la interacción entre diferentes formas de conocer el contenido matemático y las formas de conocer este contenido para su enseñanza (Carrillo *et al.,* 2014).

Por ello, la elección, consciente o inconsciente de ejemplos, está relacionada con el contenido matemático y los objetivos de enseñanza que se pretenden movilizar (Watson; Mason, 2005); además, el conocimiento en la selección de ejemplos promueve la comprensión y da sentido a los objetos matemáticos y los aspectos críticos que se intenta visibilizar (Watson; Mason, 2002).

Aunque el uso de ejemplos es explícito en MTSK en el subdominio del *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (estrategias, técnicas, tareas y/o ejemplos), dependiendo de la intencionalidad de enseñanza (Liñan-García *et al.,* 2021), la práctica de ejemplificación es transversal en todo el modelo. Cuando se ejemplifica, se busca describir alguna situación para presentar un objeto particular en el que se pretende centrar la atención del alumno (Watson; Mason, 2005); así, la selección y uso de ejemplos adecuados puede dar cuenta del *conocimiento de los temas* (KoT) que moviliza el profesor, por ejemplo, al mostrar la definición de la ecuación cuadrática, como también, del *conocimiento de la estructura de las matemáticas* (KSM) cuando el profesor usa ejemplos de ecuaciones cuadráticas como auxiliar para determinar las raíces (o la no existencia de estas) de una función es una conexión auxiliar (interconceptual) entre ecuaciones y funciones.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

2.2 Los ejemplos en la enseñanza de las Matemáticas

El uso de ejemplos en la enseñanza de las matemáticas permite identificar el conocimiento movilizado en la práctica de enseñar y es parte esencial de la integración entre el conocimiento matemático y el conocimiento especializado (Rissland-Michener, 1978). Estos, pueden mirarse como un aspecto que permite generalizar un concepto, un teorema, una definición o un procedimiento (Zodik; Zaslavsky, 2008); ayudan a introducir o enseñar un contenido o tema matemático cuyas características están determinadas por los objetos que se pretenden promover y el conocimiento del profesor.

El término *ejemplo* tiene varias acepciones que han sido discutidas en diversos estudios (Goldenberg; Mason, 2008; Zazkis; Leikin, 2008; Zaslavsky, 2019). En esta investigación, seguimos la propuesta de Watson y Mason (2002) quienes definen *ejemplo* como un caso particular con el que es posible ilustrar conceptos o principios, definir, argumentar, razonar, mostrar la variación y el cambio, generalizar o demostrar una particularidad de una entidad matemática. De acuerdo con esto, $f(x) = ax^2 + bx + c; a, b\ y\ c\ \in \mathbb{R}; a \neq 0$ *es un ejemplo de* definición de función cuadrática; resolver la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$ usando factorización $(x + 3)(x + 2) = 0$, *es un ejemplo de* procedimiento (o técnica) para resolver ecuaciones cuadráticas; dada la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$, determinar la concavidad de la parábola, *es un ejemplo de* que permite identificar la concavidad positiva de la parábola, de acuerdo con el parámetro $a = 3 > 0$.

La ejemplificación (Zodik; Zaslavsky, 2008) es usada para “describir cualquier situación en la que se da algo específico y que se desea representar sobre una clase más general de la cual se debe llamar la atención de los alumnos” (Watson; Mason, 2005 p. 4).

En este sentido, en la literatura se han encontrado diversas clasificaciones de ejemplos que dependen de las consideraciones que requiere el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Alcock, 2004; Karaağaç, 2005; Rowland, 2008; Tsamir; Tirosh; Levenson, 2008). Una de estas clasificaciones se relaciona con los ejemplos para la enseñanza, que pueden ser de carácter *Inductivo*, que permiten mostrar procedimientos abstractos y son coadyuvantes en la abstracción por parte de los estudiantes, y los *No inductivos* (ejercicios), que permiten ilustrar un procedimiento o son usados para que el estudiante practique (Rowland; Huckstep; Thwaites, 2003). También, encontramos otras categorizaciones que varían dependiendo del objetivo matemático o de enseñanza (Rissland-Michener, 1978; Bills *et al*., 2006; Zodik; Zaslavsky, 2008; Figueiredo; Blanco; Contreras, 2006).

En el caso del sistema de categorías propuesto por Figueiredo, Blanco y Contreras

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

(2006), la selección de ejemplos es considerada desde una perspectiva global que se ajusta a cada momento del proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta clasificación, los ejemplos se organizan (y denominan) en función de la acción que se realiza: los de *definición/presentación* son los primeros ejemplos que se presentan a los alumnos, inmediatamente después de definir un concepto, pero, también pueden presentarse primero los ejemplos y, luego, la definición; los de *abordaje inicial autónomo* son los primeros ejercicios típicos de aplicación del concepto y pretenden promover el surgimiento de las primeras dudas – mayor autonomía al alumno; los de *características* surgen cuando el alumno emprende la tarea de profundizar en el concepto, en sus diversas representaciones y descubrir sus peculiaridades, se dan como explicación a las dudas de los alumnos o como una forma de resolver las situaciones de confusión; los de *aplicaciones internas* aparecen en las fases de mayor profundización en el concepto, estas aplicaciones pueden incluir contenidos o conceptos enseñados anteriormente o relacionarse con otros posteriores; los de *aplicaciones* externas son de aplicación a la vida real y a otras ciencias.

En el Cuadro 1 ilustramos el sistema de categorización de los ejemplos (Figueiredo; Blanco; Contreras, 2007) empleado en esta investigación, a partir del cual, posteriormente, se organiza el análisis de los resultados.

Ejemplo de Definición/presentación. Encuentre las soluciones de la ecuación cuadrática $\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$. Es un ejemplo de ecuación cuadrática incompleta $\boldsymbol{b = 0}$ que se presenta a los estudiantes para mostrar la técnica de factorización y calcular las soluciones de la ecuación. En este caso, el ejemplo no tiene más función que la de presentar la técnica de factorización.
Ejemplo de Abordaje inicial autónomo. Determine la ecuación cuadrática, sabiendo que sus soluciones son 5 y -8. Es un ejemplo entregado en el contexto del contenido de las propiedades de adición y multiplicación de soluciones de una ecuación. Su objetivo no es presentar un concepto, propiedad o procedimiento, sino que, para ser resuelto se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

debe usar la propiedad de $\mathbf{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$ y $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$, generando las primeras dudas en los estudiantes.
Ejemplo de clarificación/características. Resolver la ecuación cuadrática usando la fórmula general $\boldsymbol{3x^2 - 2x + 1 = 0}$. Es un ejemplo de ecuación cuadrática estándar para calcular las soluciones. En este caso, el resolver la ecuación usando la fórmula, lleva a obtener un valor negativo en la cantidad subradical de la expresión $\mathbf{\frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}}$. Al ser un ejemplo que extiende los tipos de soluciones reales, permite profundizar en las características de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas.
Ejemplo de aplicaciones internas. Determine el valor de k en la ecuación $\boldsymbol{x^2 - 3x + 2k = 0}$ *para que tenga soluciones reales e iguales.* Este es un ejemplo de ecuación cuadrática estándar y requiere del estudiante, además de identificar los coeficientes de una ecuación cuadrática, resolver ecuaciones de primer grado, evaluar expresiones algebraicas y conocer la característica del discriminante cuando las soluciones son reales e iguales. En este ejemplo**,** se debe usar el discriminante para verificar la condición de soluciones reales e iguales $\Delta = \mathbf{0}$ y, posteriormente, realizar la evaluación de $\mathbf{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2k = 0}$.; razón por la que es un ejemplo de mayor profundización del concepto.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

Ejemplo de aplicaciones externas. Un cuadro rectangular de 30 m^2 de superficie tiene un metro más largo que de alto. Si $\boldsymbol{x}$ *es la medida del alto, determine la ecuación que permite calcular las dimensiones del cuadro.* Es un ejemplo que permite a los estudiantes poner en juego conocimientos como plantear un esquema gráfico, plantear la situación de manera analítica y, posteriormente, responder a la pregunta. Además de las relaciones que deben establecer, es necesario que los estudiantes recuerden conceptos como medida y longitud (para este caso), pues una solución negativa de la ecuación cuadrática no tiene sentido en el contexto de la geometría (dimensiones de ancho y largo).

Cuadro 1 - Marco para la categorización de los ejemplos
Fuente: elaborado por el autor.

3 Metodología

El estudio que presentamos es parte de una investigación más amplia, posicionada desde el paradigma interpretativo que - de acuerdo con Denzin y Lincoln (2003) - está guiado por creencias y elementos del contexto que condicionan la forma en cómo deben ser entendidos y estudiados. El diseño de investigación es un estudio de caso que nos permite particularizar en la complejidad de un profesor singular y comprender sus acciones; es decir - en el desarrollo de sus clases de manera profunda (Durán, 2012; Stake, 2007) - y es de tipo instrumental, puesto que el interés es profundizar en la descripción del conocimiento especializado de una profesora de Matemáticas, a partir del uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática, identificando relaciones entre los elementos del conocimiento movilizado.

3.1 Selección del caso

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

La profesora, a quien llamamos Jenny, posee el título de Ingeniero Civil y el grado académico de Licenciada Ciencias de la Ingeniería. Además, es Profesora de Matemáticas en Educación Media y participa activamente en un programa de enseñanza para profesionales llamado Enseña Chile, una red de líderes que promueven una educación de calidad en el sistema educativo. Jenny tenía más de cinco años de experiencia como docente en Educación Secundaria y Superior al momento de realizar esta investigación. Fue seleccionada como caso de estudio ya que concentra características de buen informante, asequible, comprometida con la enseñanza de las Matemáticas y con el apoyo a esta investigación (Lougrhan; Mulhall; Berry, 2008); la elección de Jenny atendió al criterio de conveniencia señalado por Creswell (2014), ser de fácil acceso y tener características profesionales que permiten ampliar la investigación que, en nuestro caso, es el conocimiento especializado movilizado a partir del uso de ejemplos y posibles relaciones.

3.2 Recogida de datos

En nuestra investigación, la recogida de los datos se realizó con el método de observación no participante (Miles; Huberman, 1994). Se grabaron en video las siete clases dedicadas a la enseñanza de la ecuación cuadrática (Cuadro 2) y fueron complementadas con notas de campo. Los contenidos que se presentan en el Cuadro 2 cubren el tema de ecuación cuadrática en 3° grado de secundaria.

N°	**Contenidos de clases**
1	Factorización y coeficientes de la ecuación cuadrática.
2	Coeficientes y resolución de ecuaciones cuadráticas.
3-4	Uso de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas.
5	Discriminante de una ecuación cuadrática.
6	Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática.
7	Problemas aplicados de ecuación cuadrática.

Cuadro 2 – Contenidos asociados a las clases de ecuación cuadrática
Fuente: elaborado por el autor.

3.3 Análisis de los datos

Para el análisis de los datos, hemos tomado en cuenta los tipos de ejemplos[4] (Figueiredo; Blanco; Contreras, 2007) utilizados por Jenny considerados como casos ejemplares (Bryman, 2004) de acuerdo con el objetivo del estudio. Los ejemplos (casos ejemplares) (Cuadro 2) han

[4] En este trabajo, un episodio es cada uno de los ejemplos de clases usados por la profesora y que pueden ser divididos en unidades de información de acuerdo con evidencias/indicios de conocimiento.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

sido transcritos y divididos en unidades de información y se corresponden con las declaraciones orales y/o escritas de Jenny. Al referenciarlas, contemplamos las líneas transcritas en las que se localiza la evidencia/indicio de conocimiento (p.ej. C(3, 4), 361-369 significa clase 3, ejemplo 4, texto extraído entre las líneas 361-369). Las unidades de información las hemos analizado atendiendo al análisis de contenido (Bardín, 1996), el cual deriva de dos instrumentos de análisis que se aportan de manera complementaria. Por una parte, las categorías y subdominios propuestos por el modelo MTSK (CARRILLO *et al*., 2018), estableciendo la diferencia entre evidencia e indicio de conocimiento y, por otra, el sistema de categorías (Figueiredo; Blanco; Contreras, 2007) adoptado en esta investigación (Cuadro 3), que permite encuadrar el uso de ejemplos que hace Jenny en la ejemplificación de ideas claves de la ecuación cuadrática.

Así, una evidencia es una componente que apoya la presencia del conocimiento que manifiesta el profesor como parte de su conocimiento, mientras que un indicio es un conocimiento que se sospecha que moviliza el profesor como parte de su práctica (Moriel-Junior; Carrillo, 2014), pero requiere de información adicional para confirmarse como evidencia de conocimiento.

A la luz de todo lo expuesto anteriormente, el análisis de los datos fue organizado siguiendo, por una parte, el objetivo de investigación y, por otra, los tipos de ejemplos desarrollados por Figueiredo, Blanco y Contreras (2007) del apartado de referentes teóricos (Cuadro 1). Esta tipología de ejemplos estaba predeterminada de estudios previos (Figueiredo; Blanco; Contreras, 2006) y fue aplicada, nuevamente, en un estudio posterior con profesores experimentados (Figueiredo, Contreras y Blanco, 2012).

Clasificamos los ejemplos de ecuación cuadrática que Jenny usó en cada una de las clases de acuerdo con las características de los ejemplos del sistema de categorías de Figueiredo, Contreras y Blanco (2012). Las diferencias en cuanto a la clasificación de ejemplos fueron discutidas y revisadas por los investigadores posteriormente. La clasificación y los tipos de ejemplos pertenecientes a esta clasificación se muestran en el Cuadro 3 y nos permiten organizar el análisis de los datos.

Tipo de ejemplo de	**Explicación**	**Ejemplo**
Definición/ presentación	Ejemplos que muestran un procedimiento por medio de una técnica	Resolver la ecuación cuadrática $9x^2 - 81 = 0$
Abordaje inicial autónomo	Ejemplos de cálculo de soluciones que amplían	Resolver la ecuación $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

	el rango del valor de los coeficientes	
Clarificación/ características	Ejemplos usados para mostrar las características de los tipos de soluciones de una ecuación cuadrática	Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 6 = 0$
Aplicaciones internas	Ejemplos para profundizar en la aplicación del discriminante y desigualdades	¿Qué condición debe cumplir k para que la ecuación 5x(x+2) = k tenga soluciones complejas?
Aplicaciones externas	Ejemplos que muestran el uso de ecuaciones cuadráticas a otras aplicaciones	Encuentre las medidas de los lados de una parcela rectangular de perímetro 54 m. y área de 170 m^2.

Cuadro 3 – Categorías de ejemplos y tipos de ejemplos por categoría
Fuente: elaborado por el autor.

4 Resultados

En este apartado describimos el conocimiento especializado de Jenny de acuerdo con los ejemplos que hemos considerado casos ejemplares (Bryman, 2004) de acuerdo con la tipología mencionada y las relaciones establecidas.

4.1 Conocimiento especializado de Jenny a partir del uso de ejemplos

Ejemplo de Definición/presentación. Resolver la ecuación cuadrática usando la fórmula general $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Jenny, antes de iniciar con el uso de la fórmula del discriminante para enseñar la naturaleza de las ecuaciones cuadráticas, usa tres ejemplos, en cuyas resoluciones aparecen los tres tipos diferentes de soluciones (reales y distintas, reales e iguales y complejas) (KMT-estrategias, tareas y ejemplos). Sobre estas ecuaciones comenta:

> *Jenny: Ya, luego que haya dividido su cuaderno en tres partes, escriba cada una de sus ecuaciones y, trate de recordar un método o incluso la fórmula para resolver esa ecuación y encontrar sus tipos de raíces. ¡Veamos que pasa! ¡Ponga atención con la última!* (C(3, 4), 361-

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

369).

En su respuesta, la profesora es consciente de la estructura y el orden de presentación de los ejemplos en cuanto al tipo de solución. Estos tres ejemplos de ecuaciones y, el último en particular, $3x^2 - 2x + 1 = 0$ se usa para mostrar el concepto de soluciones complejas que, en conjunto con los ejemplos anteriores, da cuenta de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* (KMT). Esto porque los ejemplos usados sobre el concepto de la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas son secuenciados intencionalmente por Jenny para que los estudiantes visualicen que las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones de diferente naturaleza.

Cuando desarrolla la ecuación $3x^2 - 2x + 1 = 0$, pregunta a los estudiantes sobre los coeficientes de la ecuación cuadrática, ellos responden y Jenny los valida en la pizarra $a = 3$, $b = -2$ y $c = 1$ [C(3, 4), 361-362] *(KoT-procedimientos).* Luego de identificar los coeficientes de la ecuación cuadrática, la profesora resuelve la ecuación usando la fórmula. En el siguiente extracto se muestra la forma de proceder:

> *P: Entonces me queda más dos, raíz de menos ocho [Anota $\frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$]. ¿Existe algún número, en los reales que multiplicado me dé negativo? Por ejemplo, la raíz de menos cuatro ¿Podría ser menos dos? No, porque menos dos por menos dos ¿Menos por menos?* (C(3, 4), 392-396)

La resolución de la ecuación cuadrática usando la fórmula *(KoT-procedimientos)* le permite mostrar a los estudiantes las características de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas (reales y diferentes, reales e iguales y complejas). Enfatiza en la expresión radical del numerador de la fórmula $\left(\frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}\right)$ dado que esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales *(KoT-procedimientos)* [C(3, 4), 392-397]; hace esto consciente de que los estudiantes, a partir de la forma en cómo proceden al resolver ecuaciones cuadráticas *(KFLM-formas de interacción)*, pueden calcular el radical cuadrado de un número negativo *(KFLM-fortalezas y dificultades)*. Seguidamente, Jenny comenta: *“Entonces estos valores no se encuentran en los reales y esa es la siguiente unidad que son los complejos o imaginarios, pero todavía no nos vamos a meter en eso, más adelante lo veremos”* [C(3, 4), 392-400], de donde identificamos su conocimiento de la estructura y el orden de los contenidos de acuerdo con el curriculum, en particular, la etapa escolar en que se trabaja con los números complejos *(KMLS-secuenciación con temas anteriores y posteriores).*

Relaciones a partir de los ejemplos de definición/presentación

A partir de los ejemplos de *definición/presentación*, Jenny moviliza conocimiento especializado sobre procedimientos convencionales y/o alternativos para resolver ecuaciones cuadráticas en forma estándar y no estándar vinculado con su conocimiento sobre registros de representación, que le sirve para expresar las ecuaciones cuadráticas de diferentes formas, por ejemplo, en forma estándar, producto de binomios, en forma no estándar etc. El conocimiento de los temas (KoT), a partir de los resultados, se ve apoyado en el conocimiento de Jenny sobre las formas de interacción con el contenido matemático y las fortalezas y dificultades; por ejemplo, en la operatoria con expresiones algebraicas y operaciones con fracciones, le ha permitido seleccionar ejemplos adecuados sobre ecuaciones cuadráticas o uso del discriminante para profundizar en los conceptos matemáticos y adecuar en qué momentos definir los temas asociados a la enseñanza de la ecuación cuadrática. Por ejemplo, el vínculo mostrado entre los ejemplos secuenciados de ecuaciones cuadráticas para inducir el concepto de la naturaleza de las soluciones de la ecuación cuadrática y, posteriormente, definir el discriminante.

En este mismo sentido, su conocimiento sobre las formas de interacción con el contenido matemático y cómo aprenden los estudiantes, le permite a Jenny usar las estrategias de enseñanza de ensayo y error y preguntas contra-preguntas para ilustrar y ejemplificar las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática, la identificación de coeficientes, operatoria con fracciones algebraicas. El conocimiento de Jenny sobre la secuenciación con los temas anterior y posteriores influye en que no puede (en este nivel) trabajar la resolución de ecuaciones cuadráticas con radicales negativos, como tampoco, el uso de discriminante con raíces no reales. Estas relaciones las mostramos en la Figura 2.

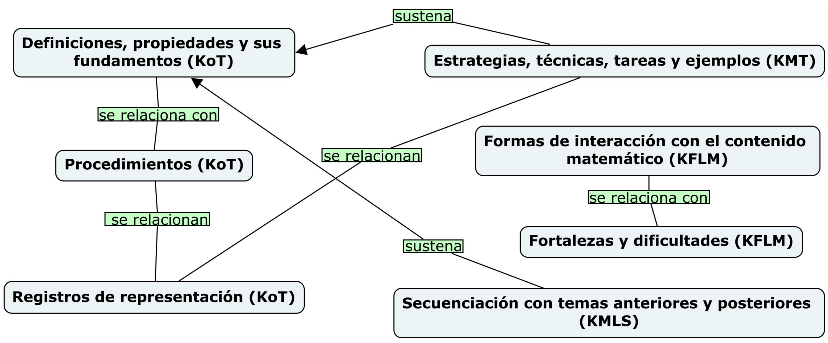

Figura 2 – Relaciones de conocimiento movilizados del uso de ejemplos de definición/presentación
Fuente: elaborado por el autor.

Ejemplo de Abordaje inicial autónomo. ¿Cuáles son los valores de m que satisfacen la ecuación $\frac{2}{m} - 1 = m$?

En este ejemplo de ecuación cuadrática no estándar (fraccionaria) interpretamos que la intención de Jenny es mostrar procedimientos algebraicos para expresar el ejemplo como una ecuación cuadrática estándar, calcular las soluciones y validar la veracidad del enunciado. Este ejemplo hace necesario el uso de conocimientos y conceptos previos por parte de los estudiantes.

Lo primero que hace la profesora es anotar en la pizarra explícitamente el denominador

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

1 en los dos términos que no lo tienen (1 y m) (Figura 3), de donde interpretamos evidencia de conocimiento sobre *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT).* Esta estrategia puede ser una oportunidad para indagar en el conocimiento que Jenny posee sobre las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) al operar con fracciones algebraicas.

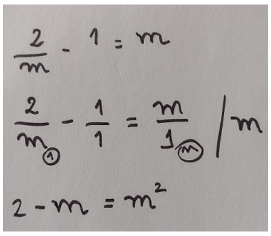

Figura 3 - Ecuación amplificada con denominador la unidad de la expresión original
Fuente: elaborado por el autor.

Luego de expresar la ecuación $\frac{2}{m} - 1 = m$ en la forma $\frac{2}{m} - \frac{1}{1} = \frac{m}{1}$, utiliza la técnica de amplificación, comentando: *"tenemos como múltiplo acá "m", perfecto. ¿Entonces me quedaría, 1 por 2? ¿m por -1? "-1m" o menos "m" ¿"m" por "m"?"* [C(7, 3), 105-107].

Al presentar esta estrategia vemos que busca *eliminar* los denominadores y dejar la ecuación con coeficientes enteros de la forma $2 - m = m^2$, lo que evidencia conocimiento sobre *KMT (Estrategias, técnicas tareas y ejemplo)*. Al dejar la ecuación con coeficientes enteros Jenny muestra conocer procedimientos convencionales para expresar ecuaciones cuadráticas fraccionarias en ecuaciones estándares *(KoT-procedimientos).* Luego, a partir de la ecuación $2 - m = m^2$ Jenny comenta:

> *P: Aquí, como les dije a algunos que dejaron el "m" hacia este lado, les dije le recomiendo que deje el "m" al cuadrado positivo para que no tenga que utilizar fórmula y así pueda ocupar la factorización. Por lo tanto, en el fondo dejo todo a este lado (derecho) e igualo todo a cero. Entonces me quedaría "m^2" más "m" menos 2, y a este lado, igual a cero.* [C(7, 3), 111-113]

Enfatiza que en la igualdad $2 - m = m^2$ es mejor dejar el término m^2 positivo *(KMT-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)* y así poder usar la técnica de factorización de manera directa, evitando el uso de la fórmula *(KoT-procedimientos)*. El conocimiento que moviliza la docente puede estar relacionado con su conocimiento sobre cómo los estudiantes resuelven ecuaciones cuadráticas *(KFLM-formas de interacción con el contenido matemático)* que los estudiantes optarán por dejar el término cuadrático positivo para resolver la ecuación.

Relaciones a partir de los ejemplos de abordaje inicial autónomo

Jenny usa ejemplos *de abordaje inicial autónomo* (KMT- estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) con la intención explícita de que los estudiantes apliquen los procedimientos o conceptos asociados a la enseñanza de la ecuación cuadrática para que desarrollen autonomía en su aprendizaje. Cada uno de los ejemplos presentados por Jenny a los estudiantes estaban

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

organizados (ejemplos planeados[5]) considerando la manera en que los estudiantes resuelven estos ejemplos de aplicación. Los ejemplos en esta categoría nos permitieron identificar evidencias de conocimientos matemáticos para la enseñanza. La categoría de procedimientos (KoT) es movilizada en gran medida por Jenny como parte de su conocimiento sobre las ecuaciones cuadráticas y procedimientos de resolución *(KoT-procedimientos).* En la resolución de ecuaciones cuadráticas Jenny muestra que las soluciones de la ecuación cuadrática se conectan con las raíces de las funciones cuadráticas *(KSM-conexiones auxiliares),* para ello, además, se apoya de registros gráficos de parábolas para mostrar (previamente) los puntos de intersección con el eje de las abscisas *(KoT- registros de representación).*

Al resolver diferentes ecuaciones cuadráticas (estándares y no estándares), la docente muestra a los estudiantes diferentes formas de escribir una ecuación, por ejemplo, $2 - m = m^2$ o $m - 2 = -m^2$ *(KoT-registros de representación)*. El uso de diferentes formas de representaciones de ecuaciones cuadráticas está sustentado en su conocimiento acerca de las dificultades de los estudiantes sobre expresiones y operaciones algebraicas (KFLM).

El conocimiento de la secuenciación de ejemplos, estrategias de preguntas reiteradas y ensayo y error *(KMT)*, en conexión con el conocimiento acerca de *fortalezas y dificultades de los estudiantes (KFLM)* sobre operaciones aritméticas y algebraicas, leyes de signos y evaluación de expresiones algebraicas, le permite a Jenny generar explicaciones y mostrar diferentes procedimientos matemáticos para la enseñanza de los contenidos. Estas relaciones se muestran en la Figura 4.

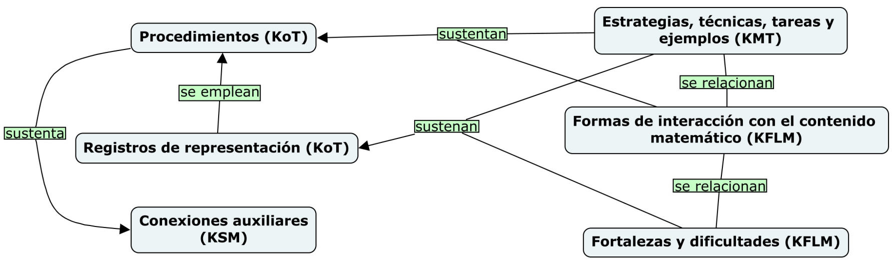

Figura 4 – Relaciones de conocimiento movilizados del uso de ejemplos de abordaje inicial autónomo
Fuente: elaborado por el autor.

*Ejemplo de características***.** *Descomponer las siguientes raíces* $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{76}$ *y* $\sqrt{648}$

La profesora usa la secuencia de estos ejemplos cuando los estudiantes presentan dudas al no poder calcular la raíz exacta de la cantidad subradical de ecuaciones cuadráticas para ilustrar su descomposición de radicales. Explica, en primer lugar, la descomposición del radical $\sqrt{8}$ y comenta:

Jenny: Perfecto ¿Qué hacíamos ahí? ¡Muy bien! y nos quedaba ¿Cierto? que esto era, dos

[5] Zodik; Zaslavsky (2007)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

> *¿Raíz de? dos [Anota $2\sqrt{2}$] ¿Cierto? Porque la raíz de cuatro, la podíamos separar en dos raíces, la raíz de cuatro, por la raíz de dos ¿Cierto? Entonces la raíz de cuatro era dos y nos quedaba dos raíz de dos. ¿Se acuerda de eso forma típica de raíces?* [C(3, 4), 421-427]

Antes de explicar el procedimiento, pregunta a los estudiantes la forma de realizar el ejercicio (KMT-estrategias, técnicas tareas y ejemplos) como una estrategia de enseñanza. Luego, explica que el ocho se puede escribir $4 \cdot 2$ y que el 4 tiene radical cuadrado exacto, dejando la expresión como $2\sqrt{2}$ *(KoT -procedimientos)*. Además, vemos que Jenny representa la $\sqrt{8}$ (que no es exacta) como $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2}$, *(KoT-registros de representación)*, dado que es consciente de diferentes formas de representar el radical del ejemplo para ilustrar la descomposición.

En los siguientes ejemplos de la secuencia, $\sqrt{18}\ y\ \sqrt{76}$, procede de forma similar a la anterior. Para la $\sqrt{18}$, los estudiantes logran representar la $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2}$ encontrando los factores 9 y 2 y la docente valida las respuestas, comentando:

> *P: Raíz de nueve por dos ¿Cierto? y la forma típica entonces ¿Nos quedaría? raíz de nueve por raíz de dos, que es lo mismo que decir tres raíz de dos, en el fondo el nueve ¿Cierto? tiene raíz exacta… queda multiplicando la raíz de dos [Anota $3\sqrt{2}$] ¿Se acuerda o no se acuerda ahora?* [C(3, 4), 432-436]

Finalmente, en este ejemplo identificamos evidencias de conocimientos sobre estrategias de enseñanza, al interpretar que Jenny escoge los ejemplos de manera secuenciada de acuerdo con la complejidad de cada radical, iniciando con el que tiene menor cantidad sub radical hasta finalizar con el que tiene mayor cantidad sub radical *(KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)*.

Relaciones a partir de los ejemplos de características

Los tipos de ejemplos de *características* le permiten a Jenny profundizar en el concepto de ecuación cuadrática en la resolución de ecuaciones cuadráticas no estándares, usando diferentes técnicas *(KoT-procedimientos)*: ejemplos para determinar una constante k usando el discriminante para satisfacer alguna condición, y ejemplos de las propiedades de las soluciones y/o como partes de las aplicaciones con ecuaciones cuadráticas *(KoT-definiciones, propiedad y sus fundamentos)*. En los ejemplos usados por la profesora en esta categoría, logramos identificar evidencias sobre procedimientos estándares y alternativos *(KoT)*: uso de la fórmula, técnicas de factorización y evaluación de expresiones algebraicas; entre otras, al resolver y trabajar con los estudiantes los ejemplos de mayor alcance de los temas asociados al contenido de ecuación cuadrática o que requerían el uso de conocimientos previos. Estos procedimientos se ajustaron a las formas en que los alumnos realizaban factorizaciones y la aplicación de la fórmula *(KFLM-formas de interacción)*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

El conocimiento de Jenny sobre las diferentes dificultades conceptuales y/o procedimentales de los estudiantes *(KFLM),* se relaciona con el uso de diferentes estrategias de enseñanza (ensayo error, preguntas reiteradas, apoyo de gráficos) *(KMT)* en la enseñanza de los contenidos asociados a la ecuación cuadrática. La relación que evidenciamos entre ambos subdominios, le permitió tomar las decisiones sobre qué, cómo y cuándo enseñar los contenidos del tema de ecuación cuadrática; esto se da en el caso de la secuenciación de ejemplos de ecuaciones cuadráticas *(KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)* que pueden resolverse por factorización hasta aquellas que no se pueden factorizar en los enteros y hacen necesario el uso de la fórmula. Estas relaciones las mostramos en la Figura 5.

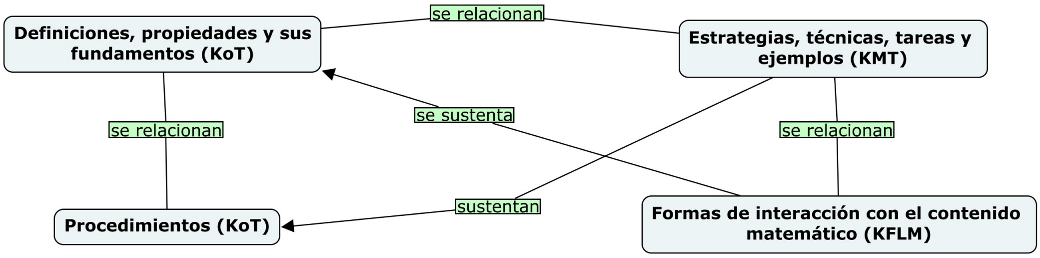

Figura 5 – Relaciones de conocimiento movilizados del uso de ejemplos de características
Fuente: elaborado por el autor.

Ejemplo de aplicaciones internas. ***.*** *Validación de la propiedad de la adición de las soluciones de una ecuación cuadrática* $x_1 + x_2$.

En la etapa de mayor profundización del contenido de las ecuaciones cuadráticas, Jenny utiliza un ejemplo *(KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)* para demostrar las propiedades de la suma y producto de las soluciones de una ecuación cuadrática (aun cuando pudo solo haber mostrado las fórmulas $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$), lo que nos permitió identificar evidencia de conocimiento sobre el *papel de la demostración (KPM).*

A partir de la expresión general de las soluciones x_1 y x_2, la profesora escribe en la pizarra $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y dice a los estudiantes *“Ya, sumemos las dos raíces; tenemos equis uno más, equis dos. Vamos a sumar las dos raíces de mi ecuación cuadrática”* [C(6, 4), 154-155]. Escribe en la pizarra la expresión algebraica de la suma, identificando evidencia de *KoT (registros de representación)*, pues Jenny usa una representación alternativa para ilustrar la propiedad de la suma $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Al expresar la propiedad de la suma en la pizarra, usa el símbolo Δ para reemplazar la expresión $b^2 - 4ac$ y escribir $\Delta = b^2 - 4ac$, *“lo voy a abreviar así [escribe* $\sqrt{\Delta}$*], partido en dos a”* [C(6, 4), 160] enfatizando en el uso del símbolo Δ para simplificar la operacionalización *(KPM-papel de los símbolos).*

El uso del símbolo $\sqrt{\Delta}$ que hace Jenny en la demostración de las propiedades $x_1 + x_2$ y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

$x_1 \cdot x_2$ es una *estrategia de enseñanza (KMT)* que tiene como propósito que los estudiantes tengan menos dificultades en la operatoria algebraica *(KFLM)* y comprendan el proceso para validar ambas propiedades.

Después de que la profesora muestra la expresión para la suma $x_1 + x_2$, enfatiza que la expresión tiene los denominadores iguales en la operación con fracciones *(KoT-procedimientos)*, llegando a la expresión $\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Este procedimiento se ve en el siguiente fragmento:

> *Jenny: Se me van los discriminantes, se fueron. Me queda menos be, menos be, menos dos be, partido en dos a. ¿puedo simplificar? Por dos muy bien, queda en be. Menos be partido en dos a, ¡muy bien! Propiedad dos, entonces, es equis uno más equis dos es igual a menos be partido en a [escribe en la pizarra]* [C(6, 4), 168-176]

Acá identificamos evidencia de conocimiento sobre *KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos)*, pues conoce la propiedad de la adición (y multiplicación) de raíces de una ecuación cuadrática y sus fundamentos. En esta misma línea, vemos que Jenny no solo conoce la propiedad de la adición de raíces de una ecuación cuadrática, sino que usa el ejemplo para mostrar el papel que tiene la validación como práctica matemática, probando que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *(KPM-formas de validación y demostración)* [*C(*6, 3), 168-176]; esto porque no solo muestra la *fórmula*, sino que demuestra a partir de la expresión de las soluciones, la expresión general.

Cuando la profesora muestra la validación de la propiedad de la suma de raíces de una ecuación cuadrática, un estudiante le dice: *"Profe, no entendí la propiedad dos"*. Para ayudarlo a comprender el procedimiento $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, comenta lo siguiente:

> *Jenny: siempre tengo que tener el mismo denominador, mantengo el denominador y sumo lo de arriba. Menos be, más raíz de discriminante, menos be, [señala la suma de las raíces con el signo negativo* $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *] cierto, más menos, menos raíz de discriminante. Que es como si estuviera… es como esto mira [expone un ejemplo más sencillo]* $\frac{-3}{5} + \frac{-2}{5}$*. Lo que uno hace, es, mantengo el denominador y queda menos tres más menos, menos dos* $\frac{-3-2}{5}$. [*C(*6, 3), 180-188]

A partir de los procedimientos utilizados de suma de fracciones *(KoT-procedimientos)* enfatiza y destaca en la pizarra los símbolos + y – (círculo en rojo), aludiendo a la ley de los signos en la adición y la multiplicación (*KPM-papel de los símbolos)*. Destaca los signos $\pm$ pues sabe que los estudiantes, recurrentemente, presentan dificultades cuando realizan operaciones con fracciones aplicando las leyes de signos *(KFLM-fortalezas y dificultades)*.

Jenny usa este ejemplo de suma de fracciones para ilustrar las operaciones en el ámbito

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

algebraico y apoyar la explicación a los alumnos, estableciendo una relación en la operatoria de fracciones entre el ámbito numérico y algebraico (como una conexión interconceptual), a partir de la que podemos identificar evidencia de *KSM (conexiones de simplificación)*; pues la ejemplificación de la suma de fracciones muestra su conocimiento para explicar una situación compleja (la suma de fracciones algebraicas) por medio de una más simple. Esto se evidencia en el siguiente extracto: *"que es como si estuviera… es como esto mira [expone un ejemplo más sencillo]* $\frac{-3}{5}+\frac{-2}{5}$*"* [C(6, 3), 188-189], que hace poner el foco en la estructura de la suma de fracciones, más que en la operatoria algebraica en sí. El uso de fracciones en el ámbito numérico puede ser una oportunidad para explorar en el conocimiento que Jenny posee sobre las estrategias de enseñanza (KMT).

El uso de ejemplos en esta categoría nos permitió observar la presencia de conocimiento de los temas, a través de los diversos procedimientos (estándares y alternativos) *(KoT)* para resolver ecuaciones cuadráticas, tanto aplicación del discriminante, como también el uso de las propiedades de las soluciones. El uso de los ejemplos de aplicaciones internas nos aporta evidencia de conocimientos sobre el papel de la validación en matemáticas (KPM) cuando Jenny demuestra las propiedades de suma y producto y del papel de los símbolos (KPM). Asimismo, Jenny establece conexiones de simplificación (interconceptual) (KSM) con operaciones de fracciones en el ámbito numérico para explicar operaciones en contexto algebraico cuando demuestra estas propiedades.

Relaciones a partir de los ejemplos de aplicaciones internas

A partir de los *ejemplos de aplicaciones internas* observamos que el conocimiento sobre los errores y dificultades de los estudiantes (KFLM) y el conocimiento sobre estrategias de enseñanza y ejemplos (KMT), que tiene Jenny, afloraron como la base para movilizar su *conocimiento de los temas* (KoT), *conocimiento de la estructura matemática* (KSM) y *conocimiento de la práctica matemática* (KPM). Por ejemplo, el conocimiento que tiene acerca de los errores de los estudiantes en la operatoria con fracciones, le permite adaptar el ejemplo de la demostración de x_1+x_2, usando la variable $\Delta = b^2-4ac$ como una estrategia de enseñanza. Asimismo, el *conocimiento sobre las características del aprendizaje* (KFLM) de la profesora, es el conocimiento que sustenta la *conexión de simplificación* (KSM) entre fracciones algebraicas y numéricas para profundizar en la comprensión de los estudiantes. Estas relaciones las mostramos en la Figura 6.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

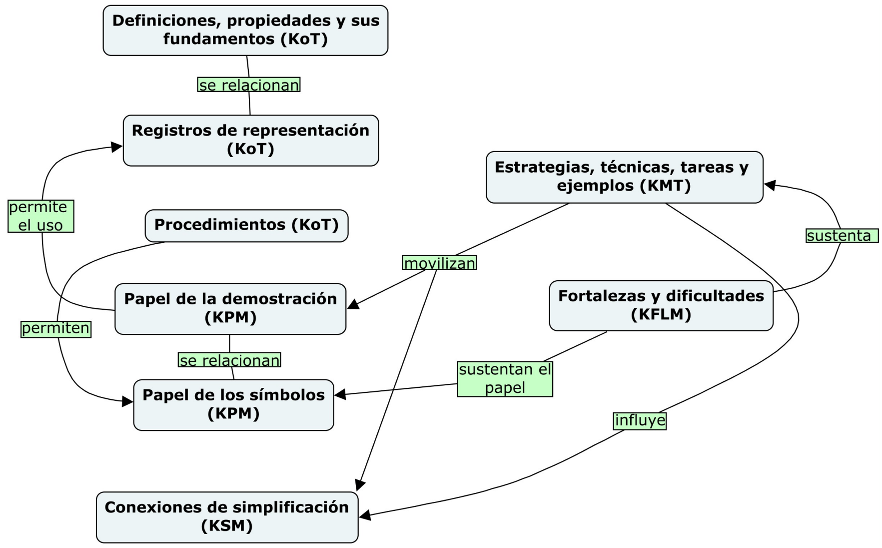

Figura 6 – Relaciones de conocimiento movilizados del uso de ejemplos de aplicaciones internas
Fuente: elaborado por el autor.

*Ejemplo de aplicaciones externas***.** *Un sitio rectangular tiene un área igual a 75 m^2, si su ancho mide 10 metros menos que su largo ¿Cuánto mide el ancho?*

Para mostrar las aplicaciones de la ecuación cuadrática, Jenny muestra a los estudiantes diferentes ejemplos de aplicaciones *(KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)* en contexto geométrico *(KoT-fenomenología y aplicaciones)* para calcular las medidas de una región rectangular *(KoT-procedimientos)*.

Antes de desarrollar el ejemplo, hace un recordatorio del concepto de área, en particular de un cuadrilátero, evocando la forma de la televisión instalada en la sala de clases. Esto lo vemos en el fragmento siguiente:

> *P: Primero, ¿Qué tiene que saber? Por ejemplo, ¿Cómo se saca el área de la tele? Se multiplica largo por ancho, ya y por eso queda al cuadrado, porque es metro por metro. Por ejemplo, si esto mide un metro y dos metros, sería uno por dos y eso me daría 2, metro por metro, metro al cuadrado. Entonces me quedaría el área de la tele serían 2 metros cuadrados.* [C(7, 5), 179-187]

Acá podemos identificar evidencia de conocimiento sobre una conexión de contenidos previos: conoce que la noción de área desde la geometría plana se relaciona interconceptualmente con la noción de área en el contexto analítico (ecuaciones) *(KSM-conexiones de simplificación)*. Además, se puede observar explícitamente que, para construir la expresión del área del ejemplo, Jenny se apoya en el recurso material de la televisión para que los estudiantes visualicen el área, identificando *KMT (recursos materiales y virtuales)*.

La profesora lee el enunciado del ejemplo para extraer los datos y anotarlos en la pizarra y después realiza un esquema para representar la situación (Figura 7).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

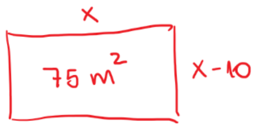

Figura 7 - Representación de la situación propuesta en el ejemplo
Fuente: elaborado por el autor.

A partir de la representación, anota los datos del ejemplo y verbaliza la situación *“Serían 75 metros cuadrados; su ancho mide 10 metros menos que su largo; si su ancho mide 10 metros menos que su largo, esto mide 10 menos que esto”* [C(7, 5), 218-224].

De la ilustración que hace en la pizarra, evidenciamos *KoT (registros de representación)*, pues conoce la representación pictórica para ilustrar las características claves del enunciado del ejemplo que está planteado en lenguaje natural.

Luego de que Jenny muestra el esquema en la pizarra (Figura 7), junto con los estudiantes construye la ecuación cuadrática que representa el área del sitio rectangular. Esto se ve en el siguiente fragmento:

> *P: 75 metros cuadrados. Los resuelve “x” por “x”, “x” cuadrado menos 10x es igual a 75. [En la pizarra presenta lo que deben multiplicar para llegar a la expresión que me dará el resultado* $x(x-10)$*] ¿Qué debe hacer ahora?. Ordenar [responde un estudiante]. Muy bien! E igualar a cero. Nos queda* $x^2-10x-75=0$. [C(7, 5), 233-237]

Del fragmento se desprende que Jenny moviliza *KoT (procedimientos-¿Cómo se hace?)*, dado que sabe operar los productos algebraicos planteados de la expresión del área y sabe cómo expresar la ecuación cuadrática como producto de dos factores ($x(x-10)$).

El enunciado del ejemplo tiene como consigna determinar la medida del ancho, Jenny resuelve la ecuación cuadrática $x^2-10x-75=0$ haciendo uso de la técnica de factorización como algoritmo alternativo para determinar el largo del sitio rectangular *(KoT (procedimientos-¿cómo se hace?)*, lo que se refleja en el siguiente fragmento:

> *P: Entonces buscar dos números multiplicados me den menos 75 y que sumados o restados me dé menos 10. ¿15 por 5? ¿Todos qué dicen? ¿Probemos, multiplicados si da y sumados o restados me va a dar el 10? Restados sí. Probemos si nos dan los signos o no. Entonces, “x” = 15 y “x” = 5.* [C(7, 6), 240-243]

Al obtener las dos soluciones de la ecuación cuadrática, Jenny pregunta a los alumnos sobre los factores que permiten factorizar el trinomio con término común, de donde identificamos evidencia sobre *KMT (estrategias, técnicas tareas y ejemplos)*, puesto que hace uso de la estrategia de ensayo y error para que los estudiantes encuentren los valores de x_1 y x_2 que permiten determinar la factorización correcta del trinomio [C(7, 6), 240-243], obteniendo las soluciones de la ecuación $x_1=15$ y $x_2=-5$.

A partir de las soluciones de la ecuación, la profesora dice a los estudiantes que ambas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

no son válidas en el contexto del ejemplo. Al respecto comenta: *"en geometría los valores de los lados no pueden tomar valores negativos. Por eso, ¿Cuál es el valor correcto aquí? Porque aquí no puede ser menos 5. Entonces el valor que yo tome es el 15. Por lo tanto, me quedaría 15 menos 10. ¿Eso sería? 5"* [C(7, 6), 255-259]; fragmento que nos muestra evidencia de conocimiento sobre *KoT (procedimientos-características de los resultados)*, dado que conoce que las soluciones de la ecuación cuadrática en un contexto geométrico tienen restricciones, pues los lados del rectángulo son una longitud y estos no pueden tomar valores negativos.

Relaciones a partir de los ejemplos de aplicaciones externas

Los ejemplos de *aplicaciones externas* son los menos usados por Jenny y fueron presentados en las últimas dos clases de la enseñanza de la ecuación cuadrática. El uso de estos ejemplos (aplicaciones externas) nos permitió identificar conocimiento especializado y relaciones en los subdominios de *conocimiento de los temas* (KoT), *estructura de las matemáticas* (KSM), *características del aprendizaje de los estudiantes* (KFLM) y *enseñanza de las matemáticas* (KMT). Los ejemplos propuestos de aplicaciones externas están en el contexto de la Geometría (KoT-fenomenología) y los usa para calcular las medidas de los lados de rectángulos, construyendo ecuaciones cuadráticas (KoT-procedimientos).

Antes de explicar la forma de resolver el ejemplo, la profesora explica la forma de calcular el área de una figura en contexto numérico: *¿Qué tiene que saber? Por ejemplo, ¿Cómo se saca el área de la figura? Se multiplica largo por ancho, ya y por eso queda al cuadrado, porque es metro por metro"*; apoyándose como recurso en la ilustración de la TV del salón de clases, que permitió que los estudiantes visualizaran la forma del sitio rectangular (KMT-recursos materiales y virtuales). Esta forma de introducir la noción de área le sirve para establecer la relación del área, en contexto algebraico, del sitio rectangular del enunciado. Con ello establece una conexión de simplificación (KSM) de la noción de área desde la perspectiva euclidiana y la algebraica. Estas relaciones las mostramos en la Figura 8.

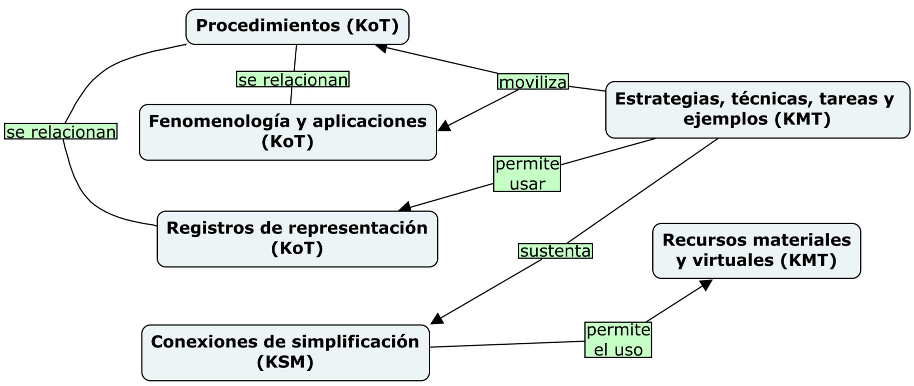

Figura 8 – Relaciones de conocimiento movilizados del uso de ejemplos de aplicaciones externas
Fuente: elaborado por el autor.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

5 Discusión y Conclusiones

Los resultados de la investigación muestran relaciones entre diversos subdominios de conocimiento especializado. A partir del uso de los diferentes ejemplos, estas relaciones se dan entre las categorías del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje y el conocimiento de los estándares del aprendizaje que muestran la base de conocimiento que - en gran parte de la enseñanza de la ecuación cuadrática - sustenta el conocimiento de los temas, de la práctica matemática y de la estructura de las matemáticas a partir de sus indicadores.

Los ejemplos *de presentación/definición* y *abordaje inicial autónomo* le permiten a la profesora utilizar su conocimiento sobre estrategias de enseñanza para mostrar las definiciones formales de la ecuación cuadrática y del discriminante, así como sus propiedades. Asimismo, la relación de conocimiento entre las dificultades y las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático sustentan la elección de los ejemplos cuando ejemplifica los procedimientos para el cálculo de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas (usando algoritmos convencionales o alternativos) o para el uso del discriminante. Para la ejemplificación de estos procedimientos, la profesora se apoya en su conocimiento sobre diferentes registros de representación.

En ambos tipos de ejemplos se observan relaciones de conocimiento entre las formas de interacción y las dificultades de los estudiantes, lo que parece sustentar, en todo momento, tanto el tipo de ejemplos utilizados como las estrategias de enseñanza del contenido matemático (Zakaryan *et al*., 2018).

Como casos particulares, en algunos de los ejemplos de *presentación/definición* se muestra que los procedimientos en la resolución de ecuaciones cuadráticas con radicales negativos está sustentada en el conocimiento sobre la secuenciación con temas anteriores y posteriores, dado que la profesora no trabaja este contenido en las clases al saber que es un contenido que se aborda en los números complejos. En el caso de los ejemplos *de abordaje inicial autónomo*, algunos de los procedimientos para resolver ecuaciones cuadráticas llevan a la profesora a mostrar conexiones auxiliares entre la ecuación y la función cuadrática para contextualizar la utilidad del cálculo de estas soluciones.

De acuerdo con la organización de las clases que hace la profesora y su conocimiento sobre las formas de interacción con el contenido matemático, los *ejemplos de características* son usados, mayoritariamente, durante el desarrollo de las clases y, en algunos casos, en los cierres. La experiencia de la profesora en la enseñanza de los temas asociados a la ecuación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

cuadrática y las estrategias de enseñanza que utiliza le permiten mostrar algunas propiedades de las soluciones de ésta, iniciando en el ámbito numérico con aspectos particulares, para cerrar con una generalización (Bills; Bills, 2005; Rowland, 2008).

Así también, a partir de las formas en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático, la profesora selecciona ejemplos intencionados para movilizar procedimientos de complejidad mayor, por ejemplo, al trabajar con ecuaciones cuadráticas fraccionarias o el uso de las propiedades $x_1 + x_2$ y $x_1 \cdot x_2$ para construir ecuaciones cuadráticas. Los diferentes procedimientos utilizados por la docente estuvieron, por lo general, apoyados en diferentes registros de representación, los que permitieron la comprensión de los estudiantes.

El uso de ejemplos *de aplicaciones internas* y *externas* permiten movilizar de la profesora conocimiento sobre la práctica matemática (papel de la demostración y papel de los símbolos en matemáticas) y, sobre la estructura de las matemáticas, en las conexiones de simplificación.

El conocimiento acerca de las dificultades de los estudiantes parece influir en la selección de *los ejemplos de aplicaciones internas* para demostrar y validar las propiedades de la suma y el producto de las ecuaciones cuadráticas, cuidando la importancia del rol que cumplen los símbolos en matemáticas. Resultan interesantes los procedimientos utilizados por la profesora para demostrar estas propiedades, especialmente las operaciones algebraicas, la conexión de simplificación que establece con la suma y producto de fracciones en contexto numérico.

En el caso de los *ejemplos de aplicaciones externas*, se hace interesante que el conocimiento de variados ejemplos se relaciona con el conocimiento acerca de aplicaciones de la ecuación cuadrática en contexto geométrico. A partir del uso de estas aplicaciones, la profesora muestra relaciones de conocimiento entre procedimientos y registros de representación para ilustrar los contextos utilizados. Este tipo de ejemplos muestra, además, que conoce las características de los resultados, es decir, conoce las restricciones que tienen las soluciones de ecuaciones cuadráticas en contextos determinados. Además, con el fin de mostrar las aplicaciones en contexto geométrico para usar la ecuación cuadrática, la profesora, conscientemente, se apoya en su conocimiento sobre recursos materiales como una forma de profundizar en la comprensión de los estudiantes.

A partir de las evidencias de los resultados, es posible observar que el conocimiento de las características del aprendizaje y de la enseñanza de las Matemáticas se fortalecen mutuamente y, en su conjunto, permiten movilizar conocimientos de los temas (KoT). Si bien el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas se relaciona con el de las características del aprendizaje, es este último tipo de conocimiento (KFLM) el que observamos que prima en las decisiones con respecto a las estrategias de enseñanza y en los ejemplos utilizados (Zakaryan *et al*., 2018) de la ecuación cuadrática. Del mismo modo, la selección de los ejemplos y la complejidad se relaciona con el conocimiento de la profesora con respecto a las formas de interacción de los alumnos con los contenidos, considerando las dificultades que manifiestan, tanto en lo conceptual, como en lo procedimental.

Las dificultades de aprendizaje de los estudiantes llevan a la profesora a utilizar, en diversas clases, las estrategias de ensayo y error y de preguntas reiteradas para profundizar en las formas de pensamiento de los estudiantes; como también la posibilidad que los mismos estudiantes propusieran formas de resolución o cuestionaran ciertos resultados, como fue el caso de las soluciones negativas en el cálculo de áreas de figuras geométricas.

También, las relaciones en el conocimiento didáctico del contenido (PCK), en particular, en las diferentes categorías del KFLM y el KMT permiten movilizar conocimiento de los temas y evidenciar relaciones de conocimiento entre los procedimientos matemáticos utilizados, el uso y apoyo en diferentes registros de representación; así también, permiten la inclusión de definiciones y propiedades.

En conclusión, podemos sostener que el uso del modelo MTSK, a partir de nuestro estudio de caso, se ha conformado como una herramienta de análisis para describir el conocimiento de la profesora cuando utiliza ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática. Este modelo nos ha permitido complementar y comprender que los ejemplos son herramientas didácticas para desarrollar el pensamiento matemático y deben ser adaptados a las capacidades que presentan los estudiantes (Zaslavsky *et al*., 2012). Por otra parte, la base de conocimiento didáctico que posee la profesora les permite saber qué y cuándo usar determinados ejemplos en la enseñanza (Rowland; Huckstep; Thwaites, 2003); aspectos que están en la línea de los aportes entregados por el modelo MTSK.

Uno de los aportes más específicos es que la relación entre el conocimiento de las dificultades de aprendizaje y el conocimiento sobre estrategias y ejemplos, a partir de los ejemplos de aplicaciones internas y externas, han permitido movilizar conocimientos matemáticos sobre conexiones de simplificación y auxiliares (KSM), como también, del conocimiento sobre el papel de la demostración y de los símbolos (KPM) (Delgado-Rebolledo; Zakaryan, 2019). Esto pone de relieve que la ejemplificación es una práctica transversal en el modelo (Liñan-García *et al.,* 2021) y que la capacidad en la selección de los ejemplos de aplicaciones ha dado cuenta de la consciencia de los objetivos de enseñanza, dando sentido a los objetos matemáticos y los aspectos críticos que se desean mostrar (Watson; Mason, 2005; Watson; Mason, 2002), en este caso, de la ecuación cuadrática.

Si bien se han realizado esfuerzos para profundizar en las relaciones de diferentes subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Delgado-Rebolledo; Zakaryan, 2019; Zakaryan *et al.,* 2018; Zakaryan; Ribeiro, 2016; Zakaryan; Sosa, 2021), este trabajo aporta una perspectiva emergente desde el modelo del conocimiento especializado y es un punto de partida para explorar posibles relaciones en la selección y uso de ejemplos. La reflexión consciente (Adler; Pournara, 2020), tanto teórica como práctica y, el conocimiento implicado en la enseñanza de contenidos matemáticos aportaría evidencia y daría sentido a los profesores cuando usan ejemplos para la enseñanza.

Finalmente, con este trabajo hemos pretendido aportar en la comprensión y profundización en el conocimiento especializado en la enseñanza de la ecuación cuadrática, así como enfatizar la importancia que tiene el uso de ejemplos en la especificidad del conocimiento del profesor de matemática, lo que puede ser un aporte tanto a la formación continua del profesorado como en los profesores de matemática en formación.

Pensamos que los resultados reportados en este trabajo (en este caso de la ecuación cuadrática) contribuyen a mejorar el conocimiento sobre la forma en que los profesores conocen un contenido a partir de la selección y uso de ejemplos. Los resultados, en trabajos en esta línea de investigación, aportan en la formación de futuros profesores, como también, la formación continua de profesores. Asimismo, las relaciones entre los tipos de ejemplos usados y el conocimiento especializado movilizado pueden ser una base para repensar aspectos claves de la enseñanza, como también, la toma de conciencia en el uso de ejemplos como parte de un proceso reflexivo continuo.

Agradecimientos

The Spanish Government (RTI2018-096547-B-I00) (MECD) and the Research Centre COIDESO (University of Huelva, Spain) supported this research.

Este trabajo se ha desarrollado en el marco de los proyectos RTI2018-096547-B-I00 y PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM-168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

ADLER, J.; POURNARA, C. Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En: POTARI, D.; CHAPMAN, O. (eds.), **International handbook of mathematics teacher education:** Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development. Paises Bajos: Sense, 2020. p. 329–353. (Vol. 1).

AINEAMANI, B. Selecting the appropriate example set to teach mathematics. *In:* ANNUAL NATIONAL CONGRESS OF THE ASSOCIATION FOR MATHEMATICS EDUCATION SOUTH AFRICA, 26., 2021. **Proceedings…** Johannesburg: UNISA. Association for Mathematics Education of South Africa, 2021. p. 8-17 (Vol. 2). CDROM

ALCOCK, L. Uses of example objects in proving. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen. **Proceedings…** Bergen: Bergen University College, 2004. p. 17-24. (Vol. 2). CDROM.

AVCU, R. **Exploring middle school mathematics teachers' treatment of rational number examples in their classrooms:** A multiple case study. 2014. 444. (Tesis doctoral) - Middle East Technical University, Ankara, 2014.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, Las Vegas, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARDÍN, L. **El análisis de contenido**. Madrid: Akal Ediciones, 1996.

BRYMAN, A. **Social research methods** 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2004.

BILLS, C; BILLS, L. Experienced and novice teachers' choice of examples. *In:* ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 28., 2005, Melbourne. **Proceedings…** Melbourne: MERGA, 2005. p. 146–153. (Vol. 1). CDROM.

BILLS, L.; DREYFUS, T.; MASON, J.; TSAMIR, P.; WATSON, A.; ZASLAVSKY, O. Exemplification in Mathematics education. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30., 2006, Prague. **Proceedings…** Prague: PME, 2006. p. 126-154. (Vol. 1). CDROM.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L.C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO-MORA, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZALEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M.C. The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, London, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; CLIMENT, N.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; FLORES-MEDRANO, E.; MONTES, M.A. (eds.). **Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas**. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CHICK, H. L. Choice and use of examples as a window on mathematical knowledge for teaching. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 29, n. 3, 26-30. 2009.

CHICK, H. L; HARRIS, K. Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio. *In:* ANNUAL CONFERENCE OF THE AUSTRALIAN ASSOCIATION FOR RESEARCH IN EDUCATION, 33., 2007, Fremantle. **Proceedings…** Fremantle: AARE, 2007. 01-15. Disponible en: https://www.aare.edu.au/data/publications/2007/chi07286.pdf

CRESWELL, J. **A concise introduction to mixed methods research**. SAGE publications, 2014.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

DELGADO-REBOLLEDO, R.; ESPINOZA-VÁSQUEZ, G. El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. *En:* J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz Escolano y Á. Alsina (eds.), **Investigación en Educación Matemática XXIII**, Valladolid: SEIEM, 2019, p. 253-262.

DELGADO-REBOLLEDO, R; ZAKARYAN, D. Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwán, v. 18, n. 3, p. 567-587, 2019. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0. Acceso en: 7 ago. 2023.

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. Introduction: The Discipline and Practice of Qualitative Research. In. DENZIN, N.; LINCOLN, Y. (ed.). **Strategies of Qualitative Inquiry**. Thousand Oaks: Sage Publications, 2003. p. 01-43.

DURÁN, M. M. El estudio de caso en la investigación cualitativa. **Revista Nacional de Administración**, San José, v. 3, n. 1, p. 121-134, 2012.

ESCUDERO, D.; CARRILLO, J. Knowledge of features of learning mathematics as part of MTSK. *In:* JOINT MEETING OF PME, 38; PME-NAS, 36., 2014, Vancouver. **Proceedings… Vancouver:** Vancouver,: PME, 2014. p. 306. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/266316947_KNOWLEDGE_OF_FEATURES_OF_LEARNING_MATHEMATICS_AS_PART_OF_MTSK. Acceso en: 8 feb. 2024.

ESCUDERO-ÁVILA, D.; CLIMENT, N.; VASCO, D. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KLFM). *In:* JORNADAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA, 2., 2016, Huelva. **Actas…** Huelva: SGSE, 2016. p. 42-48. Disponible en: https://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12509/Reflexionando_sobre_el_conocimiento.pdf?sequence=2. Acceso en: 8 feb. 2024.

FIGUEIREDO, C. A. **Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional**. 2010. 648. (Tesis de Doctorado) - Universidad de Extremadura, Badajoz, 2010.

FIGUEIREDO, C. A.; BLANCO, L. J.; CONTRERAS, L. C. Exemplificação do conceito de função em quatro professores estagiários. **UNIÓN:** Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v. 2, n. 8, p. 23-39, Dic. 2006. Disponible en: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1292/991. Acceso en: 8 feb. 2024.

FIGUEIREDO, C.A.; BLANCO, L.J.; CONTRERAS, L.C. La ejemplificación del concepto defunción en estudiantes para profesores de Matemáticas de Secundaria. **Investigación en la escuela**, Sevilla, v. 61, [s.n.], p. 53-68, 2007.

FIGUEIREDO, C.; CONTRERAS, L. C., BLANCO, L. La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 24, n. 1, p. 73-105, 2012.

GOLDENBERG, P.; MASON, J. Sheding light on and with example spaces. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, [s.n.], p. 183-194, 2008.

KARAAĞAÇ, M. K. Differences in teachers' selection and use of examples in classrooms: an institutional perspective on teacher practice. *In:* DAY CONFERENCE OF THE BRITISH SOCIETY FOR RESEARCH INTO LEARNING MATHEMATICS, 25., 2005, Lancaster. **Proceedings…** Milton Keynes: BSRLM, 2005. p. 43-48. Disponible en: https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-25-3-11.pdf. Acceso en: 8 feb. 2024.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

LIÑAN-GARCÍA, M. M.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C.; CONTRERAS, L. C.; BARRERA-CATARNADO, V. J. Specialized knowledge for teaching geometry in a primary education class: Analysis from the knowledge mobilized by a teacher and the knowledge evoked in the researcher. **Mathematics**, Basel, v. 9, n. 21, p. 1-18, 2021. Disponible en: https://doi.org/10.3390/math9212805. Acceso en: 8 feb. 2024.

LOUGRHAN, J., MULHALL, P. Y BERRY, A. Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. **International Journal of Science Education**, UK, v. 30, n. 10, p. 1301-1320, 2008. Disponible en: https://doi.org/10.1080/09500690802187009. Acceso en: 25 feb. 2024

MONTES, M.; AGUILAR, A.; CARRILLO, J.; MUÑOZ-CATALÁN, M.C. MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. *In:* CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8., 2013, Ankara. **Actas…** Ankara: Middle East Technical University/ERME, 2013. p. 3185-3194. Disponible en: http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME8_2013_Proceedings.pdf. Acceso en: 8 feb. 2024.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. M. **Qualitative data analysis:** An expanded sourcebook. Thousand Oaks: Sage Publications, 1994.

MORIEL-JUNIOR, J. G; CARRILLO, J. Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En: GONZÁLEZ, M. T.; CODES, M.; ARNAU, D.; ORTEGA, T. (eds.), **Investigación en Educación Matemática**, Salamanca, v. 18, [s.n.], p. 465-474, 2014.

MUIR, T. Setting a good example: Teacher's choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy. *In:* ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 30., 2007, Hobart. **Proceedings…** Adelaide: MERGA, 2007. p. 513-522. Disponible en: http://www.researchgate.net/profile/Tracey-Muir-2/publication/253947856_Setting_a_Good_Example_Teachers%27_Choice_of_Examples_and_their_Contribution_to_Effective_Teaching_of_Numeracy/links/0c96052b3784f45441000000/Setting-a-Good-Example-Teachers-Choice-of-Examples-and-their-Contribution-to-Effective-Teaching-of-Numeracy.pdf. Acceso en: 9 feb. 2024.

NG, L. K.; DINDYAL, J. Examples in the teaching of mathematics: Teachers' perceptions. *In:* ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 38., Queensland, 2015. **Proceedings…** Adelaide: MERGA, 2015. 461-468. Disponible en: https://merga.net.au/Public/Public/Publications/Annual_Conference_Proceedings/2015_MERGA_CP.aspx. Acceso en: 9 feb. 2024.

RISSLAND-MICHENER, E. Understanding Understanding Mathematics. **Cognitive Science***,* Ciudad, v. 2*,* [s.n.], p. 361-383, 1978.

ROWLAND, T. The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, n. 2, p. 149-163, 2008.

ROWLAND, T.; THWAITES, A.; HUCKSTEP, P. Elementary teachers' Mathematics content knowledge and choice of examples. *In*: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 3., 2003, Bellaria. **Proceedings…** Bellaria: ERME, 2003. p. 01-10. http://erme.site/cerme-conferences/cerme3/cerme-3-proceedings/

SCHEINER, T.; MONTES, M. A.; GODINO, J. D.; CARRILLO, J.; PINO-FAN, L. What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 17, n. 1, p. 153-172, Sept. 2017. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6. Acceso en: 21 feb. 2024.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and Teaching: Foundations of the new Reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SUFFIAN, H; ABDUL-RAHMAN, S. Teacher's choice and use of examples in the teaching and learning of mathematics in primary school and their relations to teacher's pedagogical content knowledge (PCK). **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, Hong Kong, v. 8, n. 5, p. 312-316, 2010.

SNIDER, R. B. **How mathematical knowledge for teaching intersects with teaching practices:** The knowledge and reasoning entailed in selecting examples and giving explanations in secondary Mathematics. 2016. 226. (Tesis de doctorado) – University of Michigan, Michigan, 2016.

STAKE, R. E. **Investigación con estudio de casos**. Madrid: Morata, 2007.

TSAMIR, P.; TIROSH, D.; LEVENSON, E. Intuitive nonexamples: the case of triangles. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, 2., p. 81-95, 2008.

WATSON, A.; MASON, J. Extending Example Spaces as a Learning/Reaching Strategy in Mathematics. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2002, Norwich. **Proceedings…** London: Middlesex University, 2002. p. 377. (Vol. 6). http://www.pmtheta.com/uploads/4/7/7/8/47787337/extending_example_spaces_pme_2002.pdf

WATSON, A.; MASON, J. H. **Mathematics as a constructive activity:** Learners generating examples, Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

ZAKARYAN, D; ESTRELLA, S; ESPINOZA-VÁSQUEZ, G; MORALES, S; OLFOS, R; FLORES-MEDRANO, E; CARRILLO J. Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 36, n. 2, p. 105-123, 2018.

ZAKARYAN, D; RIBEIRO, M. Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. **Zetetiké**, Campinas, v. 24, n. 3, p. 301-321, 2016.

ZAKARYAN, D.; SOSA, L. Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 33, n. 1, p. 71-97, 2021.

ZASLAVSKY, O. There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 53, p. 245-255, Mar. 2019. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001. Acceso en: 9 feb. 20-24.

ZASLAVSKY, O.; NICKERSON, S.; STYLIANIDES, A.; KIDRON, I.; WINICKI-LANDMAN, G. The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. En: HANNA, G. DE VILLIERS, M. (eds.), **Proof and proving in mathematics education**. New York: Springer, 2012. p. 215-229.

ZASLAVSKY, O.; ZODIK, I. Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. **Research in Mathematics Education**, London, v. 9, n. 11, p. 143-155, 2007.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of squares. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, 2., p. 13-48, 2008.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

ZODIK, I; ZASLAVSKY, O. Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht v. 69, 2., p. 165-182, 2008.

Submetido em 07 de Agosto de 2022.
Aprovado em 30 de Outubro de 2023.